Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Goullet de Rugy

Faces complémentables dans un cône

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 2, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
10e année, 1970/71, n° 2, 17 p.
8 et 15 octobre 1970

FACES COMPLÉMENTABLES DANS UN CÔNE

par Alain GOULLET de RUGY

1. Introduction.

Le travail qui suit a pour but essentiel d'étendre aux faces des cônes faiblement complets les résultats démontrés par ALFSEN et ANDERSEN pour les faces des cônes à base compacte [2]. Les techniques que nous utiliserons seront complètement différentes de celles utilisées par ces auteurs. Elles seront, par contre, proches de celles que nous avions développées dans l'étude des faces des cônes réticulés ([8], [9]).

Aux paragraphes 2 et 3, nous étudions d'abord le problème suivant : Soient X un cône convexe saillant dans un espace vectoriel E, F une face de X, et F' son U-face complémentaire, c'est-à-dire la réunion des faces de X ne rencontrant pas $F \setminus \{0\}$. Sous quelles conditions a-t-on $X = F + F'$? En montrant que ce problème se ramène à la recherche de points maximaux dans $F_x = (x - X) \cap F$ $(\forall\ x \in X)$ (théorème 5), nous pouvons donner une réponse affirmative dans des situations variées (propositions 6, 14, et 15). Nous montrons, en particulier, que c'est toujours vrai lorsque F est une face fermée d'un cône faiblement complet X. A la fin du paragraphe 3, nous précisons la structure topologique de F', et nous montrons que, dès que l'origine 0 est un G_δ faible de F, ce qui est en particulier le cas si F est métrisable, ou si F a une base, F' est un G_δ de X (corollaire 18).

Ainsi, pour tout $x \in X$ faiblement complet, on a une décomposition $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F'$. Au paragraphe 4, nous étudions alors les faces fermées F pour lesquelles F' est une face, et pour lesquelles cette décomposition est unique pour tout $x \in X$. Comme pour les cônes à base compacte, la famille de ces faces est stable par somme finie et intersection quelconque (proposition 28). Par suite, si T est une partie de la réunion $\mathcal{E}_g(X)$ des génératrices extrémales de X, la famille des traces de ces faces définit sur T l'ensemble des fermés d'une topologie dite AA-faciale.

Au paragraphe 5, nous nous restreignons aux cônes X ayant "suffisamment de génératrices extrémales" (définition 35), et aux ensembles T qui sont l'ensemble des points extrémaux d'une pseudo-base de X (définition 44), et nous démontrons le théorème fondamental de ce travail : Toute fonction numérique bornée et AA-facialement continue sur T se prolonge en une forme linéaire continue sur X

tout entier. L'idée de base pour la démonstration de ce théorème est de le montrer d'abord pour une fonction AA-facialement s. c. s., résultat qui est lui-même facile à obtenir dès qu'on l'a montré pour la fonction caractéristique de tout ensemble AA-facialement fermé de T (théorème 29).

Qu'il nous soit permis de remercier F. PERDRIZET qui a bien voulu relire et critiquer le manuscrit de ce travail.

2. Quelques propriétés des faces d'un cône.

Soient E un espace vectoriel sur $\underset{\sim}{R}$, et K un cône convexe saillant pointé sur E. On appelle U-face (1) (resp. face) de K, tout sous-ensemble F de K qui est un sous-cône (resp. un sous-cône convexe) héréditaire de K. Toute U-face de K est une réunion de faces, et réciproquement. Si F est une U-face de K, on appelle U-face conique (2) complémentaire de F, la réunion F' de toutes les faces de K rencontrant F en $\{0\}$. Lorsque K est un cône réticulé, la U-face complémentaire est toujours une face.

Soit maintenant B un convexe saillant de E. Nous supposerons toujours que B est la base d'un cône pointé $\widetilde{B}$, au besoin en identifiant B au convexe $B \times \{I\}$ de $E \times \underset{\sim}{R}$, et en prenant pour $\widetilde{B}$ le cône pointé engendré par $B \times \{I\}$. On appelle face (resp. U-face) de B, toute trace sur B d'une face (resp. U-face) de $\widetilde{B}$. Si F est une U-face de B, et $\widetilde{F}$ la U-face correspondante dans $\widetilde{B}$, on appelle U-face complémentaire, la réunion F' des faces de B ne rencontrant pas F ; on a $F' = (\widetilde{F})' \cap B$. Lorsque B est un simplexe, la U-face complémentaire est toujours une face.

Pour plus de détails, nous renvoyons aux paragraphes 1 et 2 de [9]. De ces paragraphes, nous extrayons le résultat élémentaire suivant, d'un usage constant. Dans la suite de ce paragraphe, K désignera un cône convexe saillant pointé, sauf indication contraire.

DÉFINITION 1. - On dit que deux points x et y de K sont étrangers, si le seul point u de K, tel que $u \lessdot x , y$, est $u = 0$. Plus généralement, on dit qu'un point x de K est étranger à une partie A de K, si x est étranger à tout point de A.

---

(1) Dans des travaux antérieurs ([8], [9]), nous utilisions le terme σ-face qui est ensuite apparu inadéquat parce que laissant supposer que la réunion était dénombrable.

(2) Nous omettrons l'adjectif conique lorsque le contexte ne prètera pas à confusion.

PROPOSITION 2. - Soit F une U-face de K. Alors, on a

(3) $$F' = \{y \in K \mid y \text{ étranger à } F\} .$$

LEMME 4. - Soient F une face de K, et F' sa U-face complémentaire. Alors :

(a) Soient $x \in K$, et $x = y + z = y' + z'$ deux écritures de x, avec $y, y' \in F$, $z \in F'$, et $z' \in K$. Alors, si $y \leq y'$, on a $y = y'$.

(b) Soit $x \in K$. Si on a une écriture $x = y + z$, avec $y \in F$ et $z \in F'$, y est un élément maximal de l'ensemble $F \cap (x - K)$.

(c) Inversement, si $F \cap (x - K)$ a un élément maximal y, on a $(x - y) \in F'$.

Démonstration.

(a) Supposons que $y < y'$. On a $0 < y' - y$ et $y' - y < y'$, ainsi que $y' - y \leq z' + (y' - y) = z$. Ainsi, y' et z ne sont pas étrangers, ce qui est absurde, d'après (3).

(b) C'est une conséquence directe du (a).

(c) Soit y un élément maximal de $F \cap (x - K)$. Montrons que $z = x - y \in F'$. Soient, dans ce but, $t \in F$ et $u \in K$ tel que $u \leq z$, t. Comme F est une face, l'inégalité $u \leq t$ implique $u \in F$, et l'inégalité $u + y \leq x$ implique $u + y \in F$. Donc $u + y \in F \cap (x - K)$. Comme y est maximal dans cet ensemble, cela implique $u = 0$. L'égalité (3) permet de conclure.

THÉORÈME 5. - Soit F une face de K. Pour qu'on ait l'égalité $K = F + F'$, il faut et il suffit que, pour tout $x \in K$, l'ensemble $F_x = F \cap (x - K)$ soit inductif.

Démonstration. - C'est une conséquence directe du lemme précédent et du théorème de Zorn.

PROPOSITION 6. - On suppose que E est normé par une norme p additive sur K. Alors, si K est complet, on a $K = F + F'$ pour toute face fermée (normiquement) F de K.

Démonstration. - Soient $x \in K$, et A une partie totalement ordonnée de F_x. La norme p étant strictement positive sur $K \setminus \{0\}$, on a $p(a) < p(a')$ si, et seulement si, $a < a'$ $(a , a' \in A)$. Il en résulte qu'il existe dans A une suite croissante (a_n) $(n \in \underset{\sim}{N})$, cofinale à A. Posons $x_0 = a_0$ et $x_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$. La norme p étant additive, on a

$$p(a_{n+1}) = \sum_0^n p(x_k) \leq p(x) < +\infty \qquad (\forall\, n \in \underset{\sim}{N}) .$$

Par suite, la série $\sum_{0}^{+\infty} p(x_n)$ converge, et la suite (a_n) est une suite de Cauchy dans K. Comme K est complet, elle converge vers un point $a \in K$. De plus, à partir du rang k, la suite (a_n) est dans le fermé $(a_k + K) \cap F_x$, en sorte que $a \in F$ et que $a_k \leqslant a \leqslant x$ $(\forall\, k \in \underline{N})$. Ainsi, a est un majorant de A dans F_x. Autrement dit, F_x est inductif, et le théorème 5 permet de conclure.

Remarque 7. - Le résultat de la proposition précédente était connu lorsque K est réticulé. Il a été prouvé indépendamment par J. B. BEDNAR ([4], theorem 1.4 (2)) et ASIMOW et A. J. ELLIS ([3], theorem 1), mais avec des méthodes moins directes.

3. Faces dans les cônes de $\mathbb{S}$.

On rappelle que $\mathbb{S}$ désigne la classe des convexes saillants et faiblement complets. Si K est un cône de $\mathbb{S}$, on désigne par $L_c(K)$ (resp. $L_s(K)$) l'espace des formes linéaires continues (resp. s. c. s.) sur K. On munit ces espaces de fonctions de l'ordre usuel : $f \leqslant g$ si, et seulement si, $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in K$. Pour cet ordre, $L_c(K)$ est positivement engendré (lemme 1, n° 8, § 6, chapitre II de [5]). Si f est une fonction numérique sur K, majorée par une fonction de $L_c(K)$, on pose

$$\hat{f} = \inf\{\ell \in L_c(K) \mid \ell \geqslant f\} \quad . \tag{8}$$

C'est une fonction sur-linéaire et s. c. s. sur K. Pour affirmer qu'une fonction numérique f sur K est majorée par une fonction de $L_c(K)$, nous utiliserons le résultat suivant (remarque 2, n° 4, § 5, chapitre II de [5]) :

PROPOSITION 9. - Soit X un cône convexe fermé dans un e. l. c. E. Alors toute fonction sur-linéaire s. c. s. f sur X est l'enveloppe inférieure des restrictions à X des formes linéaires continues sur E majorant f sur X.

Cette proposition permet aussi de dire que, si f est une fonction numérique sur K, majorée par une fonction de $L_c(K)$, on a

$$\hat{f} = \inf\{\ell \in L_s(K) \mid \ell \geqslant f\} \quad . \tag{10}$$

LEMME 11. - Soient K un cône de $\mathbb{S}$, et A une famille filtrante croissante et majorée d'éléments de K. Alors la base de filtre formée des sections

$$s_a = \{y \in A \mid y \geqslant a\} \qquad (a \in A) \quad ,$$

a une limite qui est la borne supérieure de la famille A.

Démonstration. - Soit z un majorant de A . La famille (s_a) $(a \in A)$ est une base de filtre dans le compact $K \cap (z - K) = C$. Elle a donc des points adhérents. Soit t un de ceux-ci. On a $t \in (\overline{s_a}) \subset (a + C)$, donc $t \geqslant a$ pour tout $a \in A$, donc t est un majorant de A . De plus, $t \in C$, donc $t \leqslant z$. Comme z est un majorant quelconque de A , t est la borne supérieure de A .

DÉFINITION 12. - Soit K un cône convexe saillant pointé dans un espace vectoriel réel. Une forme linéaire positive sur K est dite normale, si, pour toute famille filtrante décroissante (a_i) de points de K , de borne inférieure 0 , $\lim(f(a_i)) = 0$.

Il revient au même de dire que, pour toute famille filtrante croissante (a_i) de points de K , de borne supérieure a , on a $\lim(f(a_i)) = f(a)$.

EXEMPLES 13.

(a) Toute forme linéaire positive plus petite qu'une forme normale est normale.

(b) D'après le lemme 11, toute forme linéaire continue positive sur un cône de $\mathbb{S}$ est normale.

(c) D'après (a), (b), et la proposition 9, toute forme linéaire positive s. c. s. sur un cône de $\mathbb{S}$ est normale.

PROPOSITION 14. - Soient K un cône de $\mathbb{S}$, et F une face de K . Si F est l'ensemble des points où une forme normale ℓ s'annule, on a $K = F + F'$.

Démonstration. - Soient $x \in K$, et (a_i) une famille totalement ordonnée de $F_x = F \cap (x - K)$. D'après le lemme 11, cette famille a une borne supérieure a . Montrons que $a \in F_x$. Comme $a \leqslant x$, il suffit de vérifier que $a \in F$. Or, comme ℓ est normale, on a $\ell(a) = \lim(\ell(a_i)) = 0$. Le théorème 5 permet alors de conclure.

PROPOSITION 15. - Soient K un cône de $\mathbb{S}$, et F une face fermée de K . Alors $K = F + F'$.

Démonstration. - Soient $x \in K$, et A une partie totalement ordonnée de F_x . D'après le lemme 11, A a une borne supérieure a . Comme F_x est compact, ce même lemme montre que $a \in F_x$. Ainsi, F_x est inductif, et le théorème 5 permet de conclure.

Nous allons décrire maintenant comment ces résultats s'interprètent pour les convexes de $\mathbb{S}$. Soit B une base d'un cône K de $\mathbb{S}$. Si F est une face fermée de B , le cône pointé $\widetilde{F}$ engendré par F est une face fermée de K , et la proposition 15 prouve que $B = \operatorname{conv}(F \cup F')$, où F' est la U-face complémentaire de F

dans B . En fait, elle prouve plus précisément que tout $x \in B$ s'écrit $x = py + (1-p)z$, avec $y \in F$, $z \in F'$, et $0 \leq p \leq 1$. Si on pose $t = py$, t est un point maximal de $(\widetilde{F})_x$. Si B est un simplexe, c'est-à-dire si K est réticulé, cette écriture est unique, et t est le maximum de $(\widetilde{F})_x$. En conséquence, si $x = qy' + (1-q)z'$ est une autre écriture de x , avec $y' \in F$, $z' \in B$, et $0 \leq q \leq 1$, on a $qy' \leq t$; en particulier, si $q \neq 0$, $q \leq p$. Ces diverses considérations rendent beaucoup plus intuitifs les résultats et les démonstrations de la proposition 5 et du théorème 1 de [1].

Remarque 16. - Des propriétés du cône K , la démonstration de la proposition 15 utilise seulement que, pour tout $x \in K$, l'ensemble $K \cap (x - K)$ est compact dans K . Le résultat de cette proposition est donc, en particulier, valable pour tous les cônes convexes saillants et bien coiffés. En effet, si x est un point d'un tel cône, et si B est un chapeau de K contenant x , l'ensemble $K \cap (x - K)$ est égal à l'ensemble $B \cap (x - B)$. Il est donc compact.

PROPOSITION 17. - *Soient K un cône de $\mathfrak{S}$, F une face fermée de K , et f une fonction numérique positive sur-linéaire et s. c. s. définie sur F . Prolongeons f par 0 hors de F , et notons f' ce prolongement. Alors $\hat{f}'$ est sur-linéaire s. c. s., égale à f sur F , et à 0 sur F' .*

Démonstration. - Notons d'abord que la proposition 9 et le fait que $L_c(K)$ soit positivement engendré montrent qu'il existe $\ell \in L_c(K)^+$ avec $\ell \geq f'$, en sorte que $\hat{f}'$ existe. Cela étant, considérons dans $K \times \underline{R}$ les cônes

$$A = \{(x , y) \mid x \in F \text{ et } y \leq f(x)\} , \qquad B = \{(x , y) \mid x \in K \text{ et } y \leq 0\} ,$$

$$C = \{(x , y) \mid x \in K \text{ et } y \leq \ell(x)\} .$$

A , B , et C , sont des cônes fermés dans le cône faiblement complet $K \times \underline{R}$. Ils sont aussi faiblement complets, et comme on a $A , B \subset C$, il résulte du corollaire 2, n° 8, § 6, chapitre II de [5], que $A + B$ est fermé. Par suite, si, pour tout $x \in K$, on pose $g(x) = \sup\{y \mid (x , y) \in A + B\}$, le cône fermé $A + B$ apparaît comme l'ensemble des points au-dessous du graphe de g dans $K \times \underline{R}$. Ainsi g est sur-linéaire et s. c. s. Par construction, il est clair que $g \leq \hat{f}'$. De plus, $g = f$ sur F , et $g = 0$ sur F' . Comme g est sur-linéaire, la proposition 15 implique $g \geq f'$, et la proposition 9 implique $g \geq \hat{f}'$. Finalement $g = \hat{f}'$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 18. - *Soient K un cône de $\mathfrak{S}$, et F une face fermée de K . S'il existe une suite (f_n) de fonctions de $L_c(K)^+$ telle que $\sup_n (f_n)$ soit > 0 sur $F \setminus \{0\}$, alors F' est un G_δ de K .*

<u>Démonstration</u>. - Avec les notations de la proposition 17, montrons l'égalité $F' = \bigcap_n \{\hat{f}'_n = 0\}$, ce qui prouvera que F' est une intersection dénombrable de G_δ, donc un G_δ lui-même. D'abord, d'après cette proposition, F' est inclus dans l'intersection. Inversement, soit $x \notin F'$. D'après la proposition 15, x s'écrit $x = y + z$, avec $y \in F$, $y \neq 0$. Choisissons un entier m tel que $f_m(y) > 0$. Puisque f'_m est sur-linéaire, on a, a fortiori, $\hat{f}'_m(x) > 0$, donc $x \notin \{f'_m = 0\}$, ce qui prouve l'inclusion inverse.

REMARQUES 19.

(a) La condition du corollaire 18 équivaut à dire que 0 est un G_δ de F. Par suite, le résultat de ce corollaire est valable pour tous les cônes de $\mathbb{S}$ contenus dans un produit dénombrable de cônes ayant une base, en particulier, pour les cônes métrisables.

(b) Si on applique ce corollaire à un cône K ayant une base B, on en déduit que la U-face complémentaire de toute face fermée de B est un G_δ de B. Ce résultat était connu pour les cônes K réticulés (cf. corollaire 4.23 de [9]), ainsi que pour les cônes à base compacte (cf. corollaire 1.3 de [2]).

4. Faces complémentables.

Dans la suite de ce paragraphe, K désignera un cône convexe saillant dans un espace vectoriel réel, sauf mention explicite du contraire.

DÉFINITION 20. - On dit qu'une face F de K est <u>complémentable</u>, si la U-face conique complémentaire F' de F est une face, et si tout x s'écrit de manière unique

(21) $$x = y + z , \qquad \text{avec } y \in F \text{ et } z \in F' .$$

On note p_F la projection qui, à $x \in K$, associe sa "composante" y suivant F définie par (21).

DÉFINITION 22. - Soit B un ensemble convexe saillant. On dit qu'une face F de B est <u>complémentable</u>, si la U-face complémentaire F' de F est une face, et si tout $x \in K \setminus (F \cup F')$ s'écrit de manière unique

(23) $$x = \alpha y + (1 - \alpha) z , \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1 , \ y \in F \text{ et } z \in F' .$$

On note π_F la "projection" qui, à x associe sa "composante" y suivant F, définie par (23), et α_F l'application qui, à x associe le coefficient α.

Dans la définition 20, l'application p_F est linéaire, et sa restriction à F' vaut 0 . Dans la définition 22, l'application α_F , prolongée à K tout entier par 0 sur F' et 1 sur F , est affine sur B , à valeurs dans $[0 , 1]$, et on a exactement $\{\alpha_F = 1\} = F$ et $\{\alpha_F = 0\} = F'$. Cela exprime que F et F' sont parallèles.

EXEMPLES 24.

(a) Lorsque K est un cône réticulé, la U-face conique complémentaire d'une face F est toujours une face (corollaire 2.6 de [9]). Par suite, F est complémentable si, et seulement si, $K = F + F'$. Ainsi, dans ce cas, les propositions 6, 14, et 15, sont autant de critères pour qu'une face soit complémentable.

(b) Soit K la partie positive d'une algèbre de von Neumann munie de la topologie ultrafaible. Alors, une face de K est complémentable si, et seulement si, c'est la partie positive d'un idéal bilatère ultrafaiblement fermée. Dans ce cas, l'existence et l'abondance de faces complémentables sont donc liées à l'importance du centre de l'algèbre de von Neumann considérée.

Rappelons maintenant quelques propriétés de ces faces. Elles ont été montrées indépendamment par ALFSEN et ANDERSEN dans [2] et par F. PERDRIZET dans [14] (dans ce dernier travail, ce que nous appelons face complémentable est la partie positive d'un facteur direct).

PROPOSITION 25. - <u>Soit</u> F <u>une face complémentable de</u> K .

(a) <u>Si</u> G <u>est une face complémentable de</u> F , G <u>est une face complémentable de</u> K .

(b) <u>Si</u> G <u>est une face de</u> K , $F \cap G$ <u>est une face complémentable de</u> G .

(c) <u>Si</u> G <u>est une autre face complémentable de</u> K , <u>on a</u> :

(α) $F \cap G$ <u>est une face complémentable de</u> K , <u>et</u> $(F \cap G)' = F' + G'$;

(β) $F + G$ <u>est une face complémentable de</u> K , <u>et</u> $(F + G)' = F' \cap G'$;

(γ) <u>Tout</u> $x \in K$ <u>s'écrit de manière unique</u>

$$x = x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} ,$$

<u>avec</u> $x_{11} \in F \cap G$, $x_{12} \in F \cap G'$, $x_{21} \in F' \cap G$, <u>et</u> $x_{22} \in F' \cap G'$.

COROLLAIRE 26. - <u>Soient</u> (F_i) $(i \in I)$ <u>une famille de faces complémentables de</u> K , f <u>une application définie sur la réunion</u> G <u>des</u> F_i , <u>et à valeurs dans un espace vectoriel réel</u> L , <u>linéaire sur chaque face</u> F_i . <u>Alors</u> f <u>se prolonge de manière unique en une application linéaire</u> $\bar{f}$ <u>définie sur la face</u> $F = \mathrm{conv}(G)$.

Démonstration. - On peut naturellement se restreindre au cas où I est fini. Puis, par récurrence, on se ramène au cas où $I = \{1 , 2\}$. Pour tout $x \in F$, on pose $\bar{f} = f(x_{11}) + f(x_{12}) + f(x_{21})$, où $x_{11} \in F_1 \cap F_2$, $x_{12} \in F_1 \cap F'_2$, $x_{21} \in F_2 \cap F'_1$, et $x = x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22}$, avec $x_{22} \in F'_1 \cap F'_2$, comme indiqué dans la proposition précédente. Vérifions la linéarité de $\bar{f}$. Soient $x , y \in F$; vu la linéarité de f sur F_1 et F_2 , on a

$$\bar{f}(x) + \bar{f}(y) = f(x_{11} + y_{11}) + f(x_{12} + y_{12}) + f(x_{21} + y_{21}) \quad ;$$

or, la proposition 25 (γ), appliquée à $z = x + y$, montre que le second membre de l'égalité est $\bar{f}(z)$. Enfin, si $x \in F_1$, on a $\bar{f}(x) = f(x_{11}) + f(x_{12}) = f(x)$; même résultat si $x \in F_2$, ce qui achève la démonstration.

La proposition qui suit a été prouvée par ALFSEN et ANDERSEN dans le cas des cônes à base compacte (proposition 4.1 de [2]), avec des arguments complètement différents des nôtres.

LEMME 27. - Soient K un cône de $\mathcal{S}$, et (F_i) une famille de faces complémentables de K . Si la face $F = \bigcap_i F_i$ est telle que $K = F + F'$, F est complémentable.

Démonstration. - D'abord, puisque les faces complémentables de K sont stables par intersection finie, on peut supposer que la famille (F_i) est filtrante décroissante. Soit alors $x \in K$; pour tout i , on a $x = y_i + z_i$, avec $y_i \in F_i$ et $z_i \in F'_i$. Comme la famille (y_i) est filtrante décroissante, sa borne inférieure, y , existe, d'après le lemme 11. De même, la borne supérieure z de la famille (z_i) existe, et, en passant à la limite, $x = y + z$. D'autre part, par hypothèse, on a $x = y' + z'$, avec $y' \in F$ et $z' \in F'$. Comme $y' \in F \subset F_i$, $y' \preccurlyeq y_i$ pour tout i , donc $y' \preccurlyeq y$. Le lemme 4 (a) permet d'affirmer que $y = y'$, et que $z = z'$. Ainsi, la "décomposition" de x suivant F et F' est unique, ce qui prouve que F est complémentable.

PROPOSITION 28. - Dans un cône K de $\mathcal{S}$, la famille des faces fermées est stable par somme finie et par intersection quelconque.

Démonstration. - La stabilité par somme finie résulte de la proposition 25 (β) et du corollaire 3.3 de [9]. La stabilité par intersection quelconque résulte du lemme 27 et de la proposition 15.

Le résultat suivant généralise un théorème de prolongement, que nous avions montré pour les faces fermées des cônes réticulés (cf. théorème 19 de [8], ou théorème 4.20 de [9]). Dans l'énoncé qui suit, L désigne une partie de $L_c(F)^+$, qui sépare les points de F .

THÉORÈME 29. - Pour une face fermée F d'un cône K de $\mathbb{S}$, il est équivalent de dire :

(a) F est complémentable ;

(b) Toute $f \in L_s(F)^+$ se prolonge (de manière nécessairement unique) en une fonction $\overline{f} \in L_s(K)^+$, nulle sur F' ;

(c) Toute $f \in L$ se prolonge (de manière nécessairement unique) en une fonction $f \in L_s(K)^+$, nulle sur F' .

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Pour prouver cette implication, il suffit de reprendre point par point la démonstration du théorème 4.20 de [9]. En effet, un examen attentif de celle-ci montre que, dans l'énoncé de ce théorème, l'hypothèse que K est réticulé sert seulement à affirmer que toute face fermée de K est complémentable.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . Soit à montrer que F' est une face. Si c'était faux, on aurait un $x \in F'$ et deux égalités $x = y + z = y_1 + y_2$ de x , avec y_1 , y_2 , $z \in F'$, et $y \in F \setminus \{0\}$. En prenant $f \in L$ telle que $f(y) > 0$, on aurait, d'une part, $\overline{f}(x) = \overline{f}(y_1) + \overline{f}(y_2) = 0$, et, d'autre part, $\overline{f}(x) = \overline{f}(y) + \overline{f}(z) = \overline{f}(y) = f(y) > 0$, ce qui serait absurde. Soit maintenant à montrer que l'égalité (21) est unique. Si c'était faux, on aurait un $x \in K$ et deux égalités $x = y + y' = z + z'$, avec y , $z \in F$, y' , $z' \in F'$, et $y \neq z$. En prenant $f \in L$ telle que $f(y) \neq f(z)$, on aurait $\overline{f}(x) = f(y) = f(z)$, ce qui serait absurde.

Remarque 30 (cf. [14], n° 1.13 et suivants). - Soit F une face complémentable d'un cône convexe saillant K . L'application p_F (définition 20) vérifie $p_F \circ p_F = p_F$ et $p_F \lesssim \underset{\sim}{I}$, où $\underset{\sim}{I}$ est l'application identique de K dans lui-même. Réciproquement, si p est une projection de K dans lui-même vérifiant $p \lesssim \underset{\sim}{I}$, l'ensemble $F = \{p = \underset{\sim}{I}\}$ est une face complémentable de K . Si maintenant $K \in \mathbb{S}$, et si F est fermée, la propriété (b) du théorème ci-dessus exprime que p_F est scalairement s. c. s., en ce sens que $f \circ p_F \in L_s(K)^+$ dès que $f \in L_c(F)^+$. Réciproquement, il est facile de voir que, si p est une projection de K dans lui-même telle que $p \lesssim \underset{\sim}{I}$, et scalairement s. c. s., l'ensemble $F = \{p = \underset{\sim}{I}\}$ est une face fermée complémentable de K .

PROPOSITION 31. - Soient F_1 , ... , F_n , n faces fermées complémentables d'un cône de $\mathbb{S}$, et f une fonction définie sur la réunion G de ces faces, telle que $f|_{F_i} \in L_s(F_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors f se prolonge de manière unique en une fonction $\overline{f} \in L_s(F)$, où F est la face fermée $F = \mathrm{conv}(G) = \sum_1^n F_i$.

Démonstration. - En utilisant le corollaire 26, la démonstration est exactement celle de la proposition 4.6 de [9].

COROLLAIRE 32. - Sous les hypothèses de la proposition précédente, si f est, de plus, continue sur chaque face F_i, son prolongement $\overline{f}$ est continu.

PROPOSITION 33. - Pour une face fermée complémentable F d'un cône K de $\mathcal{S}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) F' est fermée ;

(b) p_F est continue ;

(c) Toute $f \in L_c(F)$ se prolonge de manière unique en une $\overline{f} \in L_c(K)$, nulle sur F'.

Démonstration. - L'implication (a) $\Longrightarrow$ (c) est une conséquence directe du corollaire 32. Pour montrer l'implication (c) $\Longrightarrow$ (b), il suffit de remarquer que p_F est continue si, et seulement si, $f \circ p_F \in L_c(K)$ pour toute $f \in L_c(F)$; or, pour toute $f \in L_c(F)$, on a $f \circ p_F = \overline{f}$. Enfin l'implication (b) $\Longrightarrow$ (a) résulte de ce que F' est l'ensemble des points où p_F s'annule.

COROLLAIRE 34. - Pour une face fermée complémentable F d'un convexe linéairement compact B de $\mathcal{S}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) F' est fermée ;

(b) α_F est continue ;

(c) Toute $f \in A_c(F)$ se prolonge de manière unique en une $\overline{f} \in A_c(B)$, nulle sur F' (3).

Démonstration. - Comme indiqué au début du paragraphe 2, considérons B comme la base d'un cône convexe pointé K. Comme B est linéairement compact, il résulte de [9], § 4, n° 1, que K est faiblement complet. Pour la même raison, le cône pointé $\widetilde{F}$ engendré par F est une face fermée complémentable de K, dont la face conique complémentaire est $\widetilde{F}'$ qui est aussi fermée. De la proposition précédente, il résulte, compte-tenu du corollaire 4.4 de [9], que l'implication (a) $\Longrightarrow$ (c) est vraie. Pour montrer l'implication (c) $\Longrightarrow$ (b), on remarque que $\alpha_F = \overline{I}$, et pour montrer (b) $\Longrightarrow$ (a), on remarque que F' est l'ensemble des points où α_F s'annule.

---

(3) Pour un convexe X dans un e. v. t. sur $\underline{R}$, $A_c(X)$ désigne l'espace des formes affines continues sur X.

5. Topologies faciales.

Soient K un cône de $\mathcal{S}$, et A une partie de la réunion $\mathcal{E}_g(K)$ des génératrices extrémales de K . La proposition 28 montre que les traces sur A des faces fermées complémentables de K constituent l'ensemble des fermés d'une topologie sur A , dite topologie AA-faciale (par référence à ALFSEN et ANDERSEN [2], qui l'ont introduite en premier). Nous allons étudier maintenant le problème suivant : Sous quelles conditions portant sur K et A , peut-on prolonger une fonction AA-facialement continue en une forme linéaire continue sur K , et cela, de manière unique ? K pouvant ne pas avoir de génératrices extrémales, il nous faut nous restreindre à des cônes en ayant suffisamment.

DÉFINITION 35. - Soit K un cône de $\mathcal{S}$. On dit que K est profilé, si, pour tout couple f , g de fonctions de $L_s(K)^+$, l'inégalité $f \leqslant g$ sur $\mathcal{E}_g(K)$ implique $f \leqslant g$ partout.

Des manipulations évidentes montrent que, si K est profilé, alors, pour tout couple f , g de fonctions de $L_s(K) \cup (- L_s(K))$, tel que $0 \leqslant f$, $g \leqslant \ell$, pour une $\ell \in L_c(K)$, l'inégalité $f \leqslant g$ sur $\mathcal{E}_g(K)$ implique $f \leqslant g$ partout.

PROPOSITION 36. - Pour un cône K profilé de $\mathcal{S}$, on a $K = \overline{\text{conv}}(\mathcal{E}_g(K))$.

Démonstration. - En effet, le fait que toute génératrice extrémale d'un cône de $\mathcal{S}$ soit extrémale forte, entraîne que l'égalité $K = \text{conv}(\mathcal{E}_g(K))$ équivaut à la propriété : Pour tout couple f , g de fonctions de $L_c(K)$, l'inégalité $f \leqslant g$ sur $\mathcal{E}_g(K)$ implique $f \leqslant g$ sur K . Et, cette dernière propriété est plus faible que celle de la définition d'un cône profilé.

Remarque 37. - Nous verrons dans [10] un exemple montrant que la réciproque est inexacte.

DÉFINITION 38. - Soient X et Y deux cônes de $\mathcal{S}$, et φ une application linéaire de X dans Y . On dit que :

(a) φ est directe, si $\varphi(\mathcal{E}_g(X)) \subset \mathcal{E}_g(Y)$;
(b) φ est scalairement s. c. s., si $\ell \circ \varphi \in L_s(X)^+$ pour toute $\ell \in L_s(Y)^+$.

PROPOSITION 39.

(a) Soient X et Y deux cônes de $\mathcal{S}$, et φ une application linéaire scalairement s. c. s. et directe de X sur Y . Alors, si X est profilé, Y est profilé.

(b) Toute face fermée complémentable d'un cône profilé est un cône profilé.

(c) Tout produit de cônes profilés est un cône profilé.

Démonstration.

(a) Soient f, $g \in L_s(Y)^+$ vérifiant $f \leq g$ sur $\mathcal{E}_g(Y)$. Alors $f \circ \varphi \leq g \circ \varphi$ sur $\mathcal{E}_g(X)$, puisque φ est directe, d'où $f \circ \varphi \leq g \circ \varphi$ sur X, puisque X est profilé. Comme φ est surjective, il en résulte $f \leq g$ sur X.

(b) Cela résulte immédiatement du (a) et de la remarque 30.

(c) Soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ un produit de cônes profilés. Notons $\mathfrak{J}$ l'ensemble des parties finies de I, et, pour chaque $J \in \mathfrak{J}$, posons

$$X_J = \{(x_i) \in X \mid x_i = 0 \text{ pour } i \notin J\} ,$$

et p_J la projection naturelle de X sur X_J. Enfin, soient f et $g \in L_s(X)^+$ telles que $f \leq g$ sur $\mathcal{E}_g(X)$. Pour tout $i \in I$, $X_{\{i\}}$ est profilé, et $\mathcal{E}_g(X_{\{i\}}) \subset \mathcal{E}_g(X)$; en sorte que $f \leq g$ sur $X_{\{i\}}$. Par linéarité, cela implique $f \leq g$ sur chaque X_J $(J \in \mathfrak{J})$. Cela étant, prenons $x \in X$. x est la borne supérieure de la famille filtrante croissante $(p_J(x))$ $(J \in \mathfrak{J})$. Comme on a $f(p_J(x)) \leq g(p_J(x))$, pour tout $J \in \mathfrak{J}$, on en déduit que $f(x) \leq g(x)$, puisque f et g sont normales (exemple 13 (c)).

COROLLAIRE 40. - Si K est un cône profilé réticulé, toute face fermée de K est un cône profilé.

Démonstration. - Cela résulte immédiatement du (b) de la proposition précédente, et de ce que toute face fermée d'un cône réticulé de $\mathcal{S}$ est complémentable.

COROLLAIRE 41. - Un sous-cône fermé d'un cône profilé n'est pas, en général, un cône profilé.

Démonstration. - D'après le (c) de la proposition précédente, tout cône de la forme $\underset{\sim}{R}_+^I$ est profilé, quel que soit l'ensemble I. Or, dès que I a la puissance du continu, $\underset{\sim}{R}_+^I$ contient des cônes sans génératrice extrémale et qui, de ce fait, ne sont pas profilés.

EXEMPLE 42. - Soit X un convexe compact. Dans [13], MOKOBODZKI a montré que, pour toute forme affine s. c. s. f sur X, la famille $\{\ell \in A_c(X) \mid \ell > f\}$ est filtrante décroissante, d'enveloppe inférieure égale à f. Il est facile d'en déduire que, si f et g sont affines s. c. s., telles que $f \leq g$ sur $\mathcal{E}(X)$, alors $f \leq g$ sur X.

Cela étant, soit K un cône bien coiffé. Pour chaque chapeau C de K, on a $\mathcal{E}(C) \subset \mathcal{E}_g(K)$ (proposition 30.2 de [6]). En conséquence, si, pour un couple de fonctions de $L_s(K)^+$, on a $f \lesssim g$ sur $\mathcal{E}_g(K)$, on a $f \lesssim g$ sur tout chapeau de K, donc sur K tout entier.

EXEMPLE 43. - Soit K un cône de $\mathbb{S}$. On appelle <u>chevelure</u> de K, la réunion des chapeaux de K. La chevelure de K est un cône héréditaire Y de K (pas nécessairement convexe). On dit que K est <u>presque bien coiffé</u>, si tout $x \in K$ est la borne supérieure d'une famille filtrante croissante de points de $\mathrm{conv}(Y)$. L'exemple le plus simple de cône presque bien coiffé et non bien coiffé en général, est le cône des mesures de Radon positives sur un localement compact. Montrons qu'un cône presque bien coiffé K est profilé. Prenons un couple f, g de fonctions de $L_s(K)^+$, tel que $f \lesssim g$ sur $\mathcal{E}_g(K)$. On voit, comme dans l'exemple précédent, que $f \lesssim g$ sur la chevelure Y de K. Par linéarité, on a aussi $f \lesssim g$ sur $\mathrm{conv}(Y)$. Enfin, comme f et g sont normales, on en déduit $f \lesssim g$ partout.

DÉFINITION 44. - Soit K un cône de $\mathbb{S}$. On appelle <u>pseudo-base</u> de K, tout ensemble de la forme $B_\ell = \{x \in K \mid \ell(x) = 1\}$, où $\ell \in L_c(K)^+$ et $\ell \neq 0$. On note $T_\ell = \mathcal{E}(B_\ell) = \mathcal{E}_g(K) \cap B_\ell$.

LEMME 45. - <u>Soient</u> K <u>un cône de</u> $\mathbb{S}$, B_ℓ <u>une pseudo-base de</u> K, <u>et</u> F <u>une face fermée complémentable de</u> K. <u>La fonction</u> $\ell_F = \ell \circ p_F$ <u>est linéaire et s. c. s., et c'est la seule fonction</u> g <u>de</u> $L_s(K)^+$ <u>vérifiant les conditions suivantes</u> :

(a) $0 \lesssim g \lesssim \ell$;
(b) $g = 1$ <u>sur</u> $F \cap B_\ell$;
(c) $g = 0$ <u>sur</u> F'.

<u>Démonstration</u>.

<u>Unicité</u> : Prenons g comme indiqué. La relation (a) implique $g = 0$ sur $\ell^{-1}(0)$. La relation (b) implique $g = \ell$ sur $(F \cap B_\ell)^\sim$. Comme $F \subset (F \cap B_\ell)^\sim + \ell^{-1}(0)$, d'après la formule 3.6 de [9], $g = \ell$ sur F. Avec la relation (c), ceci montre que g est uniquement déterminée sur F et F', donc sur K tout entier (théorème 15).

<u>Existence</u> : La fonction $\ell_F = \ell \circ p_F$ est linéaire, égale à ℓ sur F, et à 0 sur F'. Comme $K = F + F'$, elle est égale au prolongement $\overline{\ell|_F}$ de $\ell|_F$ défini au théorème 29. Ce prolongement étant s. c. s., ℓ_F est s. c. s.

THÉORÈME 46. - <u>Soient</u> K <u>un cône profilé de</u> $\mathbb{S}$, <u>et</u> B_ℓ <u>une pseudo-base de</u> K. <u>Alors, toute fonction</u> f <u>définie sur</u> T_ℓ AA-<u>facialement s. c. s. (resp. continue)</u>

<u>et bornée se prolonge en une fonction</u> f <u>linéaire s. c. s. (resp. continue) sur</u> K <u>tout entier. De plus, il existe un, et un seul, prolongement qui soit borné sur</u> B_ℓ .

<u>Démonstration.</u>

<u>Unicité</u> : Soit g un prolongement linéaire s. c. s. de f , borné sur B_ℓ . Il existe deux réels a et $b > 0$, tels que $-a\ell \leqslant g \leqslant b\ell$. Par suite, $g = 0$ sur $\ell^{-1}(0)$, de sorte que g est entièrement connue sur $\mathcal{E}_g(K) \subset \widetilde{T}_\ell \cup \ell^{-1}(0)$. Comme K est profilé, g est unique.

<u>Existence</u> : Prenons f s. c. s., comme indiqué. Comme f est bornée sur T_ℓ , on peut supposer que $0 \leqslant f \leqslant 1$. Pour tout entier n , soit

$$G_k^n = \{x \in T_\ell \mid f(x) \geqslant \frac{k}{n}\} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n) \quad .$$

G_k^n est un fermé facial, de sorte que, par définition, il existe une face fermée complémentable F_k^n de K , telle que $F_k^n \cap T_\ell = G_k^n$. Considérons la fonction

$$f_n = \frac{1}{n}\left(\sum_0^n \ell_{F_k^n}\right) \quad .$$

Cette fonction est linéaire s. c. s., et vérifie l'inégalité $0 \leqslant f_n \leqslant \ell$, d'après le lemme 45. De plus, pour $x \in T_\ell$, on a $f_n(x) = \frac{k+1}{n}$, dès que $\frac{k}{n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{n}$, de sorte que

(47) $$0 \leqslant f_n - f \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{sur} \quad T_\ell \quad .$$

Vérifions que $\inf(f_n , f_m) \geqslant f_{nm}$ $(\forall\, n , m \in \underset{\sim}{N})$. Puisque K est profilé, il suffit de le vérifier sur $\mathcal{E}_g(K)$. Sur T_ℓ , cette inégalité est facile à vérifier. Sur $\ell^{-1}(0)$, c'est trivialement vrai, puisque $f_n = 0$ dessus $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$. C'est donc vrai sur $\mathcal{E}_g(K) \subset \widetilde{T}_\ell \cup \ell^{-1}(0)$. Ainsi, la suite (f_n) $(n \in \underset{\sim}{N})$ est filtrante décroissante. Sa limite $\bar{f}$ est linéaire et s. c. s., et vérifie $0 \leqslant \bar{f} \leqslant \ell$. De plus, l'inégalité (47) montre que $\bar{f}$ est égale à f sur T_ℓ .

Pour terminer, prenons pour f une fonction AA-facialement continue et bornée sur T_ℓ . D'après ce qu'on vient de voir, f se prolonge en une fonction f_1 (resp. f_2) dans $L_s(K)$ (resp. $-L_s(K)$) bornée sur B_ℓ . Comme dans la démonstration d'unicité ci-dessus, on voit que $f_1 = f_2$ sur $\mathcal{E}_g(K)$, donc que $f_1 = f_2$ sur K , puisque K est profilé.

<u>Généralisation</u> 48. - Soient K un cône profilé, et B_ℓ une pseudo-base de K . On dit qu'une face fermée F de K est <u>ℓ-parallélisable</u>, si la fonction $\ell_F = \hat{f}$ est linéaire, où f est la fonction égale à ℓ sur F , et à 0 ailleurs. Une face fermée est complémentable si, et seulement si, elle est ℓ-parallélisable pour

toute $\ell \in L_c(K)^+$, $\ell \neq 0$. D'après la proposition 17, ℓ_F est nulle sur F' , et il est facile de voir que c'est la seule fonction de $L_s(K)^+$ vérifiant les conditions du lemme 45. Soit maintenant une famille $\mathfrak{F}$ de faces ℓ-parallélisables de K , stable par intersection quelconque et par somme finie. La trace des ensembles de $\mathfrak{F}$ sur T_ℓ définit l'ensemble des fermés d'une topologie sur T_ℓ , dite topologie faciale. En reprenant point par point la démonstration du théorème 46, on voit que toute fonction facialement s. c. s. (resp. continue) sur T_ℓ se prolonge de manière unique en une fonction de $L_s(K)$ (resp. de $L_c(K)$) bornée sur T_ℓ . Ceci étend de manière naturelle le théorème 3.2 de [11].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik M.). - On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, Math. Scand., t. 17, 1965, p. 169-176.

[2] ALFSEN (Erik M.) and ANDERSEN (T. B.). - Split faces of compact convex sets, Proc. London math. Soc., t. 21, 1970, p. 415-442.

[3] ASIMOW (L.) and ELLIS (A. J.). - Facial decomposition of linearly compact simplexes and separation of functions on cones, Pacific J. of Math., t. 34, 1970, p. 301-309.

[4] BEDNAR (J. Bee). - Facial characterizations of ordered Banach spaces which are abstract (L)-spaces (à paraître).

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 1-2. 2e édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[6] CHOQUET (Gustave). - Lectures on analysis, Volume II. - New York, W. A. Benjamin, 1969.

[7] GOULLET de RUGY (Alain). - Caractère réticulé de certains cônes de fonctions linéaires sur un cône convexe décomposable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 5, 24 p.

[8] GOULLET de RUGY (Alain). - Faces complémentables dans un simplexe, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 6, 21 p.

[9] GOULLET de RUGY (Alain). - Géométrie des simplexes. - Paris, C. D. U. et S. E. D. E. S., 1968 (Collection Analyse fonctionnelle, 1).

[10] GOULLET de RUGY (Alain). - La théorie des cônes biréticulés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 21, 1971 (à paraître).

[11] GOULLET de RUGY (Alain). - Faces parallélisables et topologies faciales sur l'espace des états d'une algèbre stellaire, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 376-379.

[12] GOULLET de RUGY (Alain). - La topologie AA-faciale et son utilisation dans la théorie des cônes biréticulés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 319-322.

[13] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 9, 3 p.

[14] PERDRIZET (François). - Espaces de Banach ordonnés et idéaux, J. Math. pures et appl., t. 49, 1970, p. 61-98.

[15] PERDRIZET (F.) et COMBES (F.). - Certains idéaux dans les espaces vectoriels ordonnés, J. Math. pures et appl., t. 49, 1970, p. 29-59.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Alain GOULLET de RUGY
Att. Rech. CNRS
10 parc du Château
78 - LOUVECIENNES