Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier

Approximation des fonctions analytiques avec croissance

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 1 (1969-1970), exp. nº 1, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A1_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 1, 7 p.

6 novembre 1969

APPROXIMATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES AVEC CROISSANCE

par Jean-Pierre FERRIER

Le but de cet article est de donner quelques résultats d'approximation polynômiale dans des algèbres de fonctions analytiques avec poids, en utilisant les techniques de spectre et de calcul symbolique introduites par L. WAELBROECK ([4], [5]). Le cas le plus intéressant est évidemment celui de plusieurs variables complexes ; malheureusement, dans ce dernier cas, beaucoup de questions restent ouvertes.

1. - Nous considérons par la suite des poids w qui sont des fonctions positives sur $\mathbb{C}^n$, lipschitziennes, et telles que $|z|\ w(z)$ soit borné sur $\mathbb{C}^n$ (z désignant le point $(z_1 , \ldots , z_n)$). Nous utiliserons en particulier le poids $\delta_0(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}$, ainsi que le poids $\delta_S(z) = \inf(d(z , \complement S) , \delta_0(z))$, S désignant un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$. Un ensemble B de fonctions numériques complexes sur l'ensemble ouvert $S = \complement w^{-1}(0)$ est dit w-tempéré, s'il existe N dans $\mathbb{Z} \cup \{- \infty\}$ et un nombre positif M tels que l'on ait $|f(z)\ w^N(z)| \leqslant M$ pour toute fonction f de B ; le plus petit N tel que ce soit vrai s'appelle la filtration de B . Une fonction w-tempérée est une fonction f sur S telle que $\{f\}$ soit w-tempéré. L'ensemble des fonctions w-tempérées constitue une algèbre notée $\mathcal{T}(w)$; les ensembles w-tempérés seront encore appelés ensembles bornés de $\mathcal{T}(w)$. La sous-algèbre des fonctions analytiques de $\mathcal{T}(w)$ sera notée $\mathcal{O}(w)$.

Dans $\mathcal{T}(w)$, on utilise la notion de convergence associée à la structure à bornés : une suite f_n de $\mathcal{T}(w)$ tend vers zéro (on écrit $f_n = o(1)$), s'il existe une suite λ_n dans $\mathbb{C}$, tendant vers zéro, et une suite g_n , w-tempérée, telles que $f_n = \lambda_n\, g_n$. A cette notion, correspond une notion d'adhérence ; par exemple, $\mathcal{O}(w)$ est fermé dans $\mathcal{T}(w)$ sous les hypothèses considérées. Le problème de l'approximation consiste à rechercher des conditions sur w pour qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}(w)$, contenant l'algèbre $\mathcal{P}(S)$ des fonctions polynômiales sur S , soit dense dans $\mathcal{O}(w)$, i. e. que l'adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ soit $\mathcal{O}(w)$.

2. - Une méthode, que j'ai employée dans ma thèse de doctorat, consiste à déterminer le spectre de $\overline{\mathcal{A}}$, c'est-à-dire, lorsque $n = 1$, à approcher les fonctions rationnelles élémentaires $z \longmapsto (z - s)^{-1}$, pour les points s du complémentaire S . Pour cela, une technique classique en approximation sur les ensembles

compacts, que l'on peut étendre à ce cas, est de considérer une mesure orthogonale à $\mathfrak{A}$, et non à toutes les fonctions $(z - s)^{-1}$. Nous introduisons une technique plus fine qui consiste à considérer, B désignant un ensemble convexe équilibré w-tempéré, E_B le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(w)$ qu'il engendre, et π_B la jauge de B dans $\mathcal{E}(w)$, la distance $\delta_B(s)$ de 1 à l'idéal engendré dans $\mathfrak{A}$ par les fonctions $z \longmapsto (z_1 - s_1)$, ..., $z \longmapsto (z_n - s_n)$, relativement à la semi-norme π_B. Autrement dit :

$$\delta_B(s) = \inf_{f_1,\dots,f_n \in \mathfrak{A}} \pi_B((z_1 - s_1) f_1(z) + \dots + (z_n - s_n) f_n(z) - 1) \quad .$$

On rappelle que $\pi_B(f) = \infty$, si f n'appartient pas à E_B.

L'intérêt de la fonction $\delta_B(S)$ réside dans l'énoncé qui suit.

PROPOSITION 1. - Soient w une fonction positive lipschitzienne sur $\underset{\sim}{C}^n$ telle que $|z|\, w(z)$ soit borné, S' un ensemble ouvert de $\underset{\sim}{C}^n$ contenant $S = \complement w^{-1}(0)$, et B un ensemble convexe équilibré w-tempéré de $\mathfrak{A} = \mathcal{O}(\delta_{S'})$ tel que 1 soit dans E_B ; on suppose que $n = 1$, ou que $\delta' = C^n$, et que $\mathcal{O}(\delta_{S'}) = \mathcal{P}(C^n)$ soit contenu dans E_B. Alors, pour toute fonction de f de B, et tout point s de S', on a $|f(s)|\, \delta_B(s) \leqslant 1$.

Soient, en effet, $s = (s_1, \dots, s_n)$ un point de S', et I_s l'idéal engendré dans $\mathfrak{A}$ par $z_1 - s_1, \dots, z_n - s_n$. Il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une forme linéaire μ_s sur E_B, de norme $\leqslant 1 + \varepsilon$, nulle sur $I_s \cap E_B$, et telle que $\mu_s(1) = \delta_B(s)$. Pour toute fonction f de $\mathfrak{A} \cap B$, on peut trouver des fonctions $g_1, \dots, g_n$ dans $\mathfrak{A}$ telles que $(z_1 - s_1)g_1, \dots, (z_n - s_n)g_n$ appartiennent à E_B, et

$$f(z) = f(s) + (z_1 - s_1)\, g_1(z) + \dots + (z_n - s_n)\, g_n(z) \quad .$$

Alors $\mu_s(f) = f(s)\, \mu_s(1)$. D'où

$$|f(s)|\, \delta_B(s) = |f(s)|\, \mu_s(1) = |\mu_s(f)| \leqslant 1 + \varepsilon \quad .$$

Soit $|f(s)|\, \delta_B(s) \leqslant 1$.

Du fait que le poids w est supposé lipschitzien et tel que $|z|\, w(z)$ soit borné, w est majoré par un homothétique de δ_S. Lorsque $n = 1$, la fonction $z \longmapsto (z - s)^{-1}$ est alors définie et bornée dans $\mathcal{O}(w)$, lorsque s parcourt le complémentaire de S ; on peut montrer alors que l'on définit ainsi une fonction analytique de $\complement S$ dans $\mathcal{O}(w)$ ([4], p. 44).

De façon plus précise, si Ω est un ensemble ouvert de $\underset{\sim}{C}$, A l'ensemble des fonctions $z \longmapsto (z-s)^{-1}$ où s est dans Ω , et B un ensemble convexe équilibré w-tempéré de $\mathcal{O}(w)$ contenant A , A^2 , et A^3 , l'application

$$s \longmapsto (z-s)^{-1} \quad \text{de } \Omega \text{ dans } E_B$$

est holomorphe. En effet,

$$(z-s)^{-1} - (z-s')^{-1} = (s-s')(-(z-s)^{-1}(z-s')^{-1}) \quad ,$$

ce qui montre que la fonction $s \longmapsto (z-s)^{-1}$ est lipschitzienne, donc continue dès que $B \supset A^2$, et par suite que la fonction $s' \longmapsto (z-s)^{-1}(z-s')^{-1}$ est continue dès qu'en plus $B \supset A^3$, ce qui montre que la fonction $s \longmapsto (z-s)^{-1}$ est dérivable, enfin elle est continûment dérivable, car

$$\begin{aligned}(z-s)^{-2} &- (z-s')^{-2}\\ &= (z-s)^{-2} - (z-s)^{-1}(z-s')^{-1} + (z-s)^{-1}(z-s')^{-1} - (z-s')^{-2}\\ &= -(s-s')(z-s)^{-1}(z-s')^{-1}((z-s)^{-1} + (z-s')^{-1}) \quad .\end{aligned}$$

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> w <u>une fonction positive lipschitzienne sur</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>telle que</u> $|z|\, w(z)$ <u>soit borné,</u> S' <u>un ensemble ouvert de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>contenant</u> $S = \complement w^{-1}(0)$, <u>et</u> Ω <u>un ensemble ouvert connexe contenu dans</u> $S' \cap \complement S$. <u>Ou bien la fonction</u> $z \longmapsto (z-s)^{-1}$ <u>est dans l'adhérence de</u> $\mathfrak{A} = \mathcal{O}(\delta_{S'})$ <u>pour tout point</u> s <u>de</u> Ω , <u>ou bien, pour tout ensemble</u> B w-<u>tempéré de</u> $\mathfrak{A}$, <u>il existe une fonction surharmonique (resp. harmonique) positive</u> ω <u>dans</u> Ω <u>telle que</u> e^{ω} <u>majore</u> $|f|$ <u>pour toute fonction</u> f <u>de</u> B .

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point s de Ω tel que $z \longmapsto (z-s)^{-1}$ ne soit pas dans $\overline{\mathfrak{A}}$. Alors, pour tout ensemble B' w-tempéré dans $\mathcal{O}(w)$, la distance $\rho_{B'}(s)$ de $(z-s)^{-1}$ à $\mathfrak{A}$ pour $\pi_{B'}$ est non identiquement nulle sur Ω . Or

$$\log \rho_{B'}(s) = \sup \log|\mu((z-s)^{-1})| \quad ,$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble des formes linéaires μ sur $E_{B'}$ de norme $\leqslant 1$, orthogonales à $\mathfrak{A}$. Or, l'application $x \longmapsto \log|\mu(x)|$ de $E_{B'}$ dans $\underset{\sim}{R}$ étant plurisousharmonique, et, pour B' assez grand, l'application $s \longmapsto (z-s)^{-1}$ de Ω dans E_B holomorphe, $\log \rho_{B'}(s)$, qui est continue et non identiquement égale à $-\infty$, est sous-harmonique et positive si $1 \in B'$, car alors $\rho_{B'}(s) \leqslant 1$. D'autre part, si B' contient les ensembles $(z-s)^{-1} B$ pour

s dans Ω , on a $\rho_{B'}(s) \leqslant \delta_B(s)$. Soit en effet $\varepsilon > 0$; on peut alors trouver une fonction $u(z)$ dans $\mathfrak{A}$, et une autre $y(z)$ dans B , telles que

$$(z - s)\, u(z) - 1 = (\delta_B(s) + \varepsilon)\, y(z) \quad ,$$

d'où $u(z) - (z - s)^{-1} = (\delta_B(s) + \varepsilon)(z - s)^{-1}\, y(z)$, ce qui montre que

$$\rho_{B'}(s) \leqslant \delta_B(s) + \varepsilon \quad ,$$

d'où

$$\rho_{B'}(s) \leqslant \delta_B(s) \quad ,$$

puisque l'inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$.

Si $f \in B$, on a donc $|f(s)|\ \delta_B(s) \leqslant 1$ pour tout s de Ω , d'où

$$|f(s)|\ \rho_{B'}(s) \leqslant 1 \quad ,$$

soit

$$|f(s)| \leqslant e^{-\log \rho_{B'}(s)} \quad .$$

On peut remplacer $-\log \rho_{B'}(s)$ par une fonction harmonique positive, en considérant simplement la réduite de $\sup\limits_{f \in B} |f(s)|$ sur Ω .

3. - Pour passer de l'approximation des fonctions rationnelles élémentaires $(z - s)^{-1}$ à celles des fonctions analytiques tempérées, on utilise le calcul symbolique.

Désignons par $\mathfrak{B}$ une sous-algèbre d'une algèbre $\mathcal{O}(w)$ qui soit fermée, unitale, et qui contienne z . Soit maintenant S un ensemble de C , tel que $(z - s)^{-1}$ soit défini dans $\mathfrak{B}$, et y soit borné, lorsque s parcourt le complémentaire de S . Le calcul symbolique de WAELBROECK affirme alors qu'il existe un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{O}(\delta_S)$ dans $\mathfrak{B}$, qui envoie unité sur unité et z sur z . Dans ces conditions, $\mathfrak{B}$ contient les restrictions à $\complement w^{-1}(0)$ des fonctions de $\mathcal{O}(\delta_S)$. Le problème de l'approximation est donc résolu dans le cas où le poids w est de la forme δ_S .

Dans le cas d'un poids w seulement lipschitzien et tel que $|z|\ w(z)$ soit borné, on doit faire appel aux fonctions spectrales.

Avec les notations qui précèdent, une fonction δ positive sur $\underset{\sim}{C}^n$ est dite spectrale pour z , si, pour tout point s de $\underset{\sim}{C}^n$, on peut trouver dans $\mathfrak{B}$ des fonctions $u_1(s)$, ... , $u_n(s)$, $y(s)$ qui soient $(\delta_0(s)\ w(z))$-tempérées et telles que

$$(z_1 - s_1)\, u_1(s) + \dots + (z_n - s_n)\, u_n(s) + (s)\, y(s) = 1 \quad .$$

Etant donnée une fonction spectrale pour z, il en existe une autre δ plus petite qui soit lipschitzienne et telle que $|z|\,\delta(z)$ soit borné, donc que $\mathcal{O}(\delta)$ soit défini. Le calcul symbolique est encore un morphisme d'algèbre de $\mathcal{O}(\delta)$ dans $\mathcal{B}$, qui envoie unité sur unité et z sur z.

Lorsque $n = 1$, pour passer de l'approximation des fonctions de $\mathcal{O}(\delta_S)$ pour $S = \complement w^{-1}(0)$ à celle des fonctions de $\mathcal{O}(w)$, il suffit de montrer que w est une fonction spectrale pour z. Comme $\mathcal{O}(\delta_S)$ contient la sous-algèbre $\mathcal{R}(S)$ des fonctions rationnelles régulières sur S, le problème se pose de savoir si la fonction w est déjà spectrale pour z dans $\overline{\mathcal{R}(S)}$. C'est cette question que j'ai étudiée dans ma thèse de doctorat, dans le cas particulier où $\complement S$ contient un angle et où, pour deux nombres positifs α, β, avec $\alpha > 1$, le poids w est tel que

$$0 \leqslant |z| \leqslant \alpha |t| \qquad \text{entraîne} \qquad w(z) \geqslant w^{\beta}(z) \qquad ([2],\ p.\ 332) \quad .$$

Il faut remarquer que, pour que le poids w soit spectral pour z dans $\overline{\mathcal{R}(S)}$, il faut déjà qu'il le soit dans $\mathcal{O}(w)$. Cette question a été résolue pour n quelconque par I. CNOP [1] qui, en utilisant des techniques de HÖRMANDER, a montré que si $-\log w$ est plurisousharmonique, w est spectral pour z dans $\mathcal{O}(w)$. Le cas de $\overline{\mathcal{P}(S)}$ et de $\overline{\mathcal{R}(S)}$ fera l'objet d'un travail prochain, au moins pour $n = 1$.

4. - Nous donnons des applications de la théorie qui précède, dans le cas où $n = 1$.

THÉORÈME. - Soient w une fonction positive sur $\mathbb{C}$, qui soit lipschitzienne et telle que $|z|\,w(z)$ soit borné, S, S' des ensembles ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $S' \supset S \supset \complement w^{-1}(0)$, et Ω un ensemble ouvert connexe contenu dans $S' \cap \complement S$. On suppose l'une des deux conditions qui suivent :

1° Ω contient un angle d'ouverture $\varpi > 0$, et la série $\left(\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} (|z|^n\, w(z))\right)^{-\pi/n\varpi}$ est divergente.

2° Il existe un point s de $\complement S'$ tel, qu'au voisinage de s, Ω contienne un secteur, limité par deux arcs de cercle, d'ouverture $\varpi > 0$, et que la série $\left(\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} \dfrac{w(z)}{|z - s|^n}\right)^{-\pi/n\varphi}$ soit divergente.

Alors l'adhérence de $\mathcal{O}(\delta_{S'})$ dans $\mathcal{O}(w)$ contient $\mathcal{O}(\delta_S)$.

Il faut remarquer que lorsque $S' = \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(\delta_{S'})$ est, d'après le théorème de Liouville, identique à $\mathcal{P}(S')$. De la même façon, lorsque le complémentaire de S'

est un ensemble fini F , $\mathcal{O}(\delta_{S'}) = \mathcal{R}(S')$.

L'approximation polynômiale, d'une part, et l'approximation rationnelle avec pôles dans un ensemble fini, d'autre part, entrent dans le cadre du théorème. On obtient la proposition 6 de [3] en itérant le théorème autant de fois que $\complement w^{-1}(0)$ comprend de composantes connexes. Remarquons que la condition 1° correspond essentiellement au cas où Ω n'est pas borné, le rôle du point s de 2° étant alors joué par le point à l'infini.

Démontrons d'abord le théorème lorsque la condition 1° est vérifiée, et soit A un angle d'ouverture φ contenu dans Ω . Posons $M_n = \sup_{z \in \underset{\sim}{C}} (|z|^n w(z))$. On peut se ramener au cas où le sommet de A est l'origine, une translation n'affectant pas le caractère de la série $M_n^{-\pi/n\varphi}$, puisque comme

$$|z - z_0| \leqslant 2 \max(|z| , |z_0|) \quad ,$$

on a

$$\Big(\sup_{z \in \underset{\sim}{C}} (|z - z_0|^n w(z))\Big)^{-\pi/n\varphi} \geqslant \min(2^{-\pi/\varphi} M_n^{-\pi/n\varphi} , (2|z_0|)^{-\pi/\varphi}) \quad .$$

On peut ensuite, par rotation, se ramener au cas où l'un des côtés de A est la demi-droite réelle positive. Posons alors

$$p_n(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m}{2^m M_m} \quad ,$$

on a $|p_n(z)|\, w(z) \leqslant 1$, et on vérifie (voir [3], proposition 4) que

$$\sup_{n \in \underset{\sim}{N}} \int_1^\infty \log p_n(x)\, x^{1-(\pi/\varphi)}\, dx \geqslant k \sum_{n=1}^{\infty} M_n^{-\pi/n\varphi} = \infty \quad . \tag{1}$$

Ceci montre que $\log|p_n(z)|$ ne peut être majoré sur Ω par une fonction harmonique positive f , puisque cela impliquerait, s étant un point de A ,

$$\int_{\partial A} \log^+|p_n(u)|\, d\mu_s^A(u) \leqslant \int_{\partial A} \Big(\liminf_{\substack{z \to u \\ z \in A}} f(z)\Big)\, d\mu_s^A(u)$$

$$\leqslant f(s) \quad ,$$

ce qui contredit (1), compte-tenu de l'expression de la mesure harmonique μ_s^A .

En appliquant la proposition 2, on voit que $(z - s)^{-1}$ appartient à l'adhérence de $\mathcal{O}(\delta_{S'})$ pour tout point s de Ω ; il en résulte que $(z - s)^{-1}$ est défini et borné dans $\overline{\mathcal{O}(\delta_{S'})}$, lorsque s parcourt le complémentaire de S , puis, par le calcul symbolique, que l'adhérence de $\mathcal{O}(\delta_{S'})$ contient $\mathcal{O}(\delta_S)$.

Pour terminer, si on se trouve dans le cas de la condition 2°, on se ramène au premier cas par la transformation $z \longmapsto (z - s)^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CNOP (I.). - Existence de fonctions spectrales dans certaines algèbres de fonctions holomorphes à croissance limitée (à paraître).

[2] FERRIER (J.-P.). - Ensembles spectraux et approximation polynômiale pondérée, Bull. Soc. math. France, t. 96, 1968, p. 289-335.

[3] FERRIER (J.-P.). - Un problème de spectre dans les algèbres complètes, Séminaire Lelong, 1968/69 (à paraître).

[4] WAELBROECK (L.). - Etudes spectrales des algèbres complètes, Acad. royale Belg., Cl. Sc., Mém., Série 2, t. 31, 1960, n° 7, 142 p.

[5] WAELBROECK (L.). - Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes. - Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1962 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Eté 1962, 2).

(Texte reçu le 11 décembre 1969)

Jean-Pierre FERRIER
Ch. Ens. Fac. Sc. Nancy
12 rue Michel Ney
54 - NANCY