Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gustave Choquet

Sur les ensembles uniformément négligeables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, n° 1 (1969-1970), exp. n° 6, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A5_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 6, 15 p.

11 décembre 1969

SUR LES ENSEMBLES UNIFORMÉMENT NÉGLIGEABLES

par Gustave CHOQUET

I. Enoncé du problème

Soient E un espace compact, $\mathfrak{M}(E)$ l'espace $\mathcal{C}'(E, \underset{\sim}{R})$ muni de la topologie vague $\sigma(\mathfrak{M}(E), \mathcal{C}(E))$. Soit M une partie de $\mathfrak{M}(E)$, et soit N une partie de E.

On dit que N est M-négligeable, si $|\mu|(N) = 0$ pour toute $\mu \in M$.

On dit que N est uniformément M-négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω de E contenant N, avec $|\mu|(\omega) < \varepsilon$ pour toute $\mu \in M$; ceci équivaut encore à dire qu'il existe un compact $K \subset \complement N$ qui porte à ε près chacune des mesures $\mu \in M$.

Il est clair que "uniformément M-négligeable" entraîne " M-négligeable", la réciproque étant fausse en général (elle est évidemment vraie si M est fini). On se pose alors la question :

PROBLÈME 1. - Lorsque M est compact dans $\mathfrak{M}^+(E)$, est-il vrai que l'on a :

$$(N \text{ est M-négligeable}) \Longrightarrow (N \text{ est uniformément M-négligeable}) \ ?$$

Nous verrons, dans les appendices 33 et 36, que lorsque E est métrisable, la réponse au problème 1 peut être négative pour certains ensembles construits en utilisant l'hypothèse du continu, et que, pour certains E non métrisables, la réponse peut être négative pour des ensembles N du type G_δ.

Pour l'instant, nous allons voir par un exemple que si M est compact et métrisable, mais non contenu dans $\mathfrak{M}^+(E)$, la réponse au problème 1 peut aussi être négative pour des ensembles N très simples.

CONTRE-EXEMPLE 2. - C'est, d'une certaine façon, un exemple de simplicité maximum: $E = [0, 1]$, $N = \{0\}$, $M = \{$mesure 0 et les mesures $\mu_n = (\varepsilon_{n^{-1}} - \varepsilon_{2n^{-1}})\}$.

La vérification des propriétés annoncées est immédiate.

CONTRE-EXEMPLE 3. - On prend $E = [0, 1]$,

$$N = \text{l'ensemble des irrationnels de } [0, 1] ,$$

$$M = \left(\text{l'ensemble constitué par la mesure } 0 \text{ et les } \mu_n = \left(\varepsilon_{\alpha_n} - \varepsilon_{\beta_n}\right)\right) ,$$

où α_n et β_n sont des rationnels deux à deux distincts de $[0, 1]$, avec $\lim(\alpha_n - \beta_n) = 0$, l'ensemble des α_n étant partout dense dans $[0, 1]$.

L'ensemble N est évidemment compact, et N est M-négligeable. Or N n'est pas uniformément M-négligeable, car tout ouvert non vide ω porte l'une des μ_n, d'où $|\mu_n|(\omega) = 2$.

II. Origine du problème

Ce problème a été posé par Eric THOMAS à propos de son étude des mesures vectorielles. De façon plus précise, soient V un Banach (sur $\underline{R}$), π une mesure sur un espace compact E et à valeurs dans V (i. e. $\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(E), V)$).

Pour $\varphi \in \mathcal{C}(E)$, et ω ouvert dans E, $\varphi < \omega$ signifiera que $|\varphi| \leqslant 1$ et $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset \omega$.

Nous noterons $\|\pi\|(\omega) = \sup\limits_{\varphi < \omega} \|\pi(\varphi)\|$.

DÉFINITION 4. - Nous dirons que $N \in \mathfrak{P}(E)$ est π-négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω de E tel que $N \subset \omega$ et $\|\pi\|(\omega) < \varepsilon$.

Introduisons maintenant les mesures scalaires associées à π.

Pour toute $\ell \in E'$, l'application linéaire $\varphi \to \ell(\pi(\varphi))$ est continue, donc c'est un élément de $\mathfrak{M}(E)$, que nous noterons π_ℓ ; on a d'ailleurs $\pi_\ell = \ell \circ \pi$. Les π_ℓ sont dites les mesures scalaires associées à π.

L'application $\ell \to \pi_\ell$ de E' faible dans $\mathfrak{M}(E)$ est linéaire et continue puisque, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(E)$, $\ell \to \ell(\pi(\varphi))$ est continue.

Donc si $\mathcal{B}$ désigne la boule unité de E' ($\mathcal{B}$ est faiblement compacte), l'image de $\mathcal{B}$ dans $\mathfrak{M}(E)$, par l'application $\ell \to \pi_\ell$, est un convexe compact, que nous noterons $\mathcal{B}_\pi$.

DÉFINITION 5. - On dira qu'une partie N de E est scalairement π-négligeable, si N est $|\pi_\ell|$-négligeable pour toute $\ell \in E'$ ou, ce qui revient au même, pour toute $\ell \in \mathcal{B}$.

Problème général 6 (THOMAS). - Est-ce que, pour tout $N \subset E$, on a l'équivalence:

$$(N \text{ est } \pi\text{-négligeable}) \iff (N \text{ est scalairement } \pi\text{-négligeable}) \ ?$$

Nous allons voir une autre formulation de ce problème :

PROPOSITION 7. - Pour tout $N \subset E$, on a l'équivalence :

$$(N \text{ est } \pi\text{-négligeable}) \Longleftrightarrow (N \text{ est uniformément } \mathcal{B}_\pi\text{-négligeable}) \ .$$

Cette équivalence est immédiate, car ces énoncés se traduisent ainsi :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert ω de E, avec $N \subset \omega$, et respectivement :

$$(\|\pi\|(\omega) \leqslant \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad (|\pi_\ell|(\omega) \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } \ell \in \mathcal{B}) \ ,$$

ou encore :

$$(\|\pi(\varphi)\| \leqslant \varepsilon \text{ pour toute } \varphi \prec \omega)$$

et

$$(|\ell(\pi(\varphi))| \leqslant \varepsilon \text{ pour toute } \varphi \prec \omega \text{ et toute } \ell \in \mathcal{B}) \ .$$

Or pour tout $v \in V$, on a :

$$(\|v\| \leqslant \varepsilon) \Longleftrightarrow (|\ell(v)| \leqslant \varepsilon \text{ pour toute } \ell \in \mathcal{B}) \ ,$$

d'où l'équivalence annoncée.

En rapprochant (6) et (7), le problème de THOMAS peut donc maintenant se reformuler ainsi :

PROBLÈME 8. - Soit $N \subset E$, et soit $\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(E), V)$; a-t-on l'équivalence :

$$(N \text{ est } \mathcal{B}_\pi\text{-négligeable}) \Longleftrightarrow (N \text{ est uniformément } \mathcal{B}_\pi\text{-négligeable}) \ ?$$

Nous allons voir par un exemple que la réponse à ce problème est en général négative.

CONTRE-EXEMPLE 9. - Posons $E = [0, 1]$, et

$$F = \text{le compact } \{0 \text{ et } n^{-1} \text{ pour } n \geqslant 1\} \text{ de } [0, 1] \ .$$

Posons $V = \mathcal{C}(F, \underset{\sim}{R})$, muni de la norme uniforme.

Alors, se donner une mesure vectorielle $\pi \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(E), V)$, équivaut à se donner l'application duale T de $\mathcal{M}(F)$ dans $\mathcal{M}(E)$; et on sait que, se donner T, équivaut à se donner sa restriction à F (canoniquement injecté dans $\mathcal{M}(F)$).

Nous pouvons donc utiliser le contre-exemple 3 (ou même le contre-exemple plus simple 2) et, avec ses notations, poser :

$$T(\varepsilon_0) = 0 \ , \qquad T(\varepsilon_{n^{-1}}) = \mu_n \ .$$

L'ensemble N des irrationnels de $[0, 1]$ est $|\mu_n|$-négligeable pour tout n, donc aussi pour toute résultante des mesures μ_n, donc pour toute $\pi_\ell \in \mathcal{B}_\pi$.

L'ensemble N est donc $\mathcal{B}_\pi$-négligeable, mais il n'est pas uniformément $\mathcal{B}_\pi$-négligeable, d'après (2).

La réponse aux deux problèmes équivalents 6 et 8 est donc <u>négative</u> en général.

10. <u>Cas de réduction des problèmes</u> 6 <u>et</u> 8 <u>au problème</u> 1. - Donnons-nous un espace de Banach ordonné V (avec V^+ fermé), tel que $V' = V'_+ - V'_+$. On notera $\mathcal{L}^+(\mathcal{C}(E), V)$ l'ensemble des mesures vectorielles π, telles que $\pi(\varphi) \in V^+$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^+(E)$.

PROPOSITION 11. - <u>Soit</u> N <u>une partie d'un espace compact</u> E ; <u>on a l'équivalence</u>:

(<u>Le problème</u> 1 <u>a une réponse positive, quel que soit</u> M <u>compact</u> $\subset \mathcal{M}^+(E)$)
$\Longleftrightarrow$ (<u>Le problème</u> 6-8 <u>a une réponse positive, pour tout espace</u> V <u>du type ci-dessus, et toute</u> $\pi \in \mathcal{L}^+(\mathcal{C}(E), V)$.

<u>Démonstration</u>. - ( ) $\Longrightarrow$ ( ). Dans V', le compact faible $(\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+)$ contient un homothétique de $\mathcal{B}$, donc, pour un certain $k > 0$, on a :

$$\mathcal{B}_\pi \subset k\{\pi_\ell : \ell \in (\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+)\} .$$

Si le problème 1 a une réponse positive, pour $M = \{\pi_\ell : \ell \in \mathcal{B}_+\}$ qui est un compact de $\mathcal{M}^+(E)$, le problème 8 relatif à π a donc aussi une réponse positive.

( ) $\Longleftarrow$ ( ). Soit M un compact de $\mathcal{M}^+(E)$, et posons $V = \mathcal{C}(M)$. L'espace V ordonné par $\mathcal{C}^+(M)$ est tel que $V' = V'_+ - V'_+$. Il existe une unique application linéaire continue et positive T de $\mathcal{M}(M)$ dans $\mathcal{M}(E)$, telle que, pour toute $\mu \in M$, on ait $T(\mu) =$ la mesure $\mu \in \mathcal{M}(E)$. L'application duale de T est une mesure vectorielle $\pi \in \mathcal{L}^+(\mathcal{C}(E), \mathcal{C}(M))$, et avec les notations antérieures, on a $\mathcal{B}_\pi \supset M$.

Mais plus précisément, $\mathcal{B}_\pi$ est dans $\mathcal{M}(E)$ l'ensemble des résultantes de mesures de normes $\leqslant 1$ portées par M.

Si donc l'ensemble N est M-négligeable, il est aussi $\mathcal{B}_\pi$-négligeable ; donc si le problème 8 a une réponse positive, N est uniformément $\mathcal{B}_\pi$-négligeable, donc aussi uniformément M-négligeable.

12. <u>Etude de l'ensemble</u> $|M|$ <u>associé à un compact</u> $M \subset \mathcal{M}(E)$. - Posons

$$|M| = \{|\mu| : \mu \in M\} ;$$

c'est une partie de $\mathcal{M}^+(E)$. Il peut être utile de connaître quelques propriétés topologiques de $|M|$. Comme M est vaguement borné, M est un ensemble simplement borné de formes linéaires sur $\mathcal{C}(E)$; cet espace étant de Baire, d'après BANACH-STEINHAUS, les normes de ces formes linéaires sont uniformément bornées ; donc M (et donc aussi $|M|$) est borné pour la norme de $\mathfrak{M}(E)$.

En particulier, $|\overline{M}|$ est faiblement compact ; et si E est métrisable, ce qui entraîne que les boules fermées de $\mathfrak{M}(E)$ soient des compacts faibles métrisables, M et $|\overline{M}|$ sont aussi des compacts métrisables.

Notons d'ailleurs que $|\overline{M}|$ ne nous apporte pas beaucoup de renseignements sur $|M|$; on peut même construire un compact $M \subset \mathfrak{M}([0 , 1])$, réduit au point 0 et à une suite μ_n qui converge vers 0 , tel que $|\overline{M}|$ soit la partie positive de la boule unité de $\mathfrak{M}([0 , 1])$.

L'application $f : \mu \rightarrow |\mu|$ du compact M dans le compact $|\overline{M}|$ est s. c. i. en ce sens que, pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur M , de limite μ_0 , on a

$$|\mu_0| \leqslant \lim_{\mathcal{U}} |\mu| \quad .$$

Notons qu'on a de façon analogue $\mu_0^+ \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \mu^+$.

On peut déduire de là que, lorsque E est métrisable, $|M|$ est un ensemble analytique ; il est extrêmement probable qu'il peut effectivement être analytique et non borélien ; il est à ce sujet suggestif de considérer ici le cas des fonctions s. c. i. numériques : Soit g une application continue de I (ensemble des irrationnels de $[0 , 1]$) dans $\underset{\sim}{R}$; on sait que $g(I)$ peut être l'ensemble analytique le plus général. Or si l'on pose

$$\tilde{g}(x) = \liminf_{\substack{y\to x\\ y\in I}} g(y) \ , \qquad \text{pour tout} \quad x \in [0 , 1] \quad ,$$

la fonction $\tilde{g}$ coïncide avec g sur I , et est s. c. i. ; et $\tilde{g}[0 , 1]$ ne diffère de $g(I)$ que par un ensemble dénombrable ; d'où la généralité de $\tilde{g}([0 , 1])$.

REMARQUE 13. - On peut se demander si, dans l'énoncé du problème 1, ce serait une véritable hypothèse supplémentaire utile que de supposer M convexe et contenant 0 . Plus précisément, si N est M-négligeable, où M est un compact de $\mathfrak{M}^+(E)$, et si μ appartient à l'enveloppe convexe fermée de $M \cup \{0\}$, est-ce que N est aussi μ-négligeable ? Nous allons voir que la réponse dépend de la complexité de N .

1° Désignons par A , B deux espaces compacts identiques à $[0 , 1]$, et par λ la mesure de Lebesgue de $[0 , 1]$.

En utilisant l'hypothèse du continu, on peut construire une partie N de $A \times B$

qui est le graphe d'une application de A dans B, et qui n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue $\lambda \otimes \lambda$ de $A \times B$.

Considérons alors, d'après une idée proposée par LÉGER, l'ensemble M des mesures sur $A \times B$ de la forme $\varepsilon_x \otimes \lambda$, où $x \in A$. C'est un compact de $\mathfrak{M}^+(A \times B)$, et N est évidemment M-négligeable ; or N n'est pas $(\lambda \otimes \lambda)$-négligeable, bien que $\lambda \otimes \lambda$ appartienne à l'enveloppe convexe fermée de $M \cup \{0\}$.

2° Par contre, montrons que ceci ne peut se produire lorsque N est suffisamment simple, par exemple borélien (d'après un résultat fort intéressant de LÉGER, c'est même vrai pour tout N universellement Radon-mesurable, mais la démonstration en est plus cachée) :

Dire que μ appartient à l'enveloppe convexe fermée de $M \cup \{0\}$, équivaut à dire que μ est, dans $\mathfrak{M}(E)$, la résultante d'une mesure positive π de norme $\leqslant 1$ portée par M, autrement dit que, pour toute φ continue sur E, on a $\mu(\varphi) = \int \mu_t(\varphi)\, d\pi(t)$.

Cette égalité s'étend (par enveloppe supérieure) à toute fonction $\varphi \geqslant 0$ et s. c. i., donc aussi à toute φ qui est différence de deux fonctions bornées s. c. i. Elle s'étend donc, en utilisant le théorème classique sur les suites croissantes, à toute fonction φ bornée qui s'obtient à partir des fonctions précédentes par une suite transfinie de suites croissantes ou décroissantes. En particulier, si N appartient à la famille borélienne engendrée par les ouverts et les fermés de E, on a $\mu(N) = \int \mu_t(N)\, d\pi(t)$; donc si N est M-négligeable, N est aussi μ-négligeable.

CONTRE-EXEMPLE 14. - Nous allons montrer par un exemple que l'on ne peut espérer étendre une réponse positive au problème 1, aux ensembles k-négligeables ; autrement dit, affirmer que si $N \subset E$ avec $\mu(N) \leqslant k$ pour toute $\mu \in M$ (où M compact $\subset \mathfrak{M}^+(E)$), il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un ouvert ω contenant N, tel que $\mu(\omega) \leqslant (k + \varepsilon)$ pour toute $\mu \in M$.

Dans l'exemple qui suit, N est un K_σ (pour les compacts, l'énoncé généralisé serait vrai) :

$$E = [0\,,\,1] \times \{0\,,\,1\}\ ; \qquad N = (]0\,,\,1] \times \{1\}) \cup \{(0\,,\,0)\}\ ;$$

M est l'ensemble des mesures $\mu = (\varepsilon_{(x,0)} + \varepsilon_{(x,1)})/2$, où x parcourt $[0\,,\,1]$.

Alors, pour toute $\mu \in M$, N est $\frac{1}{2}$-négligeable ; et cependant, pour tout ouvert ω contenant N, il existe des $\mu \in M$ portées entièrement par ω, donc avec $\mu(\omega) = 1$.

III. Etude du problème 1.

Débarrassons-nous d'abord d'un cas particulier fort simple (théorème de Prohkorov).

PROPOSITION 15. - Lorsque N est un K_σ, le problème 1 a toujours une réponse positive.

Démonstration.

1° Supposons N compact. Pour tout voisinage compact v de N, la fonction $\varphi_v : \mu \to \mu(v)$ est une fonction s. c. s. sur le compact N ; la famille des φ_v est filtrante décroissante, et converge simplement vers 0 ; d'après le théorème de Dini, elle converge donc uniformément vers 0 ; donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un v tel que $\varphi_v < \varepsilon$, ce qui montre que N est uniformément M-négligeable.

2° Supposons $N = \bigcup_n K_n$ où K_n est compact ; et soit $\varepsilon > 0$. Chacun des K_n est M-négligeable, donc admet un voisinage ouvert ω_n tel que $\mu(\omega_n) < \varepsilon . 2^{-n}$ pour toute $\mu \in M$.

Si on pose $\omega = \bigcup \omega_n$, ω est bien un voisinage ouvert de N, tel que $\mu(\omega) < \varepsilon$ pour toute $\mu \in M$.

COROLLAIRE 16. - Lorsque E est dénombrable, le problème 1 a toujours une réponse positive.

En effet, toute partie de E est alors un K_σ.

Pour aborder le cas général, introduisons une terminologie :

17. Hypothèse (H). - On désignera ainsi l'affirmation suivante :

Pour tout compact métrisable E, pour tout G_δ, N, de E, pour tout compact $M \subset \mathcal{M}^+(E)$, on a l'implication :

$$(N \text{ est M-négligeable}) \Longrightarrow (N \text{ est uniformément M-négligeable}) .$$

18. Historique. - J'ai commencé par donner une démonstration de l'hypothèse (H) ; puis à partir de là, MOKOBODZKI, en utilisant une technique qui m'avait servi dans ma première démonstration du théorème de capacitabilité (un schéma de projection), a donné une réponse positive au problème 1 pour tout ensemble N analytique ou borélien.

Il s'est avéré ensuite que ma démonstration de l'hypothèse (H) était incomplète, ce qui rend pour l'instant la technique de MOKOBODZKI inapplicable, ce qui est dommage car le théorème présumé est riche en conséquences, dont j'examinerai quelques-unes.

Notons toutefois dès maintenant qu'il y a d'autres ensembles négligeables que les ensembles négligeables analytiques. Le problème 1 reste donc encore largement ouvert ; nous montrerons cependant dans l'appendice 33, que pour les ensembles quelconques la réponse au problème 1 est partiellement négative.

Dans ce qui suit, j'examinerai la contribution de MOKOBODZKI et ma démonstration de l'hypothèse (H), quelques applications, et je démontrerai que le problème 1 a une réponse positive quand M est dénombrable.

19. Contribution de MOKOBODZKI. - Son théorème utilise essentiellement le fait que tout ensemble analytique d'un compact métrisable E est la projection d'un G_δ de $E \times [0\ ,\ 1]$. Mais les premiers lemmes ne supposent pas la métrisabilité de E .

Soient E un espace compact, et M une partie compacte de $\mathcal{M}^+(E)$. Soit F un second espace compact non vide, et soit p l'application projection de $E \times F$ sur E .

On désignera par $\widetilde{M}$ la partie de $\mathcal{M}^+(E \times F)$ constituée des mesures $\widetilde{\mu} \geqslant 0$, dont la projection $p(\widetilde{\mu})$ sur E appartient à M . Evidemment $\widetilde{M}$ est compacte, et $p(\widetilde{M}) = M$.

LEMME 20. - Pour toute partie K-analytique ou ouverte $\widetilde{A}$ de $E \times F$, de projection $A = p(\widetilde{A})$, et pour toute $\mu \in M$, on a :

$$\mu(A) = \sup\{\widetilde{\mu}(\widetilde{A}) \ : \ \widetilde{\mu} \in \widetilde{M}\ , \ \ p(\widetilde{\mu}) = \mu\} \quad .$$

(Noter que A et $\widetilde{A}$ étant K-analytiques ou ouverts, sont universellement mesurables.)

Démonstration. - Désignons par c la capacité sur $\mathfrak{P}(E \times F)$, définie par

$$c(X) = \mu^*(p(X)) \quad .$$

On sait que c est une bonne capacité, donc tout ensemble K-analytique $\widetilde{A}$ est c-capacitable ; et il est élémentaire de vérifier qu'il en est de même de tout ouvert $\widetilde{A}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\widetilde{A}$ contient donc un compact K tel que $c(K) \geqslant (c(\widetilde{A}) - \varepsilon)$, d'où résulte $\mu(p(K)) \geqslant \mu(A) - \varepsilon$.

Soit μ_1 la restriction de μ à $p(K)$; il existe alors (c'est bien connu) une mesure $\widetilde{\mu}_1 \geqslant 0$ sur K , telle que $p(\widetilde{\mu}_1) = \mu_1$. D'autre part, il existe évidemment sur $E \times F$ une seconde mesure $\widetilde{\mu}_2 \geqslant 0$, telle que $p(\widetilde{\mu}_2) = (\mu - \mu_1)$. Si l'on pose $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu}_1 + \widetilde{\mu}_2$, on a $p(\widetilde{\mu}) = \mu$ et $\widetilde{\mu} \in \widetilde{M}$ avec

$$\tilde{\mu}(\tilde{A}) \geqslant \tilde{\mu}_1(\tilde{A}) = \tilde{\mu}_1(K) = \mu(p(K)) \geqslant \mu(A) - \varepsilon \quad .$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu(A) \leqslant \varepsilon + \sup\{\tilde{\mu}(\tilde{A}) \ : \ \tilde{\mu} \in \tilde{M} \ , \quad p(\tilde{\mu}) = \mu\} \quad .$$

Comme ε est arbitraire, on peut le supprimer dans cette inégalité.

Enfin, l'inégalité inverse $\mu(A) \geqslant \tilde{\mu}(\tilde{A})$ est évidente, dès que $p(\tilde{\mu}) = \mu$. L'égalité cherchée en résulte aussitôt.

COROLLAIRE 21. - Pour toute partie K-analytique ou ouverte $\tilde{A}$ de $E \times F$, on a

$$\sup_{\tilde{\mu}\in\tilde{M}} \tilde{\mu}(\tilde{A}) = \sup_{\mu\in M} \mu(A) \quad . \tag{21}$$

C'est immédiat à partir du lemme 20.

LEMME 22. - Soient à nouveau E , F compacts, M compact $\subset \mathfrak{M}^+(E)$, et $\tilde{M}$ le relèvement de M dans $\mathfrak{M}^+(E \times F)$.

Pour toute partie K-analytique $\tilde{A}$ de $E \times F$ uniformément $\tilde{M}$-négligeable, sa projection A sur E est uniformément M-négligeable.

En effet, donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un ouvert $\tilde{\omega}$ de $E \times F$, tel que $\tilde{A} \subset \tilde{\omega}$ et

$$\sup\{\tilde{\mu}(\tilde{\omega}) \ : \ \tilde{\mu} \in \tilde{M}\} \leqslant \varepsilon \quad .$$

L'égalité (21) montre qu'on a de même $\sup\{\mu(\omega) \ : \ \mu \in M\} \leqslant \varepsilon$, où ω désigne l'ouvert $p(\tilde{\omega})$; d'où la propriété cherchée.

THÉORÈME 23. - Soit E un compact métrisable, et soit M une partie compacte de $\mathfrak{M}^+(E)$.

Si l'on admet l'hypothèse (H), tout sous-ensemble analytique M-négligeable de E est uniformément M-négligeable.

Démonstration. - Tout sous-ensemble analytique A de E est l'image de l'ensemble I des irrationnels de $[0 , 1]$ par une application continue f . Si $\tilde{A}$ désigne le graphe de f dans $E \times F$ (où $F = [0 , 1]$), on a $A = p(\tilde{A})$, et $\tilde{A}$ est un G_δ de $E \times F$ (donc aussi un ensemble K-borélien, puisque E est métrisable).

Si A est M-négligeable, la relation (21) montre que $\tilde{A}$ est $\tilde{M}$-négligeable, donc aussi uniformément $\tilde{M}$-négligeable, d'après l'hypothèse (H) ; le lemme 22 montre donc enfin que A est uniformément M-négligeable.

COROLLAIRE 24 (Mêmes notations que dans 23). - Si l'on admet l'hypothèse (H), tout ensemble analytique A de E, qui est M-négligeable, est contenu dans un G_δ lui aussi M-négligeable.

En effet, pour tout $n > 0$, il existe un ouvert ω_n contenant A, avec $\mu(\omega_n) \leqslant 1/n$ pour toute $\mu \in M$. Le G_δ cherché est $\bigcap_n A_n$.

COROLLAIRE 25. - Soit E un compact métrisable, et soit M une partie K-borélienne de $\mathfrak{M}^+(E)$ de classe $\alpha \geqslant 1$.

Si l'on admet l'hypothèse (H), toute partie analytique A de E, qui est M-négligeable, est contenue dans un borélien M-négligeable B de classe α (dans la classification $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots$, où $\mathcal{G}_0$ est l'ensemble des ouverts).

La démonstration est immédiate par récurrence.

Par exemple, si M est un K_σ, B sera un G_δ ; si M est un $K_{\sigma\delta}$, B sera un $G_{\delta\sigma}$, etc.

26. Etude de l'hypothèse (H). - On va utiliser ici le fait que tout espace compact est un espace de Baire. Les premiers résultats seront valables pour des compacts M de mesures de signe quelconque.

Le cadre est pour l'instant le suivant : E est un espace compact arbitraire, M est un compact de $\mathfrak{M}(E)$, et N est un G_δ, M-négligeable de E.

Pour tout fermé $F \subset M$, et tout $\varepsilon > 0$, on désignera par F_ε l'ensemble des $\mu_0 \in F$ ayant, dans F, un voisinage v tel que N admette un voisinage ouvert ω vérifiant la relation :

$$|\mu|(\omega) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pour toute } \mu \in v .$$

Il est clair que F_ε (éventuellement vide) est ouvert dans F. Si l'on pouvait montrer que $F_\varepsilon = F$, une simple application de Borel-Lebesgue montre qu'il existerait un voisinage ouvert ω de N vérifiant la relation :

$$|\mu|(\omega) \leqslant \varepsilon, \qquad \text{pour toute } \mu \in F .$$

Or cette relation, lorsque $F = M$, est l'expression de l'hypothèse (H) (pour E et M compacts quelconques).

On va démontrer un résultat un peu plus faible :

PROPOSITION 27. - Pour tout fermé $F \subset M$, et tout $\varepsilon > 0$, l'ouvert relatif F_ε de F est partout dense dans F.

En effet, N étant un G_δ, on peut l'écrire $N = \cap \omega_n$, où (ω_n) est une suite décroissante d'ouverts de E.

Pour tout ω_n et toute $\mu \in F$, on a

$$|\mu|(\omega_n) = \sup\{\mu(\varphi) : \varphi < \omega_n\} .$$

Donc l'application $f_n : \mu \to |\mu|(\omega_n)$ est s. c. i. sur F ; donc l'ensemble $F_{n,\varepsilon} = \{\mu \in F : |\mu|(\omega_n) \leq \varepsilon\}$ est fermé.

La suite (f_n) est décroissante et tend simplement vers 0 ; donc, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(F_{n,\varepsilon})$ est croissante, et a pour réunion F.

Donc, dans l'espace de Baire F, la réunion des intérieurs des $F_{n,\varepsilon}$ est partout dense ; et comme pour tout n, on a $\mathring{F}_{n,\varepsilon} \subset F_\varepsilon$, la proposition est démontrée.

On va maintenant préciser le mode de croissance de M_ε avec ε, moyennant des hypothèses supplémentaires :

THÉORÈME 28. - Lorsque E est métrisable, et que $M \subset \mathcal{M}^+(E)$, l'ouvert M_ε est une fonction finement croissante de ε, en ce sens que, pour tout ε tel que $M_\varepsilon \neq M$, et pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$, $M_{\varepsilon'} \cap (M \dot{-} M_\varepsilon)$ est partout dense sur le fermé $(M \dot{-} M_\varepsilon)$; ou encore, en d'autres termes, si K_ε est le compact $(M \dot{-} M_\varepsilon)$, pour $\varepsilon' > \varepsilon$, $K_{\varepsilon'}$ est non dense dans K_ε.

Démonstration. - Supposons $M_\varepsilon \neq M$, et posons $F = M \dot{-} M_\varepsilon$; c'est un fermé non vide, et, d'après la proposition 27, F_k est partout dense dans F pour tout $k > 0$. Nous allons montrer que chacun des F_k pour $0 < k < (\varepsilon' - \varepsilon)$ est contenu dans $M_{\varepsilon'}$, ce qui démontrera le théorème.

Supposons que la topologie de E (resp. M) soit définie par une distance d (resp. δ), et désignons par C_n la "couronne de centre F", constituée par les points μ de M dont la distance à F vérifie les inégalités :

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta(\mu , F) \leq \frac{1}{n} .$$

On a $C_n \subset M_\varepsilon$, et chaque C_n est compact, donc le théorème de Borel-Lebesgue montre qu'il existe un voisinage ouvert ω_n de N dans E, tel que $\mu(\omega_n) \leq \varepsilon$ pour toute $\mu \in C_n$.

Par ailleurs, soit $\mu_0 \in F_k$, et soit B une boule fermée de M, de centre μ_0, et telle que $B \cap F \subset F_k$.

Nous allons montrer que $B \subset M_{\varepsilon'}$. Pour cela, il sera plus intuitif de raisonner sur des compacts de E plutôt que sur des ouverts. Posons $K_n = (E \dot{-} \omega_n)$. Puis, comme $(B \cap F)$ est compact, remarquons qu'il existe un voisinage ouvert ω de N, tel que $\mu(\omega) \leq k$ pour toute $\mu \in B \cap F$, et posons $K = (E \dot{-} \omega)$.

On va, avec les compacts K et K_n, fabriquer un compact de $(E \dot{-} N)$ qui porte toute $\mu \in B$ à ε' près ; pour cela, nous aurons besoin d'un lemme.

LEMME 29. - *Soit, dans un espace métrique* E, *une suite* (K_n) *de compacts* ; *soit* K *un autre compact de* E ; *et soit* (α_n) *une suite de nombres* ≥ 0 *de limite* 0.

Pour tout n, *on pose* $K'_n = K_n \cap$ (*boule fermée de centre* K *et de rayon* α_n). *Alors* $K \cup \left(\bigcup_n K'_n\right)$ *est un compact.*

La démonstration est standard, à partir d'un des critères de compacité des espaces métriques.

Pour appliquer ce lemme à la démonstration du théorème 28, il ne reste qu'à définir la suite des α_n :

Posons $B_n = B \cap C_n$; quand $n \to \infty$, toute valeur d'adhérence de la suite (B_n) appartient à $(B \cap F)$; donc, pour tout nombre $\alpha > 0$, si on pose

$$K_{n,\alpha} = K_n \cap (\text{boule fermée de centre } K \text{ et de rayon } \alpha) ,$$

on a, pour tout n assez grand, i. e. $n \geq$ un certain entier $\psi(\alpha)$,

$$\mu_n(K_{n,\alpha}) + \varepsilon + (\varepsilon' - \varepsilon) \geq \|\mu_n\| \qquad \text{ou} \qquad \mu_n(K_{n,\alpha}) \geq \|\mu_n\| - \varepsilon' .$$

On peut supposer que la suite des $\psi(1/p)$ est strictement croissante avec p. On peut poser alors, pour tout entier n,

$$\alpha_n = (\text{le plus petit des } 1/p \text{ tels que } \psi(1/p) \leq n) .$$

Ces α_n étant choisis, le compact $X = K \cup \left(\bigcup_n K'_n\right)$, construit dans le lemme 29, est tel que $\mu(X) \geq \|\mu\| - \varepsilon'$ pour tout $\mu \in (B \dot{-}$ un nombre fini des $B_n)$; autrement dit, pour ces μ, l'ouvert $(E \dot{-} X)$ est un voisinage ouvert de N négligeable à ε' près.

COROLLAIRE 30. - *Lorsque* E *est métrisable, et que* M *est un compact dénombrable de* $\mathcal{M}^+(E)$, *tout* G_δ, M-*négligeable de* E, *est uniformément* M-*négligeable.*

En effet, M étant dénombrable, le théorème 28 montre que, pour tout ε, $M_{2\varepsilon}$ contient les points isolés du fermé $(M \dot{-} M_\varepsilon)$. Donc $\left(\bigcap_\varepsilon M_\varepsilon\right)$ est une partie de M, dont l'intérieur M' est tel que tout point isolé de $(M \dot{-} M')$ appartient à cette partie, donc est aussi un point de M', d'où contradiction, sauf si $M' = M$. Autrement dit, $M_\varepsilon = M$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la propriété annoncée.

En fait, il est facile, en s'inspirant de la technique utilisée dans le lemme 29, d'étendre directement l'énoncé 30 à tout ensemble N ; autrement dit, nous pouvons énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 31. - Lorsque E est métrisable, et que M est un compact dénombrable de $\mathcal{M}^+(E)$, la réponse au problème 1 est positive.

REMARQUE 32. - La technique de projection, utilisée pour démontrer les énoncés 20 à 24, pourrait peut-être être utilisée pour démontrer l'hypothèse (H) : Il suffirait de démontrer que tout G_δ de E est la projection d'un G_δ de $E \times [0 , 1]$ (ou $E \times F$) ayant assez de propriétés particulières pour que l'hypothèse (H) soit démontrable pour lui.

APPENDICE 33. - Voici un exemple qui fournit une réponse négative au problème 1, pour un E compact métrisable, un N construit en utilisant l'hypothèse du continu (donc qui n'affirme en rien l'hypothèse (H)), et un M convexe compact de $\mathcal{M}^+(E)$.

J'avais construit cet exemple voici quelques années pour répondre à une question de L. SCHWARTZ ; il a de nombreuses propriétés qui le rendent précieux en théorie de la mesure. Posons $A = B = [0 , 1]$.

LEMME 34. - Si l'on admet l'hypothèse du continu, il existe une application f de A dans B, dont le graphe N dans $A \times B$ est universellement Radon-mesurable, et est négligeable pour toute mesure de Radon diffuse (ne chargeant aucun point) sur $A \times B$.

Démonstration. - On range, dans une suite transfinie (indexée par les ordinaux α de 2e classe), les points x_α de A, et les mesures de Radon positives et diffuses μ_α de $A \times B$.

Pour tout α, il existe, dans $A \times B$, une suite $(K_{\alpha,n})$ d'ensembles homéomorphes à l'ensemble triadique de Cantor, telle que μ_α soit portée par $\bigcup_n K_{\alpha,n}$; désignons par X_α le complémentaire de ce K_σ dans $A \times B$.

On va construire une suite transfinie (y_α) de points de B ; l'ensemble cherché N sera l'ensemble des points (x_α , y_α) : Le point y_1 sera un point quelconque tel que $(x_1 , y_1) \in X_1$; plus généralement, on prend pour y_α un point quelconque tel que $(x_\alpha , y_\alpha) \in \bigcap_{\beta \leq \alpha} X_\beta$; il existe de tels points, puisque cette intersection dénombrable est, sur chacun des segments $(x_\alpha \times B)$, le complémentaire d'un ensemble de 1re catégorie.

Comme pour tout α , $(N \dot{-} X_\alpha)$ ne contient que des points (x_β , y_β) d'indice $\beta \leqslant \alpha$ (donc en infinité dénombrable), et comme chaque X_α est μ_α-négligeable, N est aussi μ_α-négligeable pour tout α .

En particulier, N est mesurable pour toute mesure diffuse, donc aussi universellement Radon-mesurable.

Voici maintenant comment nous allons utiliser cet exemple : Soit M l'ensemble des probabilités sur $A \times B$, dont la projection canonique sur A est identique à la mesure de Lebesgue λ de A ; évidemment M est convexe et compact, et chacune des $\mu \in M$ est diffuse.

D'après le lemme 34, N est universellement Radon-mesurable et M-négligeable ; et cependant il n'est pas uniformément M-négligeable, sinon N serait contenu dans un ensemble N' du type G_δ et aussi M-négligeable (même démonstration qu'en (24)). Or ceci est impossible, car N' étant borélien et se projetant surjectivement sur A , porte une mesure positive $\mu \in M$, et n'est donc pas M-négligeable (pour montrer l'existence de μ , utiliser la capacité f sur $\mathfrak{P}(A \times B)$ définie par $f(X) = \lambda(\mathrm{pr}_A X)$, et le fait que N' est f-capacitable).

REMARQUE 35. - L'ensemble N du lemme 34 peut être utilisé de diverses façons. Si l'on remarque par exemple que toute partie de N est universellement Radon-mesurable, on a un exemple de partie universellement Radon-mesurable de $A \times B$, et dont la projection sur A ne possède pas cette propriété.

N lui-même est un exemple d'ensemble qui est mesurable pour toute mesure de Radon sur $A \times B$, sans être capacitable pour toute bonne capacité, par exemple pour la capacité f définie ci-dessus.

APPENDICE 36. - Voici enfin un exemple, très voisin d'un exemple qui nous a été communiqué par C. SUNYACH, et qui fournit une réponse négative au problème 1, pour un E compact non métrisable, un N du type G_δ , et un M compact consistant en une suite (μ_n) convergente vers une mesure ε_a .

Soit $E = [0 , 1]^I$, où I est non dénombrable. Pour tout entier $n > 0$, soit a_n le point $(1 - n^{-1})$ de $[0 , 1]$, et posons $\lambda_n = (1 - n^{-1})\, \varepsilon_{n^{-1}} + n^{-1}\, \varepsilon_{a_n}$. Posons enfin $\lambda_{n,i} = \lambda_n$ pour tout $i \in I$, et $\mu_n = \bigotimes_i \lambda_{n,i}$.

On a évidemment $\mu_n \in \mathfrak{M}^1(E)$; μ_n est portée par le compact $X_n = [0 , a_n]^I$, et la suite (μ_n) converge vaguement vers ε_0 , où 0 est le point de E de coordonnées toutes nulles.

L'ensemble $M = \{\varepsilon_0 , \mu_n$ pour $n > 0\}$ est compact, et si l'on pose

$$N = E \dot{-} (\cup X_n) \quad ,$$

l'ensemble N est M-négligeable et de type G_δ .

Or N n'est pas uniformément M-négligeable ; en effet (en passant au complémentaire), tout compact $X \subset \cup X_n$ est contenu dans un compact Y de la forme $\prod [0 , b_i]$, où $b_i < 1$; et comme I n'est pas dénombrable, on a $\mu_n(y) = 0$ pour tout n assez grand (utiliser l'existence d'un $b < 1$ et d'une partie non dénombrable J de I telle que $b_i < b$ pour tout $i \in J$).

(Texte reçu le 7 janvier 1970)

Gustave CHOQUET
Prof. Fac. Sc. Paris
16 avenue d'Alembert
92 - ANTONY