Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Robert Phelps

Histoire d'un théorème de Bessaga et Pełczynski

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 2 (1969-1970), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 16, 7 p.

16 avril 1970

HISTOIRE D'UN THÉORÈME DE BESSAGA ET PEŁCZYNSKI

par Robert PHELPS

Ce qui suit est un exposé, sans démonstrations, des résultats liés au théorème, de type Krejn-Milman, de BESSAGA et PEŁCZYNSKI [2]. Nous commencerons par le travail de M. RIEFFEL [11] sur le théorème de Radon-Nikodym pour les mesures à valeurs vectorielles, où il a introduit la notion suivante :

DÉFINITION. - *Soient* E *un espace normé réel, et* K *un sous-ensemble de* E. *On dit que* K *est* dentable, *si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $x \in K$ *tel que* x *n'appartienne pas à l'enveloppe convexe fermée* $\overline{co}(K \setminus N_\varepsilon(x))$ *de* K, *moins la boule* $N_\varepsilon(x)$ *de rayon* ε *et de centre* x.

Cette notion géométrique fut utilisée dans un théorème généralisant le théorème de Radon-Nikodym aux mesures à valeurs vectorielles :

THÉORÈME (RIEFFEL [11]). - *Soient* (X, S, μ) *un espace mesurable* σ-*fini,* E *un espace de Banach réel,* $m : S \to E$ *une mesure sur* S *à valeurs dans* E. *Il existe une application* $f : X \to E$, *mesurable et intégrable au sens de Bochner, telle que*

$$m(s) = \int_s f\, d\mu \qquad (s \in S) \quad ,$$

si, et seulement si :

(i) $\mu(s) = 0$ *entraîne* $m(s) = 0$, $\forall\, s \in S$;

(ii) *La variation totale de* m *est finie, et* :

(iii) *"L'image moyenne" de* m, *dans* E, *est dentable à* ε-*près, c'est-à-dire que, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $s \in S$, *où* $\mu(s) < \infty$, *il existe* $t \subset s$, $t \in S$, *tel que* $\mu(s \setminus t) < \varepsilon$, *et*

$$K_t = \{m(t')/\mu(t') \ ; \ t' \in s \ , \ t' \subset t \ , \ \mu(t') > 0\}$$

est dentable.

R. S. PHILLIPS [10] a démontré qu'il suffit d'avoir (i), (ii), et :

(iii)' *L'image moyenne de* m *dans* E *est faiblement compacte (à* ε-*près).*

Comme l'a observé RIEFFEL, chaque ensemble relativement compact est dentable, mais il n'a pas résolu le problème suivant : Est-ce que chaque ensemble relativement faiblement compact est dentable ? C'est-à-dire, est-ce que son théorème contient le théorème de Phillips ? Il a cherché des descriptions convenables des ensembles dentables, montrant, par exemple, qu'un ensemble K est dentable si $\overline{co}\, K$ est dentable, et que chaque point extrémal d'un ensemble compact convexe K est un point grignotable, c'est-à-dire :

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \qquad x \notin \overline{co}(K \setminus N_\varepsilon(x)) \ .$$

De plus, il a démontré que, pour tout ensemble Γ, chaque borné dans $\ell^1(\Gamma)$ est dentable. En fait, il l'a fait sans avoir trouvé de points grignotables, ce qui l'a conduit au problème suivant : Chaque ensemble convexe fermé borné de ℓ^1, contient-il au moins un point extrémal ? LINDENSTRAUSS a résolu ce problème d'une manière surprenante :

THÉORÈME (LINDENSTRAUSS [6]). - Toute partie bornée convexe et fermée dans ℓ^1 est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

Sa démonstration utilise le fait qu'il suffit de montrer qu'un tel ensemble contient un point extrémal au moins ; pour ceci, il a employé un théorème de Bishop-Phelps, mais R. BOURGIN a noté qu'il y a une démonstration géométrique élémentaire courte.

Le résultat de LINDENSTRAUSS a frappé BESSAGA et PEŁCZYNSKI, qui ont adroitement prouvé que c'est vrai pour tout espace dual séparable :

THÉORÈME (BESSAGA-PEŁCZYNSKI [2]). - Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable. Alors chaque ensemble convexe borné et fermé (pour la topologie de la norme) dans E' est identique à l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

On sait maintenant, d'après un théorème de Kadec, que tous les espaces de Banach séparables sont homéomorphes. Mais, si KADEC et KLEE ont démontré l'existence d'un homéomorphisme bien spécifique entre deux espaces de Banach séparables duaux (non linéaire !), BESSAGA et PEŁCZYNSKI ont plutôt utilisé cet homéomorphisme pour transférer la démonstration de LINDENSTRAUSS au cas général.

Nous passons maintenant à un résultat entièrement différent.

THÉORÈME (RYLL-NARDZEWSKI [12]). - Soient K un convexe faiblement compact d'un e. l. c., et Γ un semi-groupe d'applications affines et faiblement continues de K dans lui-même, tel que

$$\forall\, x \neq y \in K , \qquad 0 \notin \overline{\{\gamma(x) - \gamma(y) \ ; \ \gamma \in \Gamma\}} \ .$$

Alors il existe un point fixe commun pour les éléments de Γ .

Ce théorème s'applique pour montrer, par exemple, l'existence d'une moyenne invariante sur l'ensemble des faiblement presque-périodiques. La démonstration utilise des théorèmes ergodiques aléatoires. J. KELLEY a noté une liaison entre ce théorème et certaines propriétés des points extrémaux de l'ensemble K (pour un espace de Banach), et indépendamment, NAMIOKA a développé ce thème, aboutissant, avec ASPLUND, à une démonstration géométrique du théorème de Ryll-Nardjewski. Leur lemme central est le suivant :

LEMME (NAMIOKA-ASPLUND [8]). - Soient K un convexe séparable faiblement compact d'un e. l. c. E , et p une semi-norme continue sur E . Alors, $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe C fermé convexe contenu dans K , tel que $C \neq K$, et $(p\text{-diam})(K \setminus C) \leq \varepsilon$.

La démonstration utilise le théorème de Krejn-Milman et la propriété de Baire, et la démonstration du théorème lui-même utilise le théorème de Markov-Kakutani.

En réfléchissant davantage sur ce sujet, NAMIOKA est arrivé à une idée commune à plusieurs résultats : c'est la question d'existence, dans un convexe faiblement compact K , de points extrémaux, où l'application identique est continue, de la topologie faible dans la topologie forte. (Evidemment, si K est fortement compact, alors cette application est continue partout.) Un tel point a la propriété d'admettre des voisinages faibles dans K de diamètre arbitrairement petit. NAMIOKA a prouvé le théorème suivant :

THÉORÈME (NAMIOKA [9]). - Soient E un espace de Banach tel que E' est séparable, K un convexe $\sigma(E' , E)$-fermé dans E' , et Z l'ensemble des points de continuité de l'application identique $(K , \sigma(E' , E))$ dans $(K$, norme$)$. Alors $Z \cap \operatorname{ext} K$ est faiblement dense dans $\operatorname{ext} K$.

(Le coeur de sa démonstration est un raffinement du lemme de Namioka-Asplund, et l'utilisation du théorème de Choquet prouvant que $\operatorname{ext} K$ est un espace de Baire.)

En fait, NAMIOKA a démontré un résultat plus général que celui-ci, mais dont l'énoncé est assez compliqué. Ce théorème donne facilement deux corollaires intéressants.

COROLLAIRE 1 : Le théorème de Bessaga-Pełczynski lui-même.

En effet, soit C un convexe borné normiquement fermé dans E' (séparable). Soit K l'adhérence de C pour la topologie $\sigma(E' , E)$. Alors K est $\sigma(E' , E)$-compact, donc il existe au moins un point $x \in \operatorname{ext} K$ tel que x admette des voisinages faibles dans K de diamètre arbitrairement petit, c'est-à-dire, $\forall\ \varepsilon > 0$,

$N_\varepsilon(x) \cap K$ est un voisinage faible de x dans K. On a donc $C \cap N_\varepsilon(x) \cap K \neq \emptyset$, $\forall\, \varepsilon > 0$, c'est-à-dire $x \in C$. Evidemment, $x \in \text{ext}\, C$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2. - Chaque ensemble borné de E' (séparable) est dentable.

On peut supposer que l'ensemble est un convexe borné C, fermé pour la topologie de la norme. Avec la notation ci-dessus, on a $x \in \text{ext}\, K$, tel que $N_\varepsilon(x) \cap K$ est un voisinage faible de x, $\forall\, \varepsilon > 0$. Mais on sait qu'il existe une tranche ouverte T de K, contenant x et contenue dans $N_\varepsilon(x)$, donc $x \notin (K \setminus T) \supset (C \setminus T)$.

On connaissait depuis longtemps un type de point extrémal avec la propriété de Namioka. Donnons d'abord une définition :

DÉFINITION. - Soient K un convexe d'un e. l. c. E, et $x \in K$. On dit que x est un point exposé de K, s'il existe $f \in E'$ tel que $\sup f(K) = f(x)$ et $f(y) < f(x)$, $\forall\, y \in K$, $y \neq x$.

Même dans les espaces de dimension 2, les points exposés peuvent constituer un sous-ensemble propre de l'ensemble des points extrémaux.

DÉFINITION. - Soient K un ensemble convexe dans un espace normé, et x un point de K. On dit que x est fortement exposé, s'il existe $f \in E'$ tel que

$$\sup f(K) = f(x) \quad ,$$

$$\text{diam}\{y \in K \ ; \ f(y) \geq f(x) - \delta\} \to 0 \ , \qquad \text{si} \ \delta \to 0 \ .$$

Il est évident que chaque point fortement exposé est exposé, et réciproquement si K est compact. Mais si K est faiblement compact, on peut trouver facilement des exemples de points exposés, mais non fortement exposés.

THÉORÈME (LINDENSTRAUSS [5]). - Chaque convexe faiblement compact, dans un espace de Banach séparable, est égal à l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

Une petite amélioration de sa méthode a permis à LINDENSTRAUSS d'établir un meilleur résultat. Donnons d'abord une définition.

DÉFINITION. - La norme $\|\ldots\|$ d'un espace de Banach est dite localement uniformément convexe (l. u. c.), si

$$(\|x_n\| = 1 = \|x\| \ \text{ et } \ \|x_n + x\| \to 2) \qquad \text{entraîne} \qquad (\|x_n - x\| \to 0) \ .$$

(On dit aussi que E est l. u. c.)

THÉORÈME (LINDENSTRAUSS [7]). - Soit E un espace de Banach l. u. c. Alors chaque ensemble convexe et faiblement compact dans E est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

D'après un théorème de Kadec, chaque espace de Banach séparable admet une norme, équivalente à l'originale, qui est l. u. c. Comme la propriété d'être fortement exposé est indépendante de la norme, le second théorème de Lindenstrauss ci-dessus entraîne le premier. Mais, on a trouvé très récemment le résultat suivant :

THÉORÈME (TROJANSKIJ [13]). - Soit E un espace de Banach contenant un ensemble faiblement compact total (sur E'). Alors E admet une norme équivalente qui est l. u. c.

COROLLAIRE. - Soient E un espace de Banach, et K un convexe faiblement compact. Alors K est égal à l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés.

On applique le théorème de Trojanskij au sous-espace engendré par K .

Ceci entraîne que le théorème de Rieffel contient le théorème de Phillips.

Quand BISHOP a entendu parler du théorème de Bessaga-Pełczynski, il a essayé d'en donner une démonstration "constructive", et il prétend avoir échoué, mais il a réussi à donner une démonstration "non constructive" (donc inédite !) du théorème suivant :

THÉORÈME (BISHOP (1967)). - Soient E un espace normé tel que E' soit séparable, et K un convexe borné et fortement fermé dans E' . Alors K est égal à l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points "faiblement fortement exposés" (c'est-à-dire fortement exposés au moyen d'une forme linéaire provenant de E).

Ce résultat donne évidemment le théorème de Bessaga-Pełczynski et le théorème de Namioka concernant les ensembles dentables. On peut trouver une autre démonstration chez ASPLUND [1], comme corollaire de ses travaux sur les fonctions convexes différentiables.

Il reste une question ouverte intéressante liée au théorème de Bessaga-Pełczynski. Soient E' un espace dual de Banach séparable, et K un ensemble convexe borné et fortement fermé dans E' . Existe-t-il, pour tout $x' \in K$, une mesure borélienne régulière de probabilité μ sur K , telle que

$$\mu(\text{ext}\, K) = 1 \qquad \text{et} \qquad \langle x' , x\rangle = \int \langle y' , x\rangle \, d\mu(y') \ , \quad \forall\, x \in E \ ?$$

Il y a plusieurs résultats incomplets dans cette direction (cf. KHURANA [4] et

R. BOURGIN [3]). R. BOURGIN a démontré que l'ensemble ext K est mesurable, dans le sens de CARATHEODORY, pour une telle mesure μ , mais on ne sait pas encore si ext K est un ensemble borélien.

Nous signalons encore deux autres problèmes :

PROBLÈME 1 (RIEFFEL).

(a) Déterminer les espaces de Banach dans lesquels tout ensemble borné est dentable.

(b) Existe-t-il un convexe fermé borné (dans un espace de Banach) qui soit dentable, mais qui n'admette aucun point fortement exposé ?

PROBLÈME 2 (LINDENSTRAUSS). - Soit E' contenant un ensemble total faiblement (c'est-à-dire $\sigma(E' , E'')$-) compact. Est-il vrai que chaque convexe borné et fortement fermé est égal à l'enveloppe convexe fortement fermée de ses points extrémaux (exposés, fortement exposés) ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASPLUND (Edgar). - Fréchet differentiability of convex functions, Acta Math., Uppsala, t. 121, 1968, p. 31-47.

[2] BESSAGA (C.) and PEŁCZYNSKI (A.). - On extreme points in separable conjugate spaces, Israel J. of Math., t. 4, 1966, p. 262-264.

[3] BOURGIN (R.). - Barycenters of measures on certain non-compact convex sets, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[4] KHURANA (S. S.). - Measures and barycenters of measures on convex sets in locally convex spaces, I and II, J. of math. Anal. and Appl., t. 27, 1969, p. 103-115 ; et t. 28, 1969, p. 222-229.

[5] LINDENSTRAUSS (J.). - On operators which attain their norm, Israel J. of Math., t. 1, 1963, p. 139-148.

[6] LINDENSTRAUSS (J.). - On extreme points in ℓ_1 , Israel J. of Math., t. 4, 1966, p. 59-61.

[7] LINDENSTRAUSS (J.). - Weakly compact sets and the Banach spaces they generate, Proceedings of symposium on infinite dimensional topology [1967. Baton Rouge] (à paraître).

[8] NAMIOKA (I.) and ASPLUND (E.). - A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, Bull. Amer. math. Soc., t. 73, 1967, p. 443-445.

[9] NAMIOKA (I.). - Neighbourhoods of extreme points, Israel J. of Math., t. 5, 1967, p. 145-152.

[10] PHILLIPS (R. S.). - On weakly compact subsets of a Banach space, Amer. J. of Math., t. 65, 1943, p. 108-136.

[11] RIEFFEL (M. A.). - Dentable subsets of Banach spaces, with application to a Radon-Nikodym theorem, Functional analysis, Proceedings of a conference held at Irvine, 1966, p. 71-77. - Washington, Thompson Book Company ; London, Academic Press, 1967.

[12] RYLL-NARDZEWSKI (C.). - On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces, Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability [1965/66. Berkeley], Vol. II, part I. - Berkeley, University of California Press.

[13] TROJANSKIJ (S.). - On locally uniformly convex and differentiable norms in certain unseparable Banach spaces, Studia Math., Warszawa, t. 37 (à paraître).

(Texte reçu le 22 septembre 1970)

Robert PHELPS
Mathematical Department
University of Washington
SEATTLE, Was. 98105
(Etats-Unis)