Séminaire Choquet.
Initiation à l’analyse

Yves Bamberger

Surfaces minima avec obstacles

Séminaire Choquet. Initiation à l’analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 13, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A4_0>

SURFACES MINIMA AVEC OBSTACLES

par Yves BAMBERGER

Introduction. - Nous nous proposons d'étudier le problème de Plateau dans $\underset{\sim}{R}^n$ avec des conditions unilatérales :

PROBLÈME. - Etant donnés un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$, une fonction ψ définie sur Ω à valeurs réelles, une fonction f définie sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω à valeurs réelles, trouver des conditions suffisantes pour qu'il existe une fonction u unique de classe C^1 définie sur Ω à valeurs réelles, telle que :

(1) $u = f$ sur $\partial\Omega$;

(2) $u \geqslant \psi$ sur Ω ;

u rend minimum l'intégrale d'aire

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, d\lambda \quad ,$$

sous les conditions (1) et (2).

Les théorèmes 1, 2, 3 et 4 ont été énoncés par MIRANDA. Leurs démonstrations, mise à part celle du théorème 2 qui se trouve dans un texte non publié de MIRANDA, ne se trouvent pas, à notre connaissance, dans la littérature.

L'idée de la résolution du problème est de considérer les surfaces minima comme des frontières d'ensemble. Cette idée est due à De GIORGI, et se trouve dans le théorème suivant relatif au cas sans obstacle :

THÉORÈME 0 (De GIORGI). - Soient un ensemble localement de périmètre fini (*) $E \subset \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, et un ensemble borné L. On note

$$\mathfrak{M} = \{M \subset \underset{\sim}{R}^n \ ; \ M \text{ localement de périmètre fini} \ ; \ M - L = E - L\} .$$

Il existe $M \in \mathfrak{M}$ dont la frontière est d'aire minimum sur L.

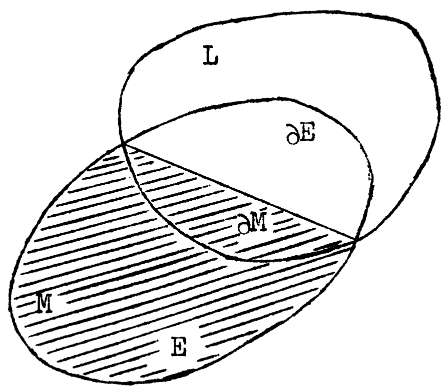


fig. 1 (M est bistré)

(*) Voir, au § 1, la définition des ensembles localement de périmètre fini.

On dit que M est minimal sur L (fig. 1). Dans le cas avec obstacle, nous imposons

$$M \supset A \quad ,$$

A désignant l'obstacle (fig. 2).

Dans le cas sans obstacle, De GIORGI a aussi établi un résultat de régularité :

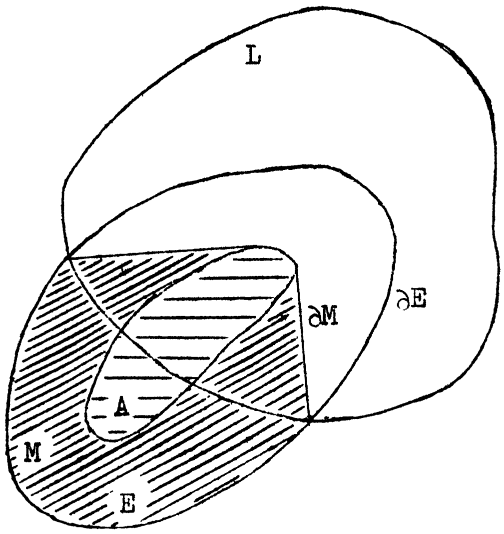


fig. 2

THÉORÈME 0' (De GIORGI). - Sous les hypothèses du théorème 0, et si L est ouvert, il existe un ouvert $L' \subset L$ tel que $\partial M \cap L'$ soit une variété analytique de dimension $(n-1)$, et

$$H_{n-1}[\partial M \cap (L - L')] = 0$$

(H_{n-1} est la $(n-1)$-mesure de Hausdorff sur $\mathbb{R}^n$).

On a établi (voir [15], [4], [1], [14]) que $L = L'$ pour $n \leqslant 7$, mais ce résultat est faux pour $n \geqslant 8$ ([2]).

Signalons que NITSCHE [12] a résolu un problème analogue au problème posé, pour $n = 2$, et lorsque ψ est définie, non sur Ω , mais sur un segment fermé de Ω :

THÉORÈME (NITSCHE). - Soit Ω un ouvert borné convexe du plan $\mathbb{R}^2$ (muni d'un repère orthonormé xOy), symétrique par rapport à Ox , et contenant le segment $\sigma_0 = \{(x , y) \; ; \; |x| \leqslant a \, , \; y = 0\}$. On note

$$\Omega_0 = \Omega - \sigma_0 \; , \qquad [c_1 \, , \, c_2] = \overline{\Omega} \cap \{y = 0\} \quad .$$

Soit $x \to f(x)$ une fonction concave positive définie sur σ_0 , et nulle en ses extrémités.

Il existe une fonction $z = u(x , y)$ continue sur $\overline{\Omega}$, positive sur Ω , analytique réelle sur Ω , qui minimise l'intégrale d'aire

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} \, dx \, dy \quad ,$$

sous les conditions

$$\begin{cases} u = 0 \ \text{sur} \ \partial\Omega \; , \\ u(x , 0) \geqslant f(x) \; , \quad \forall \, x \in \sigma_0 \quad . \end{cases}$$

Cette fonction vérifie en outre :

(a) $u(x\,,\,0) = f(x)$ sur un segment fermé strictement inclus dans σ_0 ;
(b) $u(x\,,\,0) > f(x)$ ailleurs.

Le premier paragraphe rappelle certains résultats, et fixe les notations. Le second paragraphe étudie la généralisation du théorème 0 au cas "avec obstacle" ; le paragraphe 3 celle du théorème 0'. Le cas non paramétrique est l'objet du paragraphe 4. Enfin le paragraphe 5 donne une réponse au problème posé initialement.

1. Notations. Rappels.

1° La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est notée $|.|$, la distance euclidienne $d(.\,,\,.)$. On note $B_r(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r . La mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ est notée λ_n ou λ .

2° On note $C^{1,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 holdériennes d'ordre α $(\alpha \leqslant 1)$, i. e. les fonctions f de $C^1(\Omega)$ telles que

$$\exists\, k > 0\,, \qquad \forall\, i = 1\,,\,\dots\,,\,n\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(y)\right| \leqslant k d^{\alpha}(x\,,\,y) \quad .$$

3° Un ensemble mesurable M de $\mathbb{R}^n$ est dit localement de périmètre fini (l. p. f.), si les dérivées partielles du 1er ordre au sens des distributions, de sa fonction caractéristique φ_M , sont des mesures (pour plus de détails, cf. [8] et [3]).

On note $D_i\,\varphi_M$ la i-ième dérivée partielle, $D\varphi_M$ la mesure vectorielle de composantes $(D_i\,\varphi_M)_{i=1,\dots,n}$.

Le périmètre de M sur un compact K (qui est égal à l'aire de Lebesgue de l'intersection avec K de la frontière de M , notée ∂M) est la variation totale de $D\varphi_M$ sur K . On le note

$$\int_K |D\varphi_M| \quad .$$

On note $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des parties l. p. f.

4° L'espace des mesures vectorielles de dimension n étant muni de la topologie vague, l'application qui, à une mesure μ associe sa variation totale sur un compact fixe quelconque, est s. c. i.

5° On dit qu'un ensemble l. p. f. M admet une normale notée $\nu(x)$ en un point $x \in \partial M$, si

$$\lim_{r\to 0} \left(\int_{B_r(x)} D\varphi_M\right) / \left(\int_{B_r(x)} |D\varphi_M|\right)$$

existe. On note

$$\nu(x) = \frac{D\varphi_M}{|D\varphi_M|}(x) \quad .$$

6° Enonçons une propriété des ensembles l. p. f. :

PROPOSITION 1. - Soient M et $N \in BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, $x \in \underset{\sim}{R}^n$, $r > 0$. Si $M \cap \partial B_{r,x} = N \cap \partial B_{r,x}$,

$$\int_{\overline{B}_{r,x}} D\varphi_M = \int_{\overline{B}_{r,x}} D\varphi_N \quad .$$

2. Théorème d'existence.

THÉORÈME 1. - $\forall A \subset \underset{\sim}{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, $\forall E \subset BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, $E \supset A$, $\forall L \subset \underset{\sim}{R}^n$, L borné, il existe un ensemble M l. p. f. qui, sous les conditions :

(1) $M \supset A$,
(2) $M - L = E - L$,

minimise sur L le périmètre

$$\int_L |D\varphi_M| \quad .$$

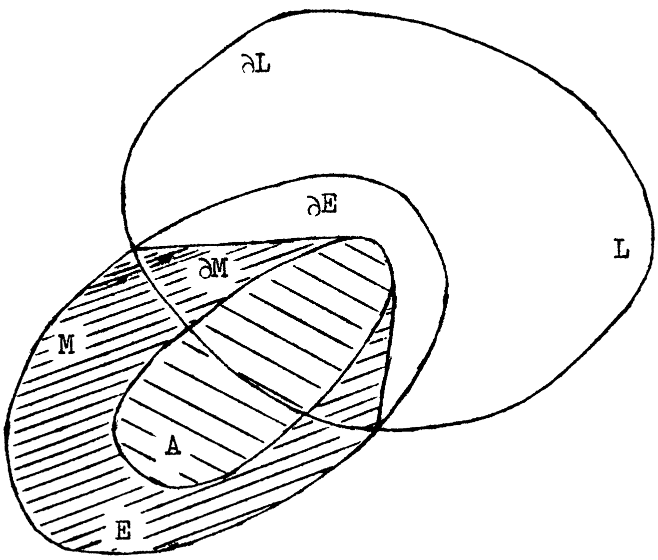


fig. 3

Autrement dit, $\forall P \in BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, avec $P \supset A$, $P - L = E - L$,

$$\int_L |D\varphi_M| \leqslant \int_L |D\varphi_P| \quad .$$

Démonstration (par compacité). - Munissons $BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$ de la topologie L^1_{loc} définie sur l'écart :

$$(P , Q) \to \Delta(P , Q) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} |\varphi_P - \varphi_Q| \, d\lambda \; .$$

Posons

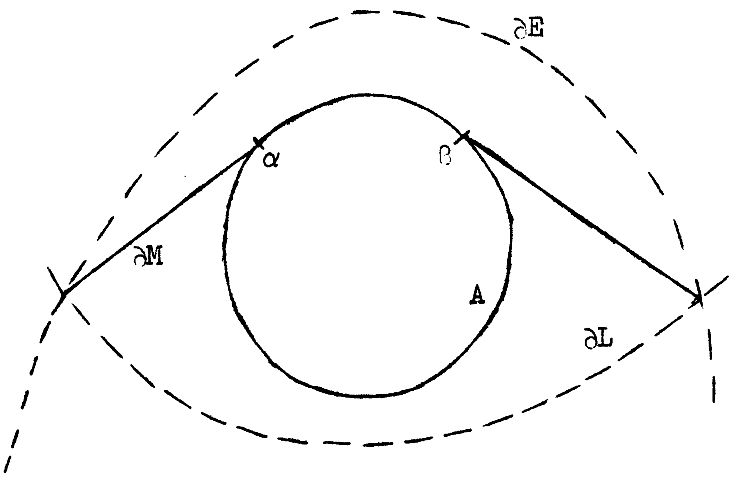
$$\mathcal{P} = \left[P \in BV(\underset{\sim}{R}^n) , \quad \text{avec} \begin{cases} (1) & P \supset A , \\ (2) & P - L = E - L , \\ (3) & \int_L |D\varphi_P| \leqslant \int_L |D\varphi_E| \end{cases} \right] .$$

$\mathcal{P}$ n'est pas vide, car il contient E . L'ensemble des fonctions caractéristiques des éléments de $\mathcal{P}$ est, d'après la condition (3), un ensemble borné de fonctions dans L^1_{loc} , ainsi que leurs dérivées partielles premières au sens des distributions : c'est donc ([6], chapitre VI, remarque suivant le théorème XVII) un ensemble relativement compact de $L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$. C'est aussi un fermé. $\mathcal{P}$ est donc compact.

Comme l'application $P \to \int_L |D\varphi_P|$ est s. c. i. (cf. § 1), elle atteint son minimum sur $\mathcal{P}$.

3. Propriétés de régularité.

Les difficultés découlent du fait que ∂M peut toucher ∂A . Nous sommes donc conduits à imposer à ∂A des conditions de régularité. Dans le cas général, on ne peut cependant pas espérer atteindre la classe C^2 (cf. figure ci-contre).



A = disque du plan $\underset{\sim}{R}^2$

∂A est de classe C^∞

∂M est représenté en trait continu et n'est pas de classe C^2 en α et β

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (MIRANDA). - Soient L un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$ $(n \leqslant 7)$, $A \subset \underset{\sim}{R}^n$ tel que $\partial A \cap L$ soit une variété de dimension $n-1$ de classe $C^{1,\alpha}$ $(\alpha \leqslant 1)$.

Si $M \in BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, contient A , et vérifie la propriété (π) :

(π) Pour tout compact $K \subset L$, et tout ensemble l. p. f. E qui contient A et vérifie $E - K = M - K$, on a $\int_L |D\varphi_M| \leqslant \int_L |D\varphi_E|$;

alors $\partial M \cap L$ est une variété de dimension $n-1$ de classe $C^{1,\alpha}$.

La propriété de minimalité est énoncée autrement que ci-dessus en raison des applications ultérieures. La démonstration repose sur le théorème du vecteur normal (cf. par exemple [8], théorème 5.8) :

Soit M un ensemble l. p. f. sur un ouvert L de $\underset{\sim}{R}^n$. Si le champ des vecteurs normaux

$$x \to \frac{D\varphi_M}{|D\varphi_M|}(x)$$

est défini et continu sur $\partial M \cap L$, *alors* $\partial M \cap L$ *est une variété de dimension* $(n-1)$ *et de classe* $\mathcal{C}^1$.

Pour appliquer ce théorème, il faut établir deux lemmes, et utiliser les résultats connus dans le cas des surfaces minima sans obstacle $(A = \emptyset)$.

DÉFINITION. - *Un ensemble est dit* A-minimal *sur* L , *s'il appartient à* $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *s'il contient* A , *et vérifie la propriété* (π) *du théorème* 2.

PROPOSITION 2. - *Soient* $L \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert* $(n \leqslant 7)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *avec* $\partial A \cap L$ *variété de classe* $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ $(\alpha \leqslant 1)$.

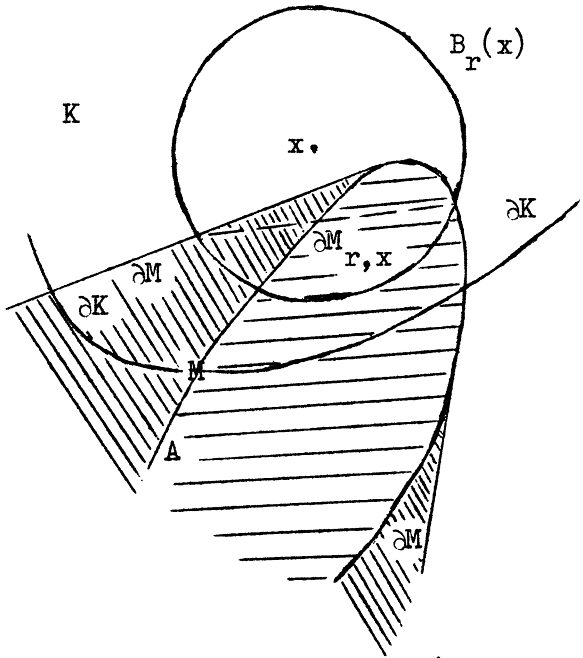
Si M *est* A-*minimal sur* L , *alors, pour tout compact* $K \subset L$, *il existe* $c(A , K)$ *et* $r_0 > 0$ *tels que*

$$\forall\, x \in K , \quad \forall\, r < r_0 , \qquad \left(\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_M| - \int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{x,r}}|\right) \leqslant c(A , K) r^{n-1+2\alpha} ,$$

où $M_{x,r}$ *désigne une solution du problème* :

$$M_{x,r} \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n) , \qquad M_{x,r} - B_r(x) = M - B_r(x) ,$$

$$\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{x,r}}| \quad \textit{minimum} .$$



Démonstration. - K étant compact, il existe r_0 (dépendant uniquement de A et de K) tel que, pour tout x de K et $r < r_0$, $B_r(x) \cap \partial A$ soit le graphe d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$:

$$B_r(x) \cap \partial A = \{y \ ; \ y_i = f(y_1 , \dots , \hat{y}_i , \dots , y_n) , \ (y_1 , \dots , \hat{y}_i , \dots , y_n) \in \Omega\} ,$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, et $f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Nous pouvons supposer qu'il existe un point z de Ω tel que

$$Df(z_1 , \dots , \hat{z}_i , \dots , z_n) = 0 ,$$

et, par suite, $\exists\, c_x > 0$ telle que

$$\forall\ (y_1\ ,\ \dots\ ,\ \hat{y}_i\ ,\ \dots\ ,\ y_n) \in \Omega\ , \qquad |Df(y_1\ ,\ \dots\ ,\ \hat{y}_i\ ,\ \dots\ ,\ y_n)| \leqslant c_x\ r^{\alpha}\ ,$$

et, par compacité,

$$|Df(y_1\ ,\ \dots\ ,\ \hat{y}_i\ ,\ \dots\ ,\ y_n)| \leqslant c(A\ ,\ K)\ r^{\alpha}\ . \tag{1}$$

Par définition de M ,

$$\int_{B_r(x)} |D\varphi_M| \leqslant \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}\cup A}|\ .$$

Donc, pour établir le lemme, il suffit de majorer

$$\psi(r) = \int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{r,x}\cup A}| - \int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{r,x}}|\ .$$

Comme $(M_{r,x} \cup A) \cap \partial B_r(x) \subset M_{r,x} \cap \partial B_r(x)$, il vient

$$\psi(r) \leqslant \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}\cup A}| - \int_{B_r(x)} |D\varphi_{M_{r,x}}|\ ,$$

soit

$$\psi(r) \leqslant \int_{B_r(x)} |D\varphi_A| - \int_{B_r(x)\cap A} |D\varphi_{M_{r,x}}|\ .$$

D'après le théorème 0', et comme $n \leqslant 7$, $\partial M_{r,x} \cap B_r(x)$ est une variété analytique ; il vient

$$\psi(r) \leqslant \int_{\Omega} \{\sqrt{1 + |Df(y_1\ ,\ \dots\ ,\ \hat{y}_i\ ,\ \dots\ ,\ y_n)|^2} - 1\}\ dy_1 \dots d\hat{y}_i \dots dy_n\ ,$$

qui donne le résultat annoncé en utilisant l'inégalité (1).

Nous admettrons la proposition suivante, relative au cas sans obstacle (cf. [10], théorème 5.7) :

PROPOSITION 3. - *Si* $n \leqslant 7$, *si* N *est minimal dans* L , *et si* $B_r(x) \subset L$, *alors*

$$\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_N| - \left|\int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_N\right| \leqslant c(n)\ r^{n+1}\ .$$

Nous pouvons établir que :

LEMME 1. - *Si* $n \leqslant 7$, *si* $L \subset \mathbb{R}^n$ *est ouvert, si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *est tel que* $\partial A \cap L$ *soit une variété de classe* $C^{1,\alpha}$, *et si* M *est* A-*minimal dans* L , *alors, pour tout compact* $K \subset L$, *il existe deux constantes* $r_0 > 0$ *et* $c_1(A\ ,\ K) > 0$ *telles que*

$$\forall\, x \in K\ ,\quad \forall\, r < r_0\ ,\qquad \int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_M| - \left|\int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_M\right| \leqslant c_1(A\ ,\ K)\ r^{n-1+2\alpha}\ .$$

Démonstration. – Par définition de $M_{r,x}$ (même notation que pour la proposition 2),

$$M_{r,x} \cap \partial B_r(x) = M \cap \partial B_r(x)\ .$$

D'après la proposition 1 (§ 1),

$$\int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_M = \int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_{M_{r,x}}\ .$$

Par suite,

$$\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_M| - \left|\int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_M\right|$$

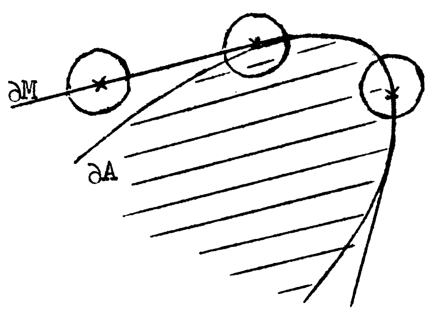
$$= \left\{\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_M| - \int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{r,x}}|\right\} + \left\{\int_{\overline{B_r(x)}} |D\varphi_{M_{r,x}}| - \left|\int_{\overline{B_r(x)}} D\varphi_{M_{r,x}}\right|\right\}\ ,$$

d'où le résultat en appliquant les propositions 2 et 3.

Nous admettrons le second lemme, qui est une extension d'une propriété analogue relative au cas sans obstacle (la démonstration utilise l'inégalité isopérimétrique ; cf. [8], théorème 4.3).

LEMME 2. – n *est quelconque* ; L *et* $A \subset \mathbb{R}^n$; $\partial A \cap L$ *est une variété de classe* $C^{1,\alpha}$ $(\alpha \leqslant 1)$. *Si* M *est* A*-minimal sur* L , *pour tout compact* $K \subset L$, *il existe une constante* $c_2(A\ ,\ K) > 0$ *telle que*

$$\forall\, x \in \partial M \cap K\ ,\quad \forall\, r \in d(x\ ,\ \partial L)\ ,\qquad \int_{B_r(x)} |D\varphi_M| \geqslant c_2(A\ ,\ K)\ r^{n-1}\ .$$



Idée directrice.

1° Dans le cas où $A = \emptyset$, on peut prendre $c_2(A\ ,\ K)$ = volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, c'est-à-dire que l'aire d'une surface minima comprise dans une boule centrée sur elle est supérieure ou égale à l'aire du grand cercle (ce qui se comprend bien).

2° Dans le cas où $A \neq \emptyset$:

- Si $B_r(x) \cap A = \emptyset$, on est ramené au cas précédent ;
- Si $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$, la régularité de A intervient.

Démonstration du théorème 2. - Soient $x \in \partial M \cap L$, $r > 0$. Posons

$$\nu_r(x) = \left(\int_{B_r(x)} D\varphi_M\right) / \left(\int_{B_r(x)} |D\varphi_M|\right) .$$

Il est clair que $|\nu_r(x)| \leq 1$. D'où

(2) $\forall\ x , y \in \partial M \cap L , \quad s , t > 0 , \qquad |\nu_s(x) - \nu_t(y)|^2 \leq 2[1 - \langle \nu_s(x) , \nu_t(y)\rangle]$.

Prenons $B_s(x) \supset B_t(y)$. Il vient

$$a = [1 - \langle \nu_s(x) , \nu_t(y)\rangle] \int_{B_t(y)} |D\varphi_M| = \int_{B_t(y)} |D\varphi_M| - \int_{B_t(y)} \langle \nu_s(x) , D\varphi_M\rangle .$$

D'où successivement

$$a \leq \left(\int_{B_s(x)} |D\varphi_M|\right) - \left(\int_{B_s(x)} \langle \nu_s(x) , D\varphi_M\rangle\right) = \left(\int_{B_s(x)} |D\varphi_M|\right) - \left(|\nu_s(x)|\ \left|\int_{B_s(x)} D\varphi_M\right|\right) ,$$

soit, puisque $\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \leq 2(\alpha - \beta)$, $\alpha , \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$,

(3) $$a \leq 2\left\{\int_{B_s(x)} |D\varphi_M| - \left|\int_{B_s(x)} D\varphi_M\right|\right\} .$$

De (2) et (3), et par application des lemmes 1 et 2, on déduit

$$|\nu_s(x) - \nu_t(y)|^2 \leq 4\,\frac{c_1(A , K)}{c_2(A , K)}\,\frac{s^{n-1+2\alpha}}{t^{n-1}} ,$$

soit finalement

$$|\nu_s(x) - \nu_t(y)| \leq c(A , K)\ \left(\frac{s}{t}\right)^{(n-1)/2} s^{\alpha} ,$$

avec, $\forall\ x , y \in \partial M \cap L$,

(4) $$B_t(y) \subset B_s(x) .$$

Cette relation a deux conséquences :

(a) Le champ des vecteurs normaux $\nu(x) = \lim\limits_{s \to 0} \nu_s(x)$ est défini en tout point $x \in \partial M \cap L$.

Appliquant (4), pour $x = y$, et pour $\frac{s}{2^{p+1}} \leq t \leq \frac{s}{2^p}$, il vient en effet

$$|\nu_s(x) - \nu_t(x)| \leqslant |\nu_s(x) - \nu_{2^p t}(x)| + \dots + |\nu_{2t}(x) - \nu_t(x)|$$
$$\leqslant c(A\,,\,K)\ 2^{(n-1)/2}[s^\alpha + \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{s}{2^p}\right)^\alpha]$$
$$\leqslant c(A\,,\,K)\ (1 - 2^{-\alpha})^{-1}\ 2^{(n-1)/2}\ s^\alpha \quad .$$

Donc $\nu(x) = \lim_{s\to 0} \nu_s(x)$ existe, $\forall\ x \in \partial M \cap L$,

(5) $$|\nu_s(x) - \nu(x)| \leqslant c'(A\,,\,K)\ s^\alpha \quad .$$

(b) Ce champ est continu.

Posons $t = |x - y|$, $s = 2|x - y|$. Appliquons (4) et (5). Il vient

(6) $$|\nu(x) - \nu(y)| \leqslant c''(A\,,\,K)\ |x - y|^\alpha \,, \qquad \forall\ x\,,\,y \in \partial M \cap K \quad .$$

Ces deux résultats permettent d'appliquer le théorème du vecteur normal. La relation (6) donne la propriété höldérienne. Le théorème 2 est établi.

4. Cas non paramétrique.

THÉORÈME 3 (MIRANDA). - Soit Ω un ouvert borné de $\underset{\sim}{R}^n$ $(n \leqslant 6)$. Si $\partial\Omega$ est une variété lipschitzienne de dimension $(n - 1)$, et si $g \in L^1(\partial\Omega)$, et $\psi \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$ $(\alpha \leqslant 1)$ est bornée, alors il existe une fonction u dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$, solution du problème :

(1) $u \geqslant \psi$ sur Ω ;

(2) $I(u)$ minimum avec

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\ d\lambda + \int_{\partial\Omega} |u - g|\ dH_{n-1} \quad .$$

La trace de u sur $\partial\Omega$ est bien définie d'après le lemme suivant (que nous admettrons) :

LEMME 1 (GAGLIARDO [5]). - Soit Ω un ouvert borné de $\underset{\sim}{R}^n$, dont la frontière $\partial\Omega$ est une variété lipschitzienne de dimension $n - 1$. On note $W_1(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^1(\Omega)$, dont les dérivées partielles au sens élémentaire sont dans $L^1(\Omega)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction g , définie sur $\partial\Omega$, soit la trace d'une fonction u de $W_1(\Omega)$, est que $g \in L^1(\partial\Omega)$.

La démonstration du théorème 3 utilise la propriété suivante des ensembles l. p. f. :

LEMME 2 (cf. [9]). - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ (n quelconque),

$$E \subset \Omega \times \mathbb{R} .$$

On note $(x , y) \to \varphi_E(x , y)$, $(x , y) \in \Omega \times \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de E . Si, pour tout compact $K \subset \Omega$,

$$\int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_E| < +\infty ,$$

et si, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi_E(x , y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to-\infty} \varphi_E(x , y) = 1 ,$$

alors il existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que l'ensemble

$$N = \{(x , y) ; \ x \in \Omega , \ y < u(x)\}$$

vérifie :

(1) $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_E(x , y) - \varphi_N(x , y)| \, dy \in L^1_{loc}(\Omega)$,

et, sur tout compact $K \subset \Omega$:

(2) $\int_K dx \int_{\mathbb{R}} |\varphi_E(x , y) - \varphi_N(x , y)| \, dy = 0$,

(3) $\int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_N| \leq \int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_E|$,

(4) $\lambda[\mathrm{pr}(E \Delta N) \cap K] \leq \frac{1}{2} [\int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_E|]^{\frac{1}{2}} [\int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_E| - \int_{K\times\mathbb{R}} |D\varphi_N|]^{\frac{1}{2}}$, où $\mathrm{pr}(E \Delta N) = \{x ; \int \varphi_{E\Delta L}(x , y) \, dy > 0\}$.

Démonstration du théorème 3. - Par un lemme de Gagliardo analogue au lemme 1, on peut étendre f à $\mathbb{R}^n$ tout entier, de telle sorte que $f \in W^1(\mathbb{R}^n)$, donc, en particulier, $\int_{\mathbb{R}^n} |Df| \, d\lambda < +\infty$.

Posons

$$\mathcal{E} = \{E ; \ E \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)\} ,$$

avec

$$\begin{cases} E - \Omega \times \mathbb{R} = \{(x , y) ; \ x \in \mathbb{R}^n - \Omega , \ y \leq f(x)\} , \\ E \supset A = \{(x , y) ; \ x \in \Omega , \ y \leq \psi(x)\} . \end{cases}$$

Par un raisonnement de compacité analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 1, on montre qu'il existe un élément E de $\mathcal{E}$ minimisant $\int_{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} |D\varphi_E|$. Cet ensemble E est A-minimal sur $\Omega \times \mathbb{R}$, donc vérifie les conditions d'application du théorème de régularité (théorème 2). Par suite, $\partial E \cap \Omega$ est une variété de classe $C^{1,\alpha}$, de dimension $(n-1)$.

D'après le lemme 2 énoncé ci-dessus et la propriété de minimalité, il est clair que

$$E \cap (\Omega \times \underset{\sim}{R}) = \{(x, y) ; \quad x \in \Omega , \quad y \leqslant u(x)\} ,$$

où $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$. De plus,

$$\int_{(\overline{\Omega}\times\underset{\sim}{R})\cap\complement A} |D\varphi_M| = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, d\lambda + \int_{\partial\Omega} |u - f|\, dH_{n-1} .$$

5. Résolution du problème : Un cas d'unicité.

Nous allons donner une condition suffisante pour que la fonction u, trouvée au théorème 3, soit unique et égale à f sur $\partial\Omega$.

DÉFINITION. - Un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$ est dit strictement convexe, si, $\forall x \in \partial\Omega$, il existe un demi-espace S_x de $\underset{\sim}{R}^n$ tel que :

(1) $\forall x , \quad x \in S_x , \quad S_x \supset \Omega$;

(2) $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} \sup\limits_{y\in\Omega} |x - y|^2 / d(y , S_x) < +\infty$.

THÉORÈME 4 (MIRANDA). - On se donne un ouvert borné strictement convexe $\Omega \subset \underset{\sim}{R}^n$, $f \in C(\partial\Omega)$ $(n \leqslant 6)$, $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ $(\alpha \leqslant 1)$, avec $\psi \leqslant f$ sur $\partial\Omega$.

Alors il existe une fonction u unique dans $C^{1,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, telle que :

(1) $u = f$ sur $\partial\Omega$,

(2) $u \geqslant \psi$ sur Ω,

et minimisant l'intégrale d'aire

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2}\, d\lambda .$$

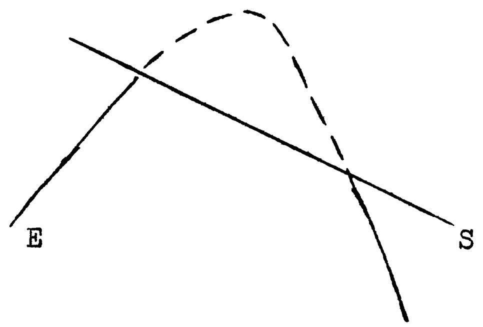
La démonstration utilise les trois lemmes suivants :

LEMME 1. - Sous les hypothèses du théorème 3, et si π est une fonction affine sur $\underset{\sim}{R}^n$ telle que $\pi \geqslant f$ sur $\partial\Omega$, alors, pour toute fonction bornée u de Ω de classe C^1, telle que $\int_\Omega |Du| < +\infty$,

$$I[\inf(u , \pi)] \leqslant I(u) ,$$

et l'égalité équivaut à

$$u \leqslant \pi \quad \text{sur } \Omega .$$



Démonstration. - Ce résultat découle immédiatement de la propriété suivante des ensembles l. p. f. (intuitive, mais non triviale) :

Si $E \in BV_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, si S est un demi-espace de $\underset{\sim}{R}^n$,

$$\int_{\underset{\sim}{R}^n} |D\varphi_E| \geqslant \int_{\underset{\sim}{R}^n} |D\varphi_{E\cap S}| \quad ,$$

et l'égalité est vérifiée si, et seulement si,

$$E \cap S = S \quad .$$

Nous admettrons un second lemme, dont la démonstration ne présente pas de difficulté ([11], proposition 6.2) :

LEMME 2. - Soient Ω un ouvert strictement convexe et borné de $\underset{\sim}{R}^n$, et $g \in \mathcal{C}^2(\underset{\sim}{R}^n)$. Pour tout x appartenant à $\partial\Omega$, il existe deux fonctions affines π_x^- et π_x^+ définies sur $\underset{\sim}{R}^n$, telles que :

(1) $\pi_x^+(y) \geqslant g(y) \geqslant \pi_x^-(y)$, $\forall\ y \in \Omega$;
(2) $\pi_x^+(x) = g(x) = \pi_x^-(x)$;
(3) $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} \{|D\pi_x^+| + |D\pi_x^-|\} < +\infty$.

LEMME 3. - Soient Ω un ouvert borné de $\underset{\sim}{R}^n$, ψ une fonction bornée définie sur Ω , k un entier > 0 . Si u (resp. v) est une fonction lipschitzienne de rapport k , admettant des dérivées partielles qui sont dans $L_1(\Omega)$, et est solution du problème

$$\begin{cases} w \geqslant \psi \ \text{sur}\ \Omega \ , \\ w = u \ (\text{resp. } v)\ \text{sur}\ \partial\Omega \ , \\ \int_\Omega \sqrt{1 + |Dw|^2}\, d\lambda \ \text{minimum} \ , \end{cases}$$

alors

$$u < v \ \text{sur}\ \partial\Omega \Longrightarrow u < v \ \text{sur}\ \Omega \ .$$

Démonstration (par l'absurde, utilise la convexité stricte de $x \to \sqrt{1 + x^2}$). - Notons $F(Dw) = \sqrt{1 + |Dw|^2}$. Soit $A = \{x \ ; \ x \in \Omega \ , \ u(x) > v(x)\}$. Posons

$$w^+ = \sup(u \ , \ v) \quad ,$$

$$w^- = \inf(u \ , \ v) \quad ,$$

$$w^+ = v \text{ sur } \partial\Omega , \qquad w^+ = u \text{ sur } A ,$$
$$w^- = u \text{ sur } \partial\Omega , \qquad w^- = v \text{ sur } A .$$

Donc

$$\int_A F(Dw^+)\, d\lambda + \int_{\Omega - A} F(Dw^+)\, d\lambda = \int_\Omega F(Dw^+)\, d\lambda \geqslant \int_\Omega F(Dv)\, d\lambda ,$$

$$\int_A F(Dw^-)\, d\lambda + \int_{\Omega - A} F(Dw^-)\, d\lambda = \int_\Omega F(Dw^-)\, d\lambda \geqslant \int_\Omega F(Du)\, d\lambda ,$$

par suite

$$\int_A F(Du)\, d\lambda = \int_A F(Dv)\, d\lambda .$$

De plus, $u = v$ sur ∂A . Donc u et v sont solutions du problème

$$\begin{cases} z \text{ lipschitzienne de rapport } k \text{ sur } A , \\ z = u = v \text{ sur } \partial A , \\ z \geqslant \psi \text{ sur } A , \\ \int_A F(Dz)\, d\lambda \text{ minimum} . \end{cases}$$

Par suite :

(1) $u = v$ sur A .

En effet, dans le cas contraire, $Du \neq Dv$ sur un ensemble de mesure strictement positive, et par suite $\int_A F\left(D\,\frac{u+v}{2}\right) d\lambda <$ minimum , ce qui est absurde. L'égalité (1) est en contradiction avec la définition de A . Donc A est vide.

<u>Démonstration du théorème</u> 4.

1° Supposons d'abord qu'il existe une extension de f à $\underset{\sim}{R}^n$ tout entier, de classe $\mathcal{C}^2$.

(a) $u = f$ sur $\partial\Omega$.

En effet, si u est une solution trouvée par le théorème 3, il résulte des lemmes 1 et 2 que

$$\inf(u , \pi_x^+) = u \quad \text{sur } \Omega ,$$

d'où

$$u \leqslant \pi_x^+ \quad \text{sur } \Omega .$$

De même

$$u \geqslant \pi_x^- \quad \text{sur } \Omega .$$

D'après le lemme 2, u est donc continue sur $\overline{\Omega}$, et $f = u$ sur $\partial\Omega$.

(b) D'après le lemme 3, u est unique.

2° Si l'extension de f à $\mathbb{R}^n$ tout entier est seulement continue, on considère une suite décroissante de fonctions (f_p) de classe C^2, qui converge uniformément vers f. D'après le lemme 3, si (u_p) est la solution du problème pour f_p, la suite (u_p) est décroissante, et converge uniformément vers une fonction continue u telle que $u = f$ sur $\partial\Omega$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALMGREN (F. J., Jr). - Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem, Annals of Math., Series 2, t. 84, 1966, p. 277-292.

[2] BOMBIERI (Enrico). - Régularité des hypersurfaces minimales, Séminaire Bourbaki, 21e année, 1968/69, n° 353, 11 p.

[3] FLEMING (Wendell H.). - Functions whose partial derivatives are measures, Illinois J. of Math., t. 4, 1960, p. 452-478.

[4] FLEMING (Wendell H.). - On the oriented Plateau problem, Rend. Circ. mat. Palermo, Serie 2, t. 11, 1962, p. 69-90.

[5] GAGLIARDO (Emilio). - Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili, Rend. Semin. mat. Univ. Padova, t. 27, 1957, p. 284-305.

[6] De GIORGI (Ennio). - Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r-dimensioni, Annali di Mat. pura ed appl., Serie 4, t. 36, 1954, p. 191-213.

[7] De GIORGI (Ennio). - Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r-dimensioni, Ric. di Mat., t. 4, 1955, p. 95-113.

[8] MIRANDA (Mario). - Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 3, t. 18, 1964, p. 27-56.

[9] MIRANDA (Mario). - Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 3, t. 18, 1964, p. 515-542.

[10] MIRANDA (Mario). - Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 3, t. 19, 1965, p. 627-665.

[11] MIRANDA (Mario). - Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie 3, t. 19, 1965, p. 233-249.

[12] NITSCHE (Johannes C. C.). - A variational problem with inequalities as boundary conditions, Bull. Amer. math. Soc., t. 75, 1969, p. 450-452.

[13] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions. - Paris, Hermann, 1966 (Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, IX-X).

[14] SIMONS (James). - Minimal varieties in riemannian manifolds, Annals of Math., Series 2, t. 88, 1968, p. 62-105.

[15] TRISCARI (Dionisio). - Sulla singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni, Matematiche, Catania, t. 18, 1963, p. 139-163.

(Texte reçu en décembre 1970)

Yves BAMBERGER
1 rue du Maréchal de Lattre de Tassigny
92 - NEUILLY