Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

MICHEL LEDUC

Fonctions dérivables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 2 (1969-1970), exp. n° 9-10, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_2_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 9-10, 12 p.

29 janvier et 19 février 1970

FONCTIONS DÉRIVABLES

par Michel LEDUC

Cet exposé constitue une synthèse de résultats classiques, de résultats de E. ASPLUND [2], [3], et de résultats de l'auteur [6], [7]. Il exploite un récent théorème obtenu par S. L. TROJANSKI [12] sur les espaces de Banach qui admettent une partie totale faiblement compacte. Une abondante bibliographie sur le sujet est présentée dans l'article de ZIZLER [14].

0. Définitions et notations.

E désigne un espace vectoriel normé réel, E^* son dual algébrique, et E' son dual topologique.

ℓ désigne la norme de E, c'est-à-dire la fonction $x \in E \to \|x\| \in [0, \infty[$, et λ la norme duale.

S et S', B et B', désignent respectivement les sphères et boules fermées de rayon 1 dans E et E'.

Enfin, f désigne une fonction numérique définie sur E.

DÉFINITION. - f <u>est dérivable en</u> $a \in E$, <u>si</u>

$$\exists\, \alpha \in E', \quad \forall\, x \in E, \qquad \alpha(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t} .$$

f <u>est différentiable en</u> a, <u>si, de plus</u>,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, r > 0, \quad \forall\, x \in rB, \qquad |f(a + x) - f(a) - \alpha(x)| < \varepsilon\|x\| .$$

Soit D l'ensemble des points de dérivabilité de f ; f' désigne la fonction dérivée de D dans E', et on note $f'(a).x$ la limite de $\dfrac{f(a + tx) - f(a)}{t}$.

DÉFINITION. - f <u>hémiconverge vers</u> $r \in \overline{\mathbb{R}}$ <u>en</u> $a \in E$, <u>si</u>

$$\forall\, x \in E, \qquad r = \lim_{t\to 0} f(a + tx) .$$

Le préfixe "hémi" caractérise l'hémiconvergence ; ainsi, l'hémicontinuité de f signifie l'hémiconvergence vers sa valeur en tout point. En particulier, toute fonction dérivable ou convexe est hémicontinue.

Pour $r \in \underset{\sim}{R}$, on note $r^{\leqslant}$ l'intervalle $]-\infty, r]$; ainsi, $B = \ell^{-1}(1^{\leqslant})$ et $B' = \lambda^{-1}(1^{\leqslant})$.

Le préfixe w caractérise les topologies faibles ; ainsi, w-ouvert signifie ouvert dans E pour la dualité (E, E'), et w-*ouvert signifie ouvert dans E' pour la dualité (E', E).

Les abréviations s. c. s. et s. c. i. expriment les semi-continuités supérieure et inférieure respectivement.

Comme dans [9], pour $a \in E$, on note

$$\partial f(a) = \{\alpha \in E^* \; ; \; \forall x \in E , \; f(a+x) \geqslant f(a) + \alpha(x)\} .$$

DÉFINITION. - E <u>est w. c. g. (pour</u> w-<u>compact généré), s'il admet une partie totale</u> w-<u>compacte</u>.

En particulier, tout espace séparable ou réflexif est w. c. g.

DÉFINITION. - ℓ <u>est s. c. (strictement convexe) en</u> $a \in E$, <u>si</u>

$$x \in E , \; \|x\| = \|a\| \; \underline{\text{et}} \; \|a + x\| = 2\|a\| \implies x = a .$$

ℓ <u>est l. u. c. (pour localement uniformément convexe) en</u> a, <u>si, de plus, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $r > 0$ <u>tel que</u>

$$\|x\| = \|a\| \; \underline{\text{et}} \; 2\|a\| - \|a + x\| < r \implies \|a - x\| < \varepsilon .$$

<u>Remarque</u>. - ℓ est l. u. c. en a équivaut à : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$2(\|a\|^2 + \|x\|^2) - \|a + x\|^2 < r \implies \|a - x\| < \varepsilon .$$

1. Théorèmes de densité.

LEMME 1 (BISHOP, PHELPS). - <u>Soit</u> A <u>une partie complète non vide de</u> E ; <u>si</u> $\alpha \in E'$ <u>est majorée sur</u> A, <u>alors, pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $a \in A$ <u>tel que</u>

$$(x \in E \;\text{ et }\; \alpha(x) \geqslant \varepsilon\|x\| > 0) \implies (\forall t > 0 , \; (a + tx) \notin A) .$$

(Cf. [4], p. 28, lemma 1.)

<u>Remarque</u>. - Pour $\varepsilon < \|\alpha\|$, a est sur la frontière de A, car il existe $u \in S$ tel que $\alpha(u) > \varepsilon$, donc, $\forall t > 0$, $(a + tu) \notin A$, or $a = \lim_{t \downarrow 0} (a + tu)$.

LEMME 2. - <u>Soient</u> $\varepsilon > 0$, α <u>et</u> $\beta \in S'$; <u>si, pour tout</u> $x \in \beta^{-1}(0)$, $\alpha(x) \leqslant \varepsilon\|x\|/2$, <u>alors</u> $\|\alpha - \beta\| \leqslant \varepsilon$ <u>ou</u> $\|\alpha + \beta\| \leqslant \varepsilon$.

(Cf. [10], p. 978, lemma 3.1.)

<u>Remarque</u>. - Cette majoration est optimale car, pour $E = \mathbb{R}^2$,

$$\|(x_1 , x_2)\| = \max\{|x_1| , |x_2|\} ,$$

$\varepsilon = 2$, α et β projections canoniques, on obtient

$$\|\alpha - \beta\| = \|\alpha + \beta\| = 2 = \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \beta^{-1}(0) , \quad |\alpha(x)| = \|x\| = \varepsilon\|x\|/2 .$$

THÉORÈME 1. - <u>Soient</u> f <u>une fonction numérique définie sur</u> E , <u>et</u> $r \in f(E)$; <u>si</u> $f^{-1}(r^{\leqslant})$ <u>est borné complet, si</u> f <u>est hémi-s. c. s. sur</u> $f^{-1}(r^{<})$, <u>dérivable sur</u> $f^{-1}(r)$, <u>et si, pour tout</u> $x \in f^{-1}(r)$, $f'(x) \neq 0$, <u>alors</u>

$$\forall\, \alpha \in S' \ \underline{\text{et}}\ \ \varepsilon > 0 , \quad \exists\, a \in f^{-1}(r) : \qquad \lambda\Big(\alpha - \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}\Big) \leqslant \varepsilon .$$

En effet, supposons $\varepsilon < 1$. D'après le lemme 1, il existe $a \in f^{-1}(r^{\leqslant})$ tel que

$$(x \in E \ \text{ et } \ \alpha(x) \geqslant \varepsilon\|x\|/2 > 0) \implies (\forall\, t > 0 , \ f(a + tx) > r) .$$

Comme $\varepsilon < \|\alpha\|$, il existe $u \in S$ tel que $\alpha(u) > \varepsilon$, donc $\alpha(u) > \varepsilon\|u\|/2 > 0$, d'où, $\forall\, t > 0$, $f(a + tu) > r$, puis, f étant hémi-s. c. s.,

$$f(a) \geqslant \limsup_{t \downarrow 0} f(a + tu) \geqslant r ,$$

d'où $f(a) = r$.

Ensuite, pour $x \in E$ et $\alpha(x) \geqslant \varepsilon\|x\|/2$,

$$f'(a).x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t} \geqslant 0 .$$

Comme $f'(a) \neq 0$, il existe $v \in S$ tel que $f'(a).v < 0$; donc, si $x \in \operatorname{Ker} f'(a)$, alors, $\forall\, t > 0$, $f'(a).(x + tv) < 0$, d'où $\alpha(x + tv) < \varepsilon\|x + tv\|/2$, puis

$$\alpha(x) = \lim_{t \downarrow 0} \alpha(x + tv) \leqslant \lim_{t \downarrow 0} \varepsilon\|x + tv\|/2 = \varepsilon\|x\|/2 .$$

D'après le lemme 2, il en résulte $\lambda\Big(\alpha - \dfrac{f'(a)}{\|f'(a)\|}\Big) \leqslant \varepsilon$, car $\alpha(u) + \dfrac{f'(a).u}{\|f'(a)\|} > \varepsilon$.

THÉORÈME 2. - <u>Soient</u> f <u>une fonction numérique hémicontinue sur</u> E , <u>et</u> $r \in f(E)$; <u>si</u> $f^{-1}(r)$ <u>est borné complet, si</u> f <u>est dérivable sur</u> $f^{-1}(r)$, <u>et pour tout</u> $x \in f^{-1}(r)$, $f'(x) \neq 0$, <u>alors</u>

$$\forall\, \alpha \in S' \ \text{ et } \ \varepsilon > 0 , \quad \exists\, a \in f^{-1}(r) : \qquad \lambda\Big(\alpha - \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}\Big) \leqslant \varepsilon .$$

En effet, d'après le lemme 1, il existe $a \in f^{-1}(r)$ tel que

$$(x \in E \text{ et } \alpha(x) \geqslant \varepsilon\|x\|/2 > 0) \implies (\forall\, t > 0 \,,\ f(a + tx) \neq r) \ .$$

Or en fait, $f - r$ garde un signe constant sur le convexe

$$\{a + x \ ; \ x \in E \text{ et } \alpha(x) \geqslant \varepsilon\|x\|/2 > 0\} \ ,$$

car l'image hémicontinue d'un convexe est connexe par arcs. Et cette propriété permet de poursuivre la démonstration comme la précédente.

Remarque. - f étant hémicontinue, si $f^{-1}(r)$ est fermé, alors $f^{-1}(r^{\leqslant})$ aussi.

LEMME 3. - Si E admet une fonction continûment dérivable, non nulle, à support borné, alors il admet une fonction positivement homogène, continûment dérivable sur $E \setminus \{0\}$, telle que $f^{-1}(1^{\leqslant})$ soit un voisinage borné de l'origine.

(Cf. [6], p. 226, théorème 8.)

Remarque. - "Continûment dérivable" équivaut à "continûment différentiable".

THÉORÈME 3. - Si E de Banach admet une fonction numérique continûment dérivable à support borné non vide, alors toute partie dense de S admet une image continue dense dans S' , donc totale dans E' .

En effet, notons f la jauge associée par le lemme 3. Elle est hémicontinue car dérivable (à l'origine, utiliser la positive homogénéité), et $1 \in f(E)$ car, pour $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ puisque $f^{-1}(1^{\leqslant})$ est borné.

Elle est même continue car différentiable (à l'origine, utiliser les voisinages homothétiques), donc $f^{-1}(1^{\leqslant})$ fermé, c'est-à-dire complet, puisque E est de Banach.

Enfin, comme $f(0) = 0 \neq 1$, f est dérivable sur $f^{-1}(1)$, et par positive homogénéité, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x).x = f(x) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, t > 0 \,,\ f'(tx) = f'(x) \ .$$

D'après le théorème 1, l'ensemble $\{\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} \ ; \ x \in f^{-1}(1)\}$ est donc dense dans S' .

L'égalité $\{\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} \ ; \ x \in f^{-1}(1)\} = \{\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} \ ; \ x \in S\}$ et la continuité de $x \in S \to \frac{f'(x)}{\|f'(x)\|} \in S'$ permettent alors de conclure.

Remarque. - Le théorème 3 est une version affaiblie mais simplifiée des résultats de [13].

2. Fonctions convexes dérivables.

LEMME 4 (HAHN, BANACH). - Soient $a \in E$, F un sous-espace vectoriel de E , et $\beta \in F^*$, vérifiant

$$\forall\, y \in F\,, \qquad f(a + y) \geq f(a) + \beta(y)\ ;$$

si f est convexe, alors il existe dans $\partial f(a)$ un prolongement de β .

(Extension immédiate de [5], p. 9, theorem 1.)

Remarque. - Si f est majorée sur un ouvert non vide, alors toute forme linéaire appartenant à $\bigcup_{x \in E} \partial f(x)$ est continue.

Si, de plus, f est convexe, alors f est w-s. c. i., comme borne supérieure des formes affines associées.

LEMME 5. - Soient a et $x \in E$; si f est convexe, alors

$$\Big(\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t} \text{ existe}\Big) \iff \big(\{\alpha(x)\ ;\ \alpha \in \partial f(a)\} \text{ est un point}\big)\ .$$

Et alors cette limite et ce point coïncident.

(Corollaire immédiat du lemme 4.)

Remarque. - f étant convexe, soit $A \subset E$; si, pour tout $x \in A$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t} \quad \text{existe}\ ,$$

alors cette limite existe aussi pour tout x appartenant au sous-espace vectoriel engendré par A , et en dépend linéairement.

Si, de plus, f est continue, alors on obtient même le résultat sur l'espace vectoriel fermé engendré par A .

PROPOSITION 1. - Soit $a \in E$; si f est convexe continue sur E , alors les propriétés (1.0) à (1.3) sont équivalentes :

(1.0) f est dérivable en a ;

(1.1) Il existe A , partie totale de E , telle que, pour tout $x \in A$, $\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tx) - f(a)}{t}$ existe ;

(1.2) L'ensemble $\{\alpha \in E'\ ;\ \alpha \in \partial f(a)\}$ est un point ;

(1.3) $\forall\, u \in S\,,\quad 0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + tu) + f(a - tu) - 2f(a)}{t}$.

Et alors, $\forall\, x \in E\,,\quad f(a + x) - f(a) \geq f'(a).x$.

En effet :

(1.0) ==> (1.1) est trivial.

(1.1) <==> (1.2) est la transcription du lemme 5, compte tenu des remarques.

(1.2) ==> (1.0) est une conséquence du lemme 5.

Enfin, (1.0) ==> (1.3) car, pour tout $x \in E$,

$$0 = f'(a).x + f'(a).(-x) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{f(a+tx)-f(a)}{t} + \frac{f(a-tx)-f(a)}{t} \right) .$$

Et (1.3) ==> (1.2) car, pour α et $\beta \in \partial f(a)$,

$\forall\, u \in S$ et $t > 0$, $\alpha(tu) \leq f(a+tu) - f(a)$ et $\beta(-tu) \leq f(a-tu) - f(a)$,

d'où

$$0 = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a) + f(a-tu) - f(a)}{t} \geq \alpha(u) - \beta(u) \quad ,$$

donc $\alpha - \beta = 0$.

<u>Remarque</u>. - De façon analogue, f étant convexe continue, la différentiabilité de f en a équivaut à

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \quad \exists\, r > 0 , \quad \forall\, u \in rS , \qquad 0 \leq f(a+u) + f(a-u) - 2f(a) \leq \varepsilon r \quad .$$

THÉORÈME 4. - <u>Soient f une fonction numérique convexe définie sur E, et D son domaine de dérivabilité ; si f est continue, alors f' est w-*continue sur D.</u>

En effet, pour tout $a \in D$, par continuité de f en a, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, y \in a + 2rB , \qquad f(y) \leq 1 + f(a) \quad ,$$

donc, pour tout $x \in D \cap (a + rB)$, d'après la proposition 1,

$\forall\, u \in rS$, $\quad f'(x).u \leq f(x+u) - f(x) \leq 1 + f(a) - f(x) \leq 1 + f'(a).(a-x)$,

d'où

$$\|f'(x)\| \leq \frac{1}{r}\,(1 + r\|f'(a)\|) = \frac{1}{r} + \|f'(a)\| \quad .$$

Ainsi, dans un voisinage de a, f' prend ses valeurs dans le w-*compact $(\|f'(a)\| + 1/r)B'$. Or, comme pour tout $u \in rB$, $f'(x).u \leq f(x+u) - f(x)$, si $\alpha \in E'$ est w-*valeur d'adhérence de f' en a, alors, f étant continue, $\alpha(u) \leq \limsup_{x\to a} (f(x+u) - f(x)) = f(a+u) - f(a)$, et, d'après la proposition 1, $\alpha = f'(a)$. Il en résulte que f' est w-*continue en a.

Remarque. - Même sans convexité, le théorème de Rolle donne la réciproque :

Soient $a \in E$, et f une fonction hémicontinue ; si, sur $E \setminus \{a\}$, f est dérivable, et si f' w-*hémiconverge vers $\alpha \in E'$ en a, alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \alpha$.

THÉORÈME 5. - Soient $a \in E$, et f une fonction numérique convexe dérivable sur E. Si f est différentiable en a, alors f' est continue en a.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, par différentiabilité de f en a, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, y \in a + rB , \qquad f(y) - f(a) \leqslant f'(a).(y - a) + \varepsilon\|y - a\|/2 ,$$

donc, pour tout $x \in a + \frac{r}{2} B$, d'après la proposition 1,

$$\begin{aligned}\forall\, u \in B , \qquad \frac{r}{2} f'(x).u &\leqslant f(x + \tfrac{r}{2} u) - f(x) \\ &\leqslant f(x + \tfrac{r}{2} u) - f(a) - (f(x) - f(a)) \\ &\leqslant f'(a).(x + \tfrac{r}{2} u - a) + \tfrac{\varepsilon}{2} \|x + \tfrac{r}{2} u - a\| + f'(a).(a - x) \\ &\leqslant \tfrac{r}{2} f'(a).u + \tfrac{\varepsilon}{2} r ,\end{aligned}$$

d'où

$$\forall\, u \in S , \quad \varepsilon \geqslant f'(x).u - f'(a).u \qquad \text{et} \qquad \|f'(x) - f'(a)\| \leqslant \varepsilon .$$

Remarque. - Même sans convexité, on obtient :

Soient $a \in E$, et f une fonction dérivable ; si f' est continue en a, alors f est différentiable en a.

3. Normes dérivables.

LEMME 6 (SMUL'JAN). - Soit $a \in E$; si ℓ est différentiable en a, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$(\alpha \in B' \ \text{ et } \ \|a\| - \alpha(a) < r) \implies (\|\alpha - \ell'(a)\| < \varepsilon) .$$

(Cf. [11].)

LEMME 7 (TROJANSKI). - Tout espace w. c. g. admet une norme équivalente l. u. c.

(Cf. [12].)

LEMME 8. - Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux normes équivalentes sur E, (C_1) et (C_2) décrivant les propriétés s. c. et l. u. c. ; si ℓ_1 est (C_1), et λ_2 est (C_2), alors E admet une norme équivalente vérifiant (C_1) de duale vérifiant (C_2).

(Cf. [2].)

PROPOSITION 2. - Pour E de Banach :

(2.1) Si λ est s. c., alors ℓ est dérivable, et toute fonction convexe continue est dérivable sur un G_δ dense ;

(2.2) Si λ est l. u. c., alors ℓ est différentiable, et toute fonction convexe continue est différentiable sur un G_δ dense.

(Cf. [3], p. 32, theorems 1 et 2.)

Remarque. - Si E de Banach est w. c. g., E n'admet pas nécessairement une norme équivalente de duale l. u. c., car, par exemple, $\ell^1(\mathbb{N})$ est séparable, mais sa norme canonique n'est différentiable en aucun point.

THÉORÈME 6. - Si la norme duale λ est différentiable, alors le complété de E est réflexif. Réciproquement, tout espace réflexif admet une norme équivalente l. u. c. de duale l. u. c.

En effet, par définition, pour tout $\alpha \in S'$, il existe dans S une suite (x_n) vérifiant $\|\alpha\| = \lim_{n\infty} \alpha(x_n)$. D'après le lemme 6, $\lambda'(\alpha) = \lim_{n\infty} x_n$, d'où $\lambda'(\alpha) \in \hat{S}$, puisque $\hat{S}$ est fermé dans E''. Il résulte alors du théorème 1, que S est total dans E'', donc $E'' = \hat{E}$.

Réciproquement, si E est réflexif, alors E' aussi, et, d'après le lemme 7, ils admettent des normes équivalentes l. u. c. Or E' étant réflexif, toute norme équivalente est une norme duale, et le lemme 8 permet alors de conclure.

Remarque. - Il résulte de la proposition 2, que la norme obtenue et sa duale sont différentiables.

THÉORÈME 7. - Si E de Banach séparable admet une fonction numérique continûment dérivable à support borné non vide, alors E' est séparable.

Réciproquement, si E' est séparable, alors E est séparable, et admet une norme équivalente l. u. c. de duale l. u. c.

En effet, par quotient, S contient une partie dénombrable dense. Or, d'après le théorème 3, toute partie dense de S admet une image totale dans E'. Donc E' est séparable.

Réciproquement, si E' est séparable, alors E aussi, d'après [8], p. 64, théorème 4.1. E admet donc une norme équivalente l. u. c., d'après le lemme 7. Or, d'après [3], proposition 3, E admet également une norme équivalente de duale l. u. c., et le lemme 8 permet de conclure.

Remarque. - Il résulte de la proposition 2, que la norme obtenue est différentiable.

THÉORÈME 8. - Tout espace w. c. g. admet une norme équivalente l. u. c. et dérivable, car de duale s. c.

En effet, un tel espace admet, d'après le lemme 7, une norme équivalente l. u. c. Or, d'après [1], theorem 3, il admet aussi une norme équivalente de duale s. c. Donc le lemme 8, puis la proposition 2, permettent de conclure.

4. Compléments et problèmes ouverts.

LEMME 9. - Soient u et $v \in E \setminus \{0\}$; alors

$$0 \leq 2 - \ell\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right) \leq \frac{\|u\| + \|v\| - \|u + v\|}{\min\{\|u\| , \|v\|\}} .$$

En effet, supposons $\|u\| \leq \|v\|$. Par inégalité triangulaire,

$$\ell\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|u\|}\right) - \ell\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right) \leq \ell\left(\frac{v}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right) ,$$

donc

$$\frac{\|u + v\|}{\|u\|} - \ell\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right) \leq \frac{\|v\|}{\|u\|} - 1 ,$$

d'où

$$2 - \ell\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right) \leq \frac{\|u\| + \|v\| - \|u + v\|}{\|u\|} ,$$

et finalement la formule, puisque $\|u\| = \min\{\|u\| , \|v\|\}$.

PROPOSITION 3. - Si E de Banach admet une fonction f positivement homogène, dérivable et continue, telle que $f^{-1}(1)$ soit borné, alors, pour tout convexe compact K ne contenant pas l'origine, il existe $r_1 , \ldots , r_n > 0$ et $a \in f^{-1}(1)$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(r_i^{<}) - r_i\, a) .$$

En effet, d'après le lemme 4, il existe $\alpha \in S'$ tel que $0 < \min \alpha(K)$, d'où, par continuité de α/ℓ sur le compact K , $0 < \min\{\alpha(x)/\|x\| \; ; \; x \in K\}$.

Puis, d'après le théorème 1, il existe $a \in f^{-1}(1)$ tel que

$$\lambda\left(\frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}+\alpha\right)<\min_{x\in K}\frac{\alpha(x)}{\|x\|} .$$

Donc, pour tout $x \in K$,

$$\frac{f'(a).x}{\|f'(a)\|}+\alpha(x)<\frac{\alpha(x)}{\|x\|}\|x\| ,$$

d'où $f'(a).x < 0$; et, par suite, il existe $t > 0$ tel que $f(a + tx) - f(a) < 0$, d'où $tx \in f^{-1}(1^<) - a$.

Finalement, $K \subset \bigcup_{t>0} t(f^{-1}(1^<) - a)$, et la compacité de la partie K permet de conclure.

PROPOSITION 4.

(4.1) Soient $r \in]0 , 1[$, $A \subset S'$, et $h : S' \to S$, vérifiant

$$\forall \alpha \in S' , \qquad \alpha(h(\alpha)) > r ;$$

si $S' \subset \bigcup_{\alpha\in A} (\alpha + rB')$, alors $h(A)$ est total dans E .

(4.2) Toute partie dense de S' admet une image totale dans E .

En effet, pour tout $\beta \in S'$, il existe $\alpha \in A$ tel que $\|\alpha - \beta\| \leqslant r$, donc $\alpha(h(\alpha)) - \beta(h(\alpha)) \leqslant r$, d'où $\beta(h(\alpha)) > 0$. En particulier, $S' \cap (h(A))^{\perp} = \emptyset$, donc $(h(A))^{\perp} = \{0\}$, et le lemme 4 permet de conclure (4.1).

(4.2) résulte alors des remarques suivantes :

Pour tout $r < 1$, on peut choisir, par définition, $h : S' \to S$ vérifiant, $\forall \alpha \in S'$, $\alpha(h(\alpha)) > r$.

Et, pour tout $r > 0$, si A est dense dans S' , alors $S' \subset \bigcup_{\alpha\in A} (\alpha + rB')$.

PROPOSITION 5. - Soient $s > 0$, $a \in E$, ℓ_1 et ℓ_2 deux normes sur E ; si $\ell_2 \leqslant s.\ell_1$, et si ℓ_1 est l. u. c. en a , alors $\ell = \ell_1 + \ell_2$ aussi.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, ℓ_1 étant l. u. c. en a , il existe $r > 0$ tel que

$$\left(x \neq 0 \text{ et } 2\|a\|_1 - \ell_1\left(a + \frac{\|a\|_1}{\|x\|_1}x\right) < r\right) \Longrightarrow \left(\ell_1\left(a - \frac{\|a\|_1}{\|x\|_1}x\right) < \frac{\varepsilon}{(1+s)^2}\right) .$$

Alors, supposant $a \neq 0$, pour tout $x \in E$ vérifiant

$$\ell(x) = \ell(a) \qquad \text{et} \qquad 2\ell(a) - \ell(a + x) < \frac{r\ell(a)}{(1+s)\|a\|_1} ,$$

d'abord $\frac{\ell(a)}{1+s} \leqslant \|x\|_1$, puisque $\ell = \ell_1 + \ell_2 \leqslant (1 + s)\ell_1$, de même $\frac{\ell(a)}{1+s} \leqslant \|a\|_1$, donc

$$\frac{\ell(a)}{1+s} \leqslant \min\{\|a\|_1 \ , \ \|x\|_1\} \quad ;$$

ensuite $\|a\|_1 + \|x\|_1 - \|a + x\|_1 \leqslant \ell(a) + \ell(x) - \ell(a + x)$, puisque $0 \leqslant \|a\|_2 + \|x\|_2 - \|a + x$
d'où, d'après le lemme 9,

$$2 - \ell_1\left(\frac{a}{\|a\|_1} + \frac{x}{\|x\|_1}\right) \leqslant \frac{1+s}{\ell(a)} (\|a\|_1 + \|x\|_1 - \|a + x\|_1) < \frac{r}{\|a\|_1} \quad ,$$

et par suite

$$\ell_1\left(a - \frac{\|a\|_1}{\|x\|_1} x\right) < \frac{\varepsilon}{(1+s)^2} \quad ,$$

enfin

$$\ell(a) \left|\frac{1}{\|a\|_1} - \frac{1}{\|x\|_1}\right| = \left|\frac{\|a\|_2}{\|a\|_1} - \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}\right| \leqslant \ell_2\left(\frac{a}{\|a\|_1} - \frac{x}{\|x\|_1}\right) < \frac{s}{\|a\|_1} \cdot \frac{\varepsilon}{(1+s)^2} \quad ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \ell_1(a - x) &\leqslant \ell_1\left(a - \frac{\|a\|_1}{\|x\|_1} x\right) + \ell_1\left(\frac{\|a\|_1}{\|x\|_1} x - x\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{(1+s)^2} + \left|\frac{1}{\|x\|_1} - \frac{1}{\|a\|_1}\right| \ \|a\|_1 . \|x\|_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{(1+s)^2} + \ell(x) \ \frac{s}{\ell(a)} \cdot \frac{\varepsilon}{(1+s)^2} = \frac{\varepsilon}{1+s} \quad , \end{aligned}$$

et finalement $\ell(a - x) < \varepsilon$.

Considérons les propositions :

(6.1) Toute partie dense de S admet une image dense dans S' .

(6.2) E admet une fonction numérique continûment dérivable à support borné non vide.

(6.3) E admet des partitions continûment dérivables de l'unité.

(6.4) E admet une norme différentiable.

(6.5) Toute fonction convexe continue est différentiable sur un G_δ dense.

On sait que :

(6.2) $\Longrightarrow$ (6.1) , pour un espace de Banach, d'après le théorème 3.

(6.2) $\Longrightarrow$ (6.3) , pour un espace séparable, d'après [6], proposition 11.

(6.3) $\Longrightarrow$ (6.2) et (6.4) $\Longrightarrow$ (6.2) , trivialement.

Il serait intéressant de rechercher d'autres implications.

De même pour :

(7.1) S admet une image dense dans S' .

(7.2) E admet une fonction numérique continue, w-*continûment dérivable, à support borné non vide.

(7.3) E admet des partitions continues, w-*continûment dérivables, de l'unité.

(7.4) E admet une norme dérivable.

(7.5) Toute fonction convexe continue est dérivable sur un G_δ dense.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMIR (D.) and LINDENSTRAUSS (J.). - The structure of weakly compact sets in Banach spaces, Annals of Math., t. 88, 1968, p. 35-46.

[2] ASPLUND (Edgar). - Averaged norms, Israel J. of Math., t. 5, 1967, p. 227-233.

[3] ASPLUND (Edgar). - Fréchet differentiability of convex functions, Acta Math., Uppsala, t. 121, 1968, p. 31-47.

[4] BISHOP (E.) and PHELPS (R. R.). - The support functionals of a convex set, Convexity, p. 27-35. - Providence, American mathematical Society, 1963 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 7).

[5] DAY (Mahlon M.). - Normed linear spaces. 2nd edition. - Berlin, Springer-Verlag, 1962 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, 21).

[6] LEDUC (Michel). - Jauges différentiables et partitions de l'unité, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 4e année, 1964/65, n° 12, 10 p.

[7] LEDUC (Michel). - Densité de certaines familles d'hyperplans tangents, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 270, 1970, Série A, p. 326-328.

[8] MARONI (Pascal). - Eléments d'analyse fonctionnelle. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1969.

[9] MOREAU (Jean-Jacques). - Sous différentiabilité, Proceedings of the colloquium on convexity, Copenhagen, 1965, p. 185-201.

[10] PHELPS (Robert R.). - A representation theorem for bounded convex sets, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 976-983.

[11] SMUL'JAN (V. L.). - Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach, Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 27, 1940, p. 643-648.

[12] TROJANSKI (S. L.). - On locally uniformly convex and differentiable norms, in certain unseparable Banach spaces, Studia Math., Warszawa (à paraître).

[13] WHITFIELD (J. H. M.). - Differentiable functions with bounded nonempty support on Banach spaces, Bull. Amer. math. Soc., t. 72, 1966, p. 145-146.

[14] ZIZLER (Václav). - Banach spaces with differentiable norms, Comment. Math. Univ. Carolinae, t. 9, 1968, p. 415-440.

(Texte reçu le 18 novembre 1970)

Michel LEDUC
6 allée des Bathes
91 - ORSAY