Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michèle Dehen

Classification de catégories

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 8 (1968-1969), exp. n° 3, p. 1-96
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1968-1969__8__A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
8e année, 1968/69, n° 3

CLASSIFICATION DE CATÉGORIES

par Michèle DEHEN

Introduction

Soit $\mathcal{C}$ une *catégorie* constituée par les données suivantes :

(1) *Une classe d'objets, notée* Ob $\mathcal{C}$;

(2) *Pour tout couple* (E , F) *d'objets de* $\mathcal{C}$, *un ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E , F)$ *dont les éléments sont les morphismes de* E *dans* F ;

(3) *Pour tout triplet* (E , F , G) *d'objets de* $\mathcal{C}$, *une application de*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F , G) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E , F)$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E , G)$, *notée* $\circ$, *et appelée composition des morphismes*.

On suppose de plus que ces données satisfont aux axiomes des catégories.

Pour tout objet E de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(E , E)$ est un semi-groupe non vide qui admet une unité, notée I , et appelée, par généralisation, *identité sur* E .

Un objet E de $\mathcal{C}$ est appelé *objet final* si, pour tout objet X , l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X , E)$ contient un élément et un seul. De même, un objet F de $\mathcal{C}$ est appelé *objet initial* si, pour tout objet X , l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F , X)$ est constitué d'un élément unique. On démontre que ces objets (lorsqu'ils existent) sont uniques, à un isomorphisme près.

Dans la suite, on imposera de plus à la catégorie $\mathcal{C}$ l'axiome suivant :

(4) *Il existe un foncteur* j *de la catégorie* $\mathcal{C}$ *dans la catégorie des ensembles, c'est-à-dire une application* j *de la classe des objets de* $\mathcal{C}$ *dans la classe des ensembles qui, à tout objet* E *de* $\mathcal{C}$, *associe un ensemble appelé ensemble sous-jacent à* E , *et noté* $j(E)$ *ou encore* E .

On suppose de plus que, j définit, pour tout couple (A , B) d'objets de $\mathcal{C}$, une application, que l'on note encore j , de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B)$ dans $\mathcal{A}(j(A) , j(B))$, où $\mathcal{A}(j(A) , j(B))$ désigne l'ensemble des applications de l'ensemble $j(A)$ dans l'ensemble $j(B)$.

On impose de plus que, pour tout couple (A , B) d'objets de $\mathcal{C}$, l'application j soit injective de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B)$ dans la classe des applications de l'ensemble sous-jacent à A dans celui sous-jacent à B.

Si E et F sont deux objets de $\mathcal{C}$ admettant le même ensemble sous-jacent, on dira que *la $\mathcal{C}$-structure de* E *est plus fine que celle de* F, s'il existe un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F)$ tel que $j(f)$ soit égal à l'identité sur $j(E)$.

Cette convention est calquée sur celle utilisée pour la comparaison des topologies dans les catégories dont les objets sont des espaces topologiques et les morphismes des applications continues.

Définitions des limites projectives et des limites inductives. - Soient I un ensemble préordonné, et $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ ayant I pour ensemble d'indices.

(a) On dira que la famille $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ forme un système projectif si, pour tout couple (α, β) d'indices vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, on s'est donné un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{\beta\alpha}$ de E_β dans E_α, et si les $f_{\beta\alpha}$ vérifient les conditions suivantes :

(P_1) $$(\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma) \implies (f_{\gamma\alpha} = f_{\beta\alpha} \circ f_{\gamma\beta}) ,$$

(P_2) $$(\alpha \in I) \implies (f_{\alpha\alpha} \text{ est l'unité de } \mathrm{Hom}(A, A)) .$$

On introduit la catégorie auxiliaire $\mathcal{C}_P$ définie par :

Un objet de $\mathcal{C}_P$ est $(X, \{x_\alpha\}_{\alpha \in I})$, où X appartient à $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, et où les x_α sont des morphismes de $\mathcal{C}$,

$$x_\alpha : X \to E_\alpha ,$$

tels que, pour tout (α, β) de $I \times I$, vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, on ait

$$x_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ x_\beta .$$

Un $\mathcal{C}_P$-morphisme

$$(X, \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}) \to (Y, \{y_\alpha\}_{\alpha \in I})$$

est un $\mathcal{C}$-morphisme

$$h : X \to Y ,$$

tel que, pour tout α de I, on ait $x_\alpha = y_\alpha \circ h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "x_\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "y_\alpha"] \\ & E_\alpha & \end{tikzcd} .$$

<u>Une limite projective de la famille</u> $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ <u>par les</u> $\mathcal{C}$-<u>morphismes</u> $(f_{\beta\alpha})_{\beta\geq\alpha}$ <u>est, par définition, un objet final de</u> $\mathcal{C}_P$ (<u>s'il en existe</u>).

On la note alors

$$((\varprojlim E_\alpha \,,\, \{f_{\beta\alpha}\}_{\beta\geq\alpha}) \,,\, \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}) \;,$$

où les (f_α) sont les $\mathcal{C}$-morphismes

$$\varprojlim E_\alpha \to E_\alpha \;.$$

Si l'on introduit une seconde catégorie auxiliaire $\mathcal{C}_\Pi$, définie par :

Un objet de $\mathcal{C}_\Pi$ est $(X \,,\, \{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$, où X appartient à $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, et où les $\{x_\alpha\}$ appartiennent à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \,,\, E_\alpha)$.

Un $\mathcal{C}_\Pi$-morphisme

$$(X \,,\, \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \to (Y \,,\, \{y_\alpha\}_{\alpha\in I})$$

est un $\mathcal{C}$-morphisme

$$h : X \to Y \;,$$

tel que, pour tout α de I, on ait

$$x_\alpha = y_\alpha \circ h \;.$$

On définit alors un produit de la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$, c'est un objet final de $\mathcal{C}_\Pi$ (s'il en existe). On le note

$$(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I}) \;,$$

et les (p_α) sont appelés projections de $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ dans E_α.

D'après les définitions de $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}_\Pi$, la classe des objets de $\mathcal{C}_P$ est contenue dans la classe des objets de $\mathcal{C}_\Pi$; de plus, $\mathcal{C}_P$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}_\Pi$.

Supposant que $(\varprojlim E_\alpha \,,\, \{f_{\beta\alpha}\}_{\beta\geq\alpha})$ et $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$ existent, on déduit, puisque $(\prod_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I})$ est un objet final de $\mathcal{C}_\Pi$, qu'il existe un $\mathcal{C}_\Pi$-morphisme, et un seul,

$$h : ((\varprojlim E_\alpha \,,\, \{f_{\beta\alpha}\}_{\beta\geq\alpha}) \,,\, \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}) \to (\prod_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\, \{p_\alpha\}_{\alpha\in I}) \;,$$

c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, que l'on note encore h, de $\varprojlim_{\alpha\in I} E_\alpha$ dans $\prod_{\alpha\in I} E_\alpha$, qui vérifie, pour tout α de I,

$$f_\alpha = p_\alpha \circ h \;.$$

Si la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome (4), l'ensemble sous-jacent à $\varprojlim_{\alpha\in I} E_\alpha$ s'applique dans la limite projective des ensembles $j(E_\alpha)$ pour les applications $[j(f_{\beta\alpha})]_{\beta\geqslant\alpha}$, où $j(f_{\beta\alpha}) : j(E_\beta) \to j(E_\alpha)$, par une application χ, et une seule, qui vérifie :

$$\forall\ \alpha \in I\ , \qquad j(f_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \chi\ ,$$

où φ_α désigne l'application de $\varprojlim j(E_\alpha)$ dans $j(E_\alpha)$.

En effet, on considère la catégorie $\mathcal{E}$ dont les objets sont les ensembles et les morphismes les applications. On note $\mathrm{Ob}\ \mathcal{E} = \mathrm{Ens}$, la classe des ensembles, et, pour tout couple $(A\ , B)$ d'ensembles, on note

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A\ , B) = \mathcal{A}(A\ , B)\ ,$$

l'ensemble des applications de A dans B. Le système $[j(E_\alpha)_{\alpha\in I}\ , \{j(f_{\beta\alpha})_{\beta\geqslant\alpha}\}]$ est un système projectif dans $\mathcal{E}$.

On peut donc construire une catégorie auxiliaire $\mathcal{E}_P$ analogue à $\mathcal{C}_P$, et définir une limite projective :

$$[(\varprojlim_{\alpha\in I} j(E_\alpha)\ , \{j(f_{\beta\alpha})_{\beta\geqslant\alpha}\})\ , (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}]\ .$$

Celle-ci est un objet final dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles, elle est définie à une bijection près. On démontre qu'elle admet, comme représentant, le sous-ensemble du produit des $j(E_\alpha)$, dans $\mathcal{E}$, $\prod_{\alpha\in I} j(E_\alpha)$, formé des points cohérents. On peut représenter les diagrammes, si $\beta \geqslant \alpha$:

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[d, "j"] & E_\beta \arrow[l, "f_{\beta\alpha}"'] \arrow[d, "j"] & & \varprojlim\limits_{\alpha\in I} E_\alpha \arrow[ll, "f_\beta"'] \arrow[d, "j"] \\
j(E_\alpha) & j(E_\beta) \arrow[l, "j(f_{\beta\alpha})"] & \varprojlim\limits_{\alpha\in I} j(E_\alpha) \arrow[l, "\varphi_\beta"] & j(\varprojlim\limits_{\alpha\in I} E_\alpha) \arrow[l, "\chi"] \arrow[ll, bend right, "j(f_\beta)"']
\end{tikzcd}\ .$$

Comme $[(\varprojlim j(E_\alpha)\ , \{j(f_{\beta\alpha})\}_{\beta\geqslant\alpha})\ , (\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}]$ est défini comme un objet final, il existe une application, et une seule, χ, de $j[(\varprojlim E_\alpha)\ , (f_{\beta\alpha})_{\beta\geqslant\alpha}]$ dans $[\varprojlim j(E_\alpha)\ , j(f_{\beta\alpha})_{\beta\geqslant\alpha}]$, vérifiant : $\forall\ \alpha \in I\ ,\ j(f_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \chi$.

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie de plus l'axiome suivant :

$(5)_P$ *Pour tout système projectif* $(E_\alpha\ ,\ (f_{\beta\alpha})_{\beta\geqslant\alpha})_{\alpha\in I}$ *dans* $\mathcal{C}$, *l'application*

$$\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_P \longrightarrow \mathrm{Ob}\ \mathcal{E}_P$$

$$(X\ ,\ \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \longmapsto (j(X)\ ,\ \{j(x_\alpha)\}_{\alpha\in I})$$

est surjective,

alors, il existe un objet X *de* $\mathcal{C}$ *vérifiant* $j(X) = \varprojlim j(E_\alpha)$, *et un élément* $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de* $\prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\ ,\ E_\alpha)$ *vérifiant*

$$(\beta \geqslant \alpha) \implies x_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ x_\beta \qquad \text{et} \qquad \forall\ \alpha \in I\ ,\quad j(x_\alpha) = \varphi_\alpha\ .$$

Comme $(\varprojlim X_\alpha\ ,\ (f_\alpha)_{\alpha\in I})$ est un objet final de $\mathcal{C}_P$, il existe un unique $\mathcal{C}$-morphisme

$$h\ :\ X \to \varprojlim X_\alpha\ ,$$

tel que, $\forall\ \alpha \in I$, $f_\alpha \circ h = x_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim j(E_\alpha) \arrow[rr, bend left, "j(h)"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha = j(x_\alpha)"'] & & j[\varprojlim(E_\alpha)] \arrow[ll, "\chi"] \arrow[dl, "j(f_\alpha)"] \\
& j(E_\alpha) &
\end{tikzcd} .$$

Si l'on récapitule, il existe une application, et une seule,

$$\chi\ :\ j(\varprojlim E_\alpha) \to \varprojlim j(E_\alpha)\ ,$$

vérifiant, $\forall\ \alpha \in I$, $j(f_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \chi$.

De plus, il existe une application

$$j(h)\ :\ \varprojlim j(E_\alpha) \to j(\varprojlim E_\alpha)\ ,$$

vérifiant, $\forall\ \alpha \in I$, $j(f_\alpha) \circ j(h) = \varphi_\alpha$. Par suite, $\forall\ \alpha \in I$,

$$\varphi_\alpha = \varphi_\alpha \circ \chi \circ j(h) \qquad \text{et} \qquad j(f_\alpha) = j(f_\alpha) \circ j(h) \circ \chi\ .$$

Or l'application

$$\prod_{\alpha\in I} \varphi_\alpha\ :\ \varprojlim j(E_\alpha) \to \prod_{\alpha\in I} j(E_\alpha)$$

est injective, par suite la première égalité implique que $\chi \circ j(h)$ est égal à l'identité sur $\varprojlim j(E_\alpha)$. L'application χ est donc surjective, et admet $j(h)$ comme inverse à droite.

On peut montrer que l'application

$$\prod_{\alpha \in I} j(f_\alpha) : j(\varprojlim E_\alpha) \to \prod_{\alpha \in I} j(E_\alpha)$$

est injective. En effet, si elle n'était pas injective, il existerait deux éléments distincts x et y dans $j(\varprojlim E_\alpha)$ tels que,

$$\forall \alpha \in I, \qquad j(f_\alpha)(x) = j(f_\alpha)(y) \quad ;$$

par suite, il existerait deux éléments ξ et η distincts de $\varprojlim j(E_\alpha)$, tels que,

$$\forall \alpha \in I, \qquad j(f_\alpha) \circ j(h)(\xi) = j(f_\alpha) \circ j(h)(\eta) \quad ,$$

c'est-à-dire,

$$\forall \alpha \in I, \qquad \varphi_\alpha(\xi) = \varphi_\alpha(\eta) \quad .$$

Or, si $\varprojlim j(E_\alpha)$ est défini comme un sous-ensemble du produit des $j(E_\alpha)$, l'application $\prod_{\alpha \in I} \varphi_\alpha$ est injective, on aboutit donc à une contradiction.

Puisque l'application $\prod_{\alpha \in I} j(f_\alpha)$ est injective, on peut déduire que $j(h) \circ \chi$ est égale à l'identité sur $j(\varprojlim E_\alpha)$. Par conséquent, $j(h)$ et χ sont deux applications inverses l'une de l'autre, et, à une bijection près,

$$j(\varprojlim E_\alpha) = \varprojlim [j(E_\alpha)] \quad .$$

On dira que l'ensemble sous-jacent est le même.

On peut remarquer que l'axiome $(5)_P$ est vérifié, par exemple, par la catégorie des espaces topologiques, ou par celle des espaces uniformes.

(b) Si I désigne un ensemble, et $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par I, on suppose que, pour tout α de I, il existe un objet A_α de $\mathcal{C}$, et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_\alpha : A_\alpha \to E_\alpha$; on suppose de plus que, quel que soit α, l'ensemble sous-jacent de A_α est le même :

$$j(A_\alpha) = E \quad .$$

On introduit alors la catégorie auxiliaire $\mathcal{C}'_P$ dont les objets s'écrivent $(X, \{x_\alpha\}_{\alpha \in I})$, où X est un objet de $\mathcal{C}$, et où, pour tout α, x_α appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, E_\alpha)$, et vérifie : Il existe y_α appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A_\alpha)$, et satisfaisant à $x_\alpha = f_\alpha \circ y_\alpha$. Les $\mathcal{C}'_P$-morphismes sont définis comme les $\mathcal{C}_\Pi$-morphismes, et $\mathcal{C}'_P$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}_\Pi$.

Une limite projective des $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ par les $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ est, par définition, un objet final de $\mathcal{C}'_P$ (s'il en existe) :

$$((\varprojlim_{\alpha\in I} E_\alpha \, , \, f_\alpha) \, , \, \{f'_\alpha\}_{\alpha\in I}) \quad .$$

Comme, pour tout α , $j(A_\alpha) = E$, on peut déduire que, sous des hypothèses analogues à $(5)_P$, on a de plus

$$j(\varprojlim_{\alpha\in I} E_\alpha) = E \quad .$$

De plus, les applications $j(f'_\alpha) : E \to j(E_\alpha)$ vérifient, pour tout α ,

$$j(f'_\alpha) = j(f_\alpha) \quad .$$

Par convention, on notera encore f_α les $\mathcal{C}$-morphismes,

$$f_\alpha : \varprojlim_{\alpha\in I} E_\alpha \to E_\alpha \quad .$$

(c) On définit, de façon analogue, les systèmes inductifs et les limites inductives.

On dira que la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$, indexée par l'ensemble préordonné I , forme un système inductif si, pour tout couple (α , β) d'indices vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, on s'est donné un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{\alpha\beta}$ de E_α dans E_β , et si les $(f_{\alpha\beta})$ vérifient les conditions suivantes :

(I_1) $\qquad (\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma) \implies (f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta})$,

(I_2) $\qquad (\alpha \in I) \implies (f_{\alpha\alpha}$ est l'unité de $\mathrm{Hom}(A , A))$.

On introduit alors une catégorie auxiliaire $\mathcal{C}_S$ définie par :

Un objet de $\mathcal{C}_S$ est $(X , \{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$, où X est un objet de $\mathcal{C}$, et où les (x_α) sont des $\mathcal{C}$-morphismes, $x_\alpha : E_\alpha \to X$, tels que, pour tout couple (α , β) de $I \times I$ vérifiant $\alpha \leqslant \beta$, on ait

$$x_\alpha = x_\beta \circ f_{\alpha\beta} \quad .$$

Un $\mathcal{C}_S$-morphisme

$$(X , \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \to (Y , \{y_\alpha\}_{\alpha\in I})$$

est un $\mathcal{C}$-morphisme

$$h : X \to Y ,$$

tel que, pour tout α de I, on ait

$$y_\alpha = h \circ x_\alpha .$$

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_{\alpha\beta}"] \arrow[d, "x_\alpha"'] \arrow[dr, "y_\alpha"] & E_\beta \\ X \arrow[r, "h"'] & Y \end{tikzcd} .$$

<u>Une limite inductive de la famille</u> $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ <u>par les</u> $\mathcal{C}$-<u>morphismes</u> $(f_{\alpha\beta})_{\alpha\leqslant\beta}$ <u>est, par définition, un objet initial de</u> $\mathcal{C}_S$ <u>(s'il en existe)</u>.

On la note alors :

$$((\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leqslant\beta}) , \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}) ,$$

où les $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ désignent les $\mathcal{C}$-morphismes (uniques à un isomorphisme près),

$$f_\alpha : E_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha .$$

Si l'on introduit une catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$ définie par :

Un objet de $\mathcal{C}_\Sigma$ s'écrit $(X , \{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$, où X appartient à $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, et où les x_α appartiennent à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\alpha , X)$.

Un $\mathcal{C}_\Sigma$-morphisme

$$(X , \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \to (Y , \{y_\alpha\}_{\alpha\in I})$$

est un $\mathcal{C}$-morphisme

$$h : X \to Y ,$$

vérifiant, pour tout α de I,

$$y_\alpha = h \circ x_\alpha .$$

Une somme de la famille $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ est alors, par définition, un objet initial de $\mathcal{C}_\Sigma$ (s'il en existe). On le note :

$$(\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha , \{i_\alpha\}_{\alpha\in I}) \quad \text{cu bien} \quad (\sum_{\alpha\in I} E_\alpha , \{i_\alpha\}_{\alpha\in I}) .$$

Les $\mathcal{C}$-morphismes $i_\alpha : E_\alpha \to \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha$ sont appelés injections (canoniques) de E_α dans $\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha$.

La catégorie $\mathcal{C}_S$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}_\Sigma$, par suite, si

$$(\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\ \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leqslant\beta}) \qquad \text{et} \qquad (\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha)$$

existent, on déduit qu'il existe un $\mathcal{C}_\Sigma$-morphisme, et un seul,

$$h : (\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\ \{i_\alpha\}_{\alpha\in I}) \to ((\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha \,,\ \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leqslant\beta}) \,,\ \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}) \ ,$$

c'est-à-dire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, noté encore h,

$$h : \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha \ ,$$

qui vérifie, pour tout α de I,

$$f_\alpha = h \circ i_\alpha \ .$$

<u>Si la catégorie</u> $\mathcal{C}$ <u>vérifie l'axiome</u> (4), <u>il existe une application</u> χ , <u>et une seule, de la limite inductive des ensembles</u> $j(E_\alpha)$ <u>dans l'ensemble sous-jacent à</u> $\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha$, <u>qui vérifie,</u> $\forall\ \alpha \in I$,

$$j(f_\alpha) = \chi \circ \varphi_\alpha \ ,$$

<u>où</u> φ_α <u>désigne l'application de</u> $j(E_\alpha)$ <u>dans</u> $\varinjlim j(E_\alpha)$.

En effet, le système $(j(E_\alpha) \,,\ \{j(f_{\alpha\beta})_{\alpha\leqslant\beta}\})_{\alpha\in I}$ est un système inductif dans la catégorie $\mathcal{E}$ des ensembles.

On peut donc considérer la catégorie auxiliaire $\mathcal{E}_S$, dont les objets s'écrivent $(X \,,\ \{x_\alpha\}_{\alpha\in I})$, et où X est un ensemble, les x_α sont des applications,

$$x_\alpha : \ j(E_\alpha) \to X \ ,$$

et dont les morphismes sont définis de façon analogue à ceux de $\mathcal{E}_P$. Par définition, la limite inductive : $[(\varinjlim j(E_\alpha) \,,\ \{j(f_{\alpha\beta})\}_{\alpha\leqslant\beta}) \,,\ \{\varphi_\alpha\}]$ est un objet initial de $\mathcal{E}_S$. La limite inductive admet, comme représentant, le quotient de la somme $\coprod_{\alpha\in I} j(E_\alpha)$ dans $\mathcal{E}$ par la relation d'équivalence associée aux applications $\{j(f_{\alpha\beta})\}_{\alpha\leqslant\beta}$. Comme

$$(j[(\varinjlim E_\alpha) \,,\ \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leqslant\beta}] \,,\ \{j(f_\alpha)\}_{\alpha\in I})$$

est un objet de $\mathcal{E}_S$, il existe une application, et une seule, χ , de $\varinjlim j(E_\alpha)$ dans $j(\varinjlim E_\alpha)$, vérifiant, $\forall\ \alpha \in I$,

$$\chi \circ \varphi_\alpha = j(f_\alpha) \ .$$

Lorsque la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie de plus l'axiome suivant :

$(5)_S$ Pour tout système inductif $(E_\alpha , \{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha\leqslant\beta})_{\alpha\in I}$ dans $\mathcal{C}$, l'application

$$\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathrm{Ob}\ \mathcal{E}_S$$

$$(X , \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}) \longmapsto (j(X) , \{j(x_\alpha)\}_{\alpha\in I})$$

est surjective,

alors, à une bijection près, l'ensemble sous-jacent à $\varinjlim E_\alpha$ est égal à la limite inductive des $j(E_\alpha)$.

Si l'axiome $(5)_S$ est vérifié, il existe un objet X de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$j(X) = \varinjlim j(E_\alpha) \quad ,$$

et un élément $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ de $\prod_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\alpha , X)$ vérifiant

$$(\beta \geqslant \alpha) \implies x_\alpha = x_\beta \circ f_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad \forall\, \alpha \in I \ , \quad j(x_\alpha) = \varphi_\alpha \ .$$

Comme $(\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_\alpha\}_{\alpha\in I})$ est un objet initial de $\mathcal{C}_S$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, $h : \varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha \to X$, tel que, $\forall\, \alpha \in I$, $f_\alpha = x_\alpha \circ h$. On obtient donc qu'il existe une application, et une seule, χ , de $\varinjlim j(E_\alpha)$ dans $j(\varinjlim E_\alpha)$, qui vérifie, $\forall\, \alpha \in I$, $\chi \circ \varphi_\alpha = j(f_\alpha)$; et il existe une application $j(h)$ de $j(\varinjlim E_\alpha)$ dans $\varinjlim j(E_\alpha)$, qui vérifie, pour tout α de I , $j(h) \circ j(f_\alpha) = \varphi_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
j(\varinjlim E_\alpha) \arrow[rr, shift left, "j(h)"] & & \varinjlim j(E_\alpha) \arrow[ll, shift left, "\chi"] \\
& j(E_\alpha) \arrow[ul, "j(f_\alpha)"] \arrow[ur, "\varphi_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

L'unicité de χ entraîne la surjectivité de l'application $\coprod_{\alpha\in I} j(f_\alpha)$ de $\coprod_{\alpha\in I} j(E_\alpha)$ dans $j(\varinjlim E_\alpha)$.

Or l'application $\coprod_{\alpha\in I} \varphi_\alpha$ de $\coprod_{\alpha\in I} j(E_\alpha)$ dans $\varinjlim j(E_\alpha)$ est surjective, si l'on choisit le représentant de $\varinjlim j(E_\alpha)$ défini comme quotient de la somme.

On peut en déduire que χ et $j(h)$ sont inverses l'un de l'autre et que, par suite, les ensembles $j(\varinjlim E_\alpha)$ et $\varinjlim j(E_\alpha)$ sont les mêmes, à une bijection près.

Dans la suite, on notera : axiome (5), la conjonction des axiomes $(5)_P$ et $(5)_S$.

La catégorie des espaces topologiques, ou bien celle des espaces uniformes, vérifie l'axiome (5).

(d) Si I désigne un ensemble quelconque, et $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$ indexée par I, on suppose que, pour tout α de I, il existe un objet A_α de $\mathcal{C}$, et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_\alpha : E_\alpha \to A_\alpha$. On suppose de plus que tous les objets $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ admettent le même ensemble sous-jacent, et celui-ci est noté E.

On introduit alors une sous-catégorie $\mathcal{C}'_S$ de $\mathcal{C}_\Sigma$; $\mathcal{C}'_S$ est la catégorie dont les objets s'écrivent $(X , \{x_\alpha\})_{\alpha\in I}$, où X est un objet de $\mathcal{C}$ et où, pour tout α, x_α appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E_\alpha , X)$ et vérifie : Il existe y_α appartenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_\alpha , X)$, satisfaisant à $x_\alpha = y_\alpha \circ f_\alpha$. Les $\mathcal{C}'_S$-morphismes sont définis comme les $\mathcal{C}_\Sigma$-morphismes.

<u>Une limite inductive des</u> $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ <u>par les</u> $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ <u>est, par définition, un objet initial de</u> $\mathcal{C}'_S$ (<u>s'il en existe</u>).

On le note :

$$\left(\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_\alpha\}_{\alpha\in I}\right) , \{f'_\alpha\}_{\alpha\in I} .$$

De plus, si la catégorie $\mathcal{C}$ vérifie un axiome analogue à $(5)_S$, l'ensemble sous-jacent à $(\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_\alpha\}_{\alpha\in I})$ est alors égal à E. De plus, les applications $j(f'_\alpha) : E_\alpha \to E$ vérifient, pour tout α,

$$j(f'_\alpha) = j(f_\alpha) .$$

Par convention, on notera encore f_α les $\mathcal{C}$-morphismes,

$$f_\alpha : E_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha .$$

Comme $(\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_\alpha\}_{\alpha\in I})$ est un objet de $\mathcal{C}_\Sigma$, et que $(\coprod_{\alpha\in I} E_\alpha , \{i_\alpha\}_{\alpha\in I})$ est un objet initial de $\mathcal{C}_\Sigma$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul,

$$h : \coprod_{\alpha\in I} E_\alpha \to (\varinjlim_{\alpha\in I} E_\alpha , \{f_\alpha\}) ,$$

qui vérifie, pour tout α de I, $f_\alpha = h \circ i_\alpha$. Comme précédemment, on dira que h est la projection de la somme des E_α sur leur limite inductive.

(e) Dans la suite, on dira qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est stable par limite projective (resp. inductive) de puissance χ (où χ désigne un cardinal quelconque) si, pour tout système projectif (resp. inductif) indexé par un ensemble I préordonné de cardinal inférieur ou égal à χ, on peut définir une limite projective (resp. inductive) dans $\mathcal{C}$, et si, pour toute famille projective (resp. inductive)

$$(E_\alpha , f_\alpha)_{\alpha\in I} ,$$

vérifiant les conditions imposées précédemment, et indexée par un ensemble I de cardinal inférieur ou égal à χ, on peut aussi définir une limite projective (resp. inductive) dans $\mathcal{C}$.

On peut citer quelques exemples.

1° La catégorie des ensembles (dont les morphismes sont les applications) est une catégorie stable par limites inductives et projectives de toutes puissances.

2° La catégorie des espaces topologiques (dont les morphismes sont les applications continues) est, elle aussi, stable par limites inductives et projectives de toutes puissances.

3° La catégorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes, dont les morphismes sont les applications linéaires continues, est stable par limites inductives et projectives de toutes puissances.

4° La catégorie des espaces vectoriels topologiques métrisables est stable par limite projective dénombrable, mais non par limite inductive dénombrable.

5° La catégorie des espaces topologiques séparés est stable par limite projective de puissance quelconque, mais elle n'est pas stable par limite inductive finie.

6° La catégorie des espaces uniformes (dont les morphismes sont les applications uniformément continues) est stable par limites inductives et projectives de toutes puissances.

7° La sous-catégorie des espaces complets est stable par limite projective quelconque, mais non par limite inductive finie.

8° D'après le théorème suivant :

THÉORÈME. - Si E est un espace vectoriel topologique métrisable et complet, et si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors E/F est métrisable et complet.

On peut déduire que la catégorie des espaces vectoriels topologiques métrisables et complets est stable par limite inductive finie. D'autre part, cette catégorie est stable par limite projective dénombrable.

1. Classification de catégories
Systèmes déterminants d'objets

Dans la suite, $\mathcal{C}$ désignera une catégorie stable par limites projectives dénombrables et par limites inductives dénombrables. $\mathcal{E}$ désignera une sous-classe de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, stable par limites inductives et projectives finies. On se propose de faire une classification de certains objets de $\mathcal{C}$, obtenus à partir d'objets appartenant à $\mathcal{E}$, au moyen d'opérations que l'on définira.

1.1. Les classes $\mathcal{E}_\alpha$.

On peut faire deux classifications différentes analogues à celles effectuées pour les boréliens d'un espace pavé.

1° Première classification. - On utilise les notations suivantes :

$\mathcal{E}_0$ désigne la classe $\mathcal{E}$;

$\mathcal{E}_1$ désigne la classe, que l'on notera aussi $\mathcal{E}_\sigma$, des limites inductives dénombrables d'objets appartenant à la classe $\mathcal{E}$;

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{\sigma\delta}$ est la classe des objets limites projectives dénombrables d'objets appartenant à la classe $\mathcal{E}_\sigma$.

Par récurrence transfinie :

Si α est un ordinal de première espèce, lorsque α est pair, $\mathcal{E}_\alpha$ est la classe des objets limites projectives dénombrables d'objets de la classe $\mathcal{E}_{\alpha-1}$; lorsque α est impair, $\mathcal{E}_\alpha$ est la classe des objets limites inductives dénombrables d'objets de la classe $\mathcal{E}_{\alpha-1}$.

Si α est un ordinal de seconde espèce, $\mathcal{E}_\alpha$ est la classe des objets limites projectives dénombrables d'objets appartenant aux classes $\mathcal{E}_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

2° Seconde classification. - Comme précédemment, on se place dans la catégorie $\mathcal{C}$, et :

$\mathcal{E}'_0$ désigne la classe $\mathcal{E}$, c'est-à-dire $\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}_0$;

$\mathcal{E}'_1$ désigne la classe $\mathcal{E}_\delta$ des limites projectives dénombrables d'objets appartenant à la classe $\mathcal{E}$;

$\mathcal{E}'_2 = \mathcal{E}_{\delta\sigma}$ est la classe des objets limites inductives dénombrables d'objets de la classe $\mathcal{E}'_1$.

Puis, par récurrence transfinie :

Si α est un ordinal de première espèce, lorsque α est pair, on définit $\mathcal{E}'_\alpha$ par $\mathcal{E}'_\alpha = (\mathcal{E}'_{\alpha-1})_\sigma$; lorsque α est impair, $\mathcal{E}'_\alpha = (\mathcal{E}'_{\alpha-1})_\delta$.

Si α est un ordinal de seconde espèce, on définit $\mathcal{E}'_\alpha$ par $\mathcal{E}'_\alpha = (\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{E}_\beta)_\sigma$.

PROPOSITION 1.1.1. - <u>Pour tout ordinal</u> α , <u>les inclusions suivantes sont vérifiées</u> :

$$\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{E}'_{\alpha+1} \; ; \qquad \mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}_{\alpha+1} \; .$$

<u>Si</u> Ω <u>désigne le premier ordinal non dénombrable,</u> $\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E}'_\Omega$, <u>et cette classe est stable par limite inductive dénombrable et par limite projective dénombrable. De plus,</u> $\mathcal{E}_\Omega$ <u>est la plus petite classe contenant</u> $\mathcal{E}$, <u>et stable par ces deux opérations</u>.

<u>Démonstration</u>. - Puisque $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{E}_\sigma$, on peut déduire, par récurrence, que, pour tout ordinal α vérifiant $\alpha < \Omega$, on a $\mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}_{\alpha+1}$, et de même, $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{E}_\delta$, et, par suite, pour tout $\alpha < \Omega$, on a $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{E}'_{\alpha+1}$. On peut schématiser ce résultat par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_\sigma \subset \mathcal{E}_{\sigma\delta} \subset \dots \subset \mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{E}_{\alpha+1} \subset \dots \quad ,$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}'_0 \subset \mathcal{E}_\delta \subset \mathcal{E}_{\delta\sigma} \subset \dots \subset \mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}'_{\alpha+1} \subset \dots \quad ,$$

et, pour tout ordinal α ,

$$\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{E}'_{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}_{\alpha+1} \; .$$

On peut en déduire que

$$\bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{E}'_\alpha \; .$$

Il est évident que $\mathcal{E}_\Omega$ est stable par limite projective dénombrable. On peut démontrer que $\mathcal{E}_\Omega$ est stable par limite inductive dénombrable. On considère un système inductif dénombrable :

$$\{E_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}} \; , \quad \{f_{np}\}_{n\leq p} \; ,$$

où les E_n appartiennent à la classe $\mathcal{E}_\Omega$, et où les f_{np} sont des morphismes de $\mathcal{C}$. D'après la définition de $\mathcal{E}_\Omega$, chaque E_n s'écrit sous la forme :

$$E_n = \varprojlim (E^n_m)_{m\in\underset{\sim}{N}} \; ,$$

où $E^n_m \in \mathcal{E}_{\alpha^n_m}$ avec $\alpha^n_m < \Omega$.

L'ensemble d'ordinaux $\{\alpha_m^n\}_{(n,m)\in \underset{\sim}{N}\times\underset{\sim}{N}}$ est dénombrable ; par conséquent, il existe un ordinal α_0 vérifiant :

$$\forall\ (n\ ,\ m) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}\ , \quad \alpha_0 \geqslant \alpha_m^n \quad \text{et} \quad \alpha_0 < \Omega\ .$$

On déduit alors que

$$\forall\ (n\ ,\ m) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}\ , \quad E_m^n \in \mathcal{E}_{\alpha_0}\ .$$

On a alors deux cas :

1° Si α_0 est pair, $\mathcal{E}_{\alpha_0}$ est stable par limite projective dénombrable, et par suite, $\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$, $E_n \in \mathcal{E}_{\alpha_0}$, ce qui entraîne que E appartient à $\mathcal{E}_{\alpha_0+1}$;

2° Si α_0 est impair, $\mathcal{E}_{\alpha_0+1}$ est stable par limite projective dénombrable, donc, $\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$, $E_n \in \mathcal{E}_{\alpha_0+1}$, et, par conséquent, E appartient à $\mathcal{E}_{\alpha_0+2}$.

Or, si α_0 est strictement inférieur à Ω , il en est de même de $(\alpha_0 + 2)$, et on peut conclure que E appartient à $\mathcal{E}_\Omega$. Ceci entraîne que $\mathcal{E}_\Omega$ contient $\mathcal{E}'_\Omega$.

Un raisonnement analogue montre que $\mathcal{E}'_\Omega$ est stable par limite projective dénombrable, et par suite, $\mathcal{E}'_\Omega$ contient $\mathcal{E}_\Omega$; d'où résulte l'égalité.

Pour montrer que $\mathcal{E}_\Omega$ est la plus petite classe contenant $\mathcal{E}$, et stable par ces deux opérations, on raisonne par récurrence.

PROPOSITION 1.1.2. - <u>Soient</u> $\mathcal{C}$ <u>une catégorie vérifiant l'axiome</u> (4) <u>et l'axiome</u> (5), <u>stable par limites inductives et projectives dénombrables, et</u> $\mathcal{E}$ <u>une sous-classe de</u> Ob $\mathcal{C}$ <u>vérifiant certaines conditions qui seront précisées, lors de leur utilisation dans la démonstration, et notées</u> (α), (β), (γ), (δ), (ε).

<u>Alors, pour tout ordinal</u> $\alpha < \Omega$, <u>les inclusions</u> $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{E}_{\alpha+1}$ <u>et</u> $\mathcal{E}'_\alpha \subset \mathcal{E}'_{\alpha+1}$ <u>sont strictes</u>.

<u>Plus précisément, pour tout</u> $\alpha < \Omega$, <u>il existe un objet</u> B_α <u>de</u> $\mathcal{E}'_\alpha$ <u>qui n'appartient pas à</u> $\mathcal{E}_\alpha$, <u>et il existe un objet</u> D_α <u>de</u> $\mathcal{E}_\alpha$ <u>qui n'appartient pas à</u> $\mathcal{E}'_\alpha$.

<u>Démonstration</u>. - On peut d'abord remarquer que l'existence de D_α entraîne l'inégalité $\mathcal{E}'_\alpha \neq \mathcal{E}'_{\alpha+1}$ et que, de même, l'existence de B_α entraîne $\mathcal{E}_\alpha \neq \mathcal{E}_{\alpha+1}$. On démontrera donc seulement la seconde partie de la proposition.

(α) On suppose qu'il existe un ensemble I préordonné et filtrant à droite, et un système inductif $(E_i\ ,\ f_{ij})_{i\in I}$ contenu dans $\mathcal{E}$ et engendrant $\mathcal{E}$ au sens suivant :

$$[\forall\ F \in \mathcal{E}\ ,\quad \exists\ J \subset I\ :\ F = \varinjlim_{i\in J} (E_i\ ,\ f_{ij})]\ .$$

(β) On suppose de plus qu'il existe un objet E de $\mathcal{E}$ vérifiant :

$$\mathrm{Card}\ j(E) = \mathrm{Card}\ \mathcal{P}(I) \geqslant \aleph_1 \quad ,$$

où $\mathcal{P}(I)$ désigne l'ensemble des parties de I , et $\aleph_1$ le cardinal supérieur à $\aleph_0$, et que, pour tout couple (A , B) d'objets de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B)) \leqslant \aleph_1$.

Comme $\mathcal{E}$ est engendrée par $(E_i , f_{ij})_{i\in I}$, on peut définir une application surjective Ψ de $\mathcal{P}(I)$ sur $\mathcal{E}$ en posant, pour tout $J \in \mathcal{P}(I)$,

$$\begin{cases} \Psi(J) = \varinjlim\limits_{i\in J} (E_i , f_{ij}) , & \text{si cette limite inductive appartient à } \mathcal{E} , \\ \Psi(J) = E , & \text{si } \varinjlim\limits_{i\in J} (E_i , f_{ij}) \text{ n'appartient pas à } \mathcal{E} . \end{cases}$$

Or, si E a un cardinal égal à celui de $\mathcal{P}(I)$, on peut définir une application φ bijective de $j(E)$ sur $\mathcal{P}(I)$, et l'application $\Psi \circ \varphi$, que l'on notera f_0 , est une application surjective de E sur $\mathcal{E}$. On peut conclure en disant que f_0 est une fonction universelle de $j(E)$ sur $\mathcal{E}$.

On se propose de construire, pour toute classe $\mathcal{E}_\alpha$, et pour toute classe $\mathcal{E}'_\alpha$, une fonction universelle f_α de $j(E)$ sur $\mathcal{E}_\alpha$, et une fonction universelle g_α de $j(E)$ sur $\mathcal{E}'_\alpha$.

Si l'on note $[\mathcal{P}(I)]^{\underset{\sim}{N}}$ l'ensemble des suites infinies d'éléments de $\mathcal{P}(I)$: $(J_1 , \dots , J_n , \dots)$, alors

$$\mathrm{Card}[\mathcal{P}(I)]^{\underset{\sim}{N}} = [\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(I)]^{\aleph_0} \quad .$$

$$\begin{tikzcd}
j(E) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "e"] & \mathcal{P}(I) \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{E} \\
j(E)^{\underset{\sim}{N}} \arrow[r, "\varphi^{\underset{\sim}{N}}"] \arrow[d, dashed] & \mathcal{P}(I)^{\underset{\sim}{N}} \arrow[r, "\Psi_1"] & \mathcal{E}_1 \\
j(E)^{\underset{\sim}{R}} \arrow[r, "\varphi^{\underset{\sim}{R}}"] & \mathcal{P}(I)^{\underset{\sim}{R}} \arrow[r, "\Psi_\alpha"] & \mathcal{E}_\alpha \ .
\end{tikzcd}$$

Or on a supposé que $\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(I) \geqslant \aleph_1$, par suite

$$[\mathrm{Card}\ \mathcal{P}(I)]^{\aleph_0} = \mathrm{Card}\ \mathcal{P}(I) \quad ,$$

et, de même, $\mathrm{Card}\ j(E)^{\underset{\sim}{N}} = \mathrm{Card}\ j(E)$. On peut donc définir une application bijective e de $j(E)$ sur $j(E)^{\underset{\sim}{N}}$. De plus, pour toute famille dénombrable $(F_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$

d'objets de $\mathcal{C}$, on peut définir une surjection de $j(E)$ sur $\prod_{n\in\underset{\sim}{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F_n , F_{n+1})$:

$$x \longmapsto (\varphi_{x^{n,n+1}})_{\underset{\sim}{N}} .$$

On définit une application ψ_1 de $[\mathcal{P}(I)]^{\underset{\sim}{N}}$ dans $\mathcal{E}_1$, en posant

$$\psi_1(J_1 , \dots , J_n , \dots) = \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [\varinjlim_{i\in J_n} (E_i , f_{ij})] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\leqslant p} ,$$

c'est-à-dire, si on note (e_n) la n-ième composante de l'application e , on a, pour tout x de $j(E)$,

$$\psi_1 \circ \varphi^{\underset{\sim}{N}} \circ e(x) = \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [f_0(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\leqslant p} .$$

On note f_1 l'application $\psi_1 \circ \varphi^{\underset{\sim}{N}} \circ e$ et, puisque f_0 est une fonction universelle, de $j(E)$ sur $\mathcal{E}$, f_1 est une fonction universelle de $j(E)$ sur $\mathcal{E}_1$.

On définit ensuite une application f_2 de $j(E)$ sur $\mathcal{E}_2$ en posant, pour tout $x \in j(E)$,

$$f_2(x) = \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [f_1(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\geqslant p} .$$

On montre de même que f_2 est une fonction universelle de $j(E)$ sur $\mathcal{E}_2$.

Par récurrence transfinie, on peut définir, pour tout ordinal α de cardinal dénombrable, une fonction universelle f_α de $j(E)$ sur $\mathcal{E}_\alpha$.

Si α admet un prédécesseur $(\alpha - 1)$:

Lorsque α est impair,

$$\begin{aligned} f_\alpha : j(E) &\longrightarrow \mathcal{E}_\alpha \\ x &\longmapsto \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [f_{\alpha-1}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\leqslant p} ; \end{aligned}$$

Lorsque α est pair,

$$\begin{aligned} f_\alpha : j(E) &\longrightarrow \mathcal{E}_\alpha \\ x &\longmapsto \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [f_{\alpha-1}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\geqslant p} . \end{aligned}$$

Si α n'admet pas de prédécesseur, il existe une suite croissante

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, et l'on définit f_α par

$$f_\alpha : j(E) \longrightarrow \mathcal{E}_\alpha$$

$$x \longmapsto \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [f_{\alpha_n}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\geqslant p} .$$

Alors, pour tout $\alpha < \Omega$, on peut montrer par récurrence que, pour tout $x \in j(E)$, $f_\alpha(x)$ appartient à $\mathcal{E}_\alpha$, et que, pour tout F appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$, il existe $x \in j(E)$ tel que $f_\alpha(x) = F$. De même, par récurrence transfinie, on peut définir une fonction universelle g_α de $j(E)$ dans $\mathcal{E}'_\alpha$. Comme $\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, on pose $g_0 = f_0$.

Si α admet un prédécesseur $(\alpha - 1)$:

Lorsque α est impair,

$$g_\alpha : j(E) \longrightarrow \mathcal{E}'_\alpha$$

$$x \longmapsto \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [g_{\alpha-1}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\geqslant p} ;$$

Lorsque α est pair,

$$g_\alpha : j(E) \longrightarrow \mathcal{E}'_\alpha$$

$$x \longmapsto \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [g_{\alpha-1}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\leqslant p} .$$

Si α n'admet pas de prédécesseur, on considère la suite (α_n) définie précédemment, et l'on définit :

$$g_\alpha : j(E) \longrightarrow \mathcal{E}'_\alpha$$

$$x \longmapsto \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}^*} [g_{\alpha_n}(e_n(x))] , (\varphi_{e_0(x)^{n,p}})_{n\leqslant p} .$$

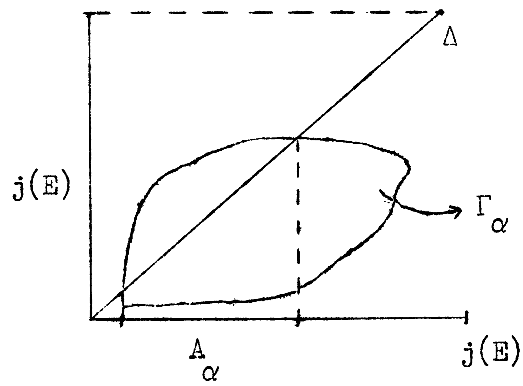
Dans la suite, α désigne un ordinal inférieur à Ω .

On étudie le sous-ensemble A_α de $j(E)$:

$$A_\alpha = \{x \in E : \; x \in j[f_\alpha(x)]\} .$$

A_α est la projection sur $j(E)$ de l'intersection de la diagonale Δ de $j(E \times E)$ et du graphe Γ_α de l'application χ_α de $j(E)$ dans $\mathcal{P}[j(E)]$ définie par :

$$\chi_\alpha(x) = j(E) \cap j[f_\alpha(x)] \ .$$



D'après un théorème sur la théorie des ensembles, $B_\alpha = \complement A_\alpha$ n'est pas une valeur de χ_α, par suite B_α n'est pas l'ensemble sous-jacent d'un objet de $\mathcal{E}_\alpha$.

Or la diagonale Δ de $E \times E$ appartient à $\mathcal{E}$:

(γ) Si l'on peut définir f_α de manière que Γ_α soit sous-jacent à un objet appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$, et si la catégorie $\mathcal{E}$ vérifie :

(δ) Pour tout objet E' contenu dans $E \times E$ et appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$, la projection sur $j(E)$ de $j(E' \cap \Delta)$ est un ensemble sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}_\alpha$:

Alors on peut déduire que A_α, qui est la projection sur $j(E)$ de $\Delta \cap \Gamma_\alpha$, est sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}_\alpha$.

Si $\mathcal{E}$ satisfait à la condition supplémentaire :

(ε) Pour tout A contenu dans E et appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$, le complémentaire de $j(A)$ dans $j(E)$, $\complement j(A)$, est l'ensemble sous-jacent d'un objet de $\mathcal{E}'_\alpha$;

On peut alors conclure que $B_\alpha = \complement A_\alpha$ est un ensemble sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}'_\alpha$.

Pour tout α, on peut donc déterminer un ensemble B_α sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}'_\alpha$, et non de $\mathcal{E}_\alpha$.

Si l'on considère le graphe dans $j(E) \times j(E)$ de l'application ζ_α définie par

$$\zeta_\alpha(x) = j(E) \cap j[g_\alpha(x)] \ ,$$

et si l'on définit C_α comme la projection de l'intersection de Δ et du graphe G_α de ζ_α sur $j(E)$; si $\mathcal{E}$ vérifie les conditions (α), (β), (γ) et (δ'), (ε'), analogues à (δ), (ε) après échange de $\mathcal{E}'_\alpha$ et de $\mathcal{E}_\alpha$, alors C_α est sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}'_\alpha$, et son complémentaire D_α dans $j(E)$ est sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}_\alpha$. Or

$$D_\alpha = \{x \in E : \quad x \notin \zeta_\alpha(x)\} \quad ,$$

par suite, D_α n'est pas sous-jacent à un objet de $\mathcal{E}'_\alpha$.

On peut donc conclure, comme précédemment, que, pour tout $\alpha < \Omega$, il existe un objet appartenant à $\mathcal{E}_\alpha$, et non à $\mathcal{E}'_\alpha$.

COROLLAIRE 1.1.2.1. - Soient $\mathcal{C}$ la catégorie des espaces topologiques, et $\mathcal{E}$ la sous-classe de Ob $\mathcal{C}$ constituée par les espaces polonais. Les morphismes de $\mathcal{C}$ sont les injections. Alors, pour tout ordinal α inférieur à Ω , il existe un objet D_α de $\mathcal{E}_\alpha$ qui n'appartient pas à $\mathcal{E}'_\alpha$.

Démonstration. - Les espaces polonais sont les espaces métrisables séparables sur lesquels il existe des distances compatibles avec les topologies qui en fassent des espaces complets.

Pour qu'un espace soit polonais, il faut et il suffit qu'il soit homéomorphe à un G_δ de $[0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}$; par suite, comme les espaces sont définis à un isomorphisme près, on peut déduire que

$$\text{Card } \mathcal{E} = \text{Card}\{P : \quad P \text{ étant un } G_\delta \text{ de } [0 , 1]^{\underset{\sim}{N}}\} \quad ,$$

et

$$\text{Card } \mathcal{E} = \text{Card } \underset{\sim}{R} = 2^{\aleph_0} \quad .$$

L'espace $E = [0 , 1]$ est donc un polonais vérifiant

$$\text{Card } E = \text{Card } \mathcal{E} = c \quad .$$

De plus, pour tout couple de polonais (A , B) , le cardinal de l'ensemble des fonctions continues de A dans B est inférieur ou égal à c .

D'après un résultat de W. SIERPINSKI, on peut alors définir une fonction universelle χ_0 de E sur l'ensemble des ouverts de E , telle que son graphe Γ_0 soit un ouvert de $E \times E$.

Si F est un espace de $\mathcal{E}$, et si $(P_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est une suite de sous-espaces de F , munie des morphismes constitués par les injections :

$$P_n \cap P_m \longrightarrow P_n \qquad (\forall\ (n , m) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}) \quad ,$$

alors

$$\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} P_n \simeq \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} P_n \quad ,$$

et

$$\bigcap_{n\in\underset{\sim}{N}} P_n \simeq \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}} P_n \quad .$$

Par suite, on peut définir les applications χ_α de E sur les objets de $\mathcal{E}_\alpha$ contenus dans E en posant, pour tout ordinal α de cardinal dénombrable :

Si α admet un prédécesseur $(\alpha - 1)$:

-Lorsque α est pair,

$$\chi_\alpha(x) = \bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} \chi_{\alpha-1}(e_n(x)) \quad ;$$

-Lorsque α est impair,

$$\chi_\alpha(x) = \bigcap_{n\in\underset{\sim}{N}} \chi_{\alpha-1}(e_n(x)) \quad .$$

Si α est de seconde espèce : $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$,

$$\chi_\alpha(x) = \bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} \chi_{\alpha_n}(e_n(x)) \quad .$$

Les χ_α sont des fonctions universelles de E dans $\mathcal{E}_\alpha \cap \mathcal{P}(E)$, et on peut déterminer des fonctions e_n continues ($\prod_{n\in\underset{\sim}{N}} e_n$ est une application bijective $E \to E^{\underset{\sim}{N}}$), ce qui entraîne que, pour tout α , le graphe Γ_α de χ_α est de classe borélienne G_α dans $E \times E$, et par suite appartient à la catégorie $\mathcal{E}'_\alpha$. La condition (γ) est donc réalisée.

Pour étudier la condition (δ), on considère un sous-espace E' de $E \times E$ qui appartienne à $\mathcal{E}$. Alors E' est un G_δ de $E \times E$. Or la diagonale Δ est un fermé de $E \times E$, c'est donc aussi un G_δ de $E \times E$; d'où il s'ensuit que $E' \cap \Delta$ est un G_δ de $E \times E$, c'est donc un polonais.

L'ensemble $p_E(E' \cap \Delta)$, projection sur E de $E' \cap \Delta$, est donc l'image bicontinue bijective d'un polonais dans un polonais, c'est donc encore un polonais, c'est-à-dire un objet de $\mathcal{E}$.

Pour montrer que E vérifie la condition (ε), on désigne par A un sous-ensemble de E appartenant à $\mathcal{E}$, alors A est un G_δ de E , et par suite, son complémentaire $\complement A$ est un F_σ de E . Or tout fermé de E est un G_δ , donc appartient à $\mathcal{E}$, par suite, $\complement A$ appartient à $\mathcal{E}_1$. On peut donc conclure, de manière analogue à celle de la proposition 1.1.2, que, pour tout $\alpha < \Omega$, si $A \in \mathcal{E}'_\alpha$, alors $\complement A \in \mathcal{E}_\alpha$.

De la proposition 1.1.2, on déduit alors que, si C_α est la projection sur E de $\Gamma_\alpha \cap \Delta$, C_α appartient à $\mathcal{E}'_\alpha$, et par suite $D_\alpha = \complement C_\alpha$ appartient à $\mathcal{E}_\alpha$. Or D_α n'appartient pas à $\mathcal{E}'_\alpha$. On a donc bien déterminé un objet D_α de $\mathcal{E}_\alpha$ qui n'appartient pas à $\mathcal{E}'_\alpha$.

1.2. Systèmes déterminants d'objets.

Définitions et notations. - Soient $\underset{\sim}{S}$ l'ensemble des suites finies de nombres entiers, et $\underset{\sim}{\Sigma}$ l'ensemble des suites infinies. On notera par des lettres latines : $r, s, t, \ldots$ les suites finies, et par des lettres grecques : $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ les suites infinies. On écrira $\ell(s)$ la longueur de la suite s.

Si r et s sont deux suites, on écrira $r \prec s$ si r est une section commençante de s ; si ρ est une suite infinie, on écrira de même $r \prec \rho$ si r est une section commençante de ρ.

Pour s appartenant à $\underset{\sim}{S}$ (respectivement σ appartenant à $\underset{\sim}{\Sigma}$), on notera C_s (resp. $\mathcal{C}_\sigma$) l'ensemble des sections commençantes de s (resp. de σ).

On écrira $r \leqslant s$, si $\ell(r) = \ell(s)$, et si chaque terme de r est inférieur ou égal au terme de même rang de s. Si ρ et σ sont deux suites infinies, on écrira $\rho \leqslant \sigma$, si chaque terme de ρ est inférieur ou égal au terme de même rang de σ.

Si $s \in \underset{\sim}{S}$, on notera D_s l'ensemble des suites r vérifiant $r \leqslant s$; et si $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$, on notera de même D_σ l'ensemble des suites ρ vérifiant $\rho \leqslant \sigma$.

Si s (resp. σ) est obtenue en prolongeant l'une de ses sections commençantes, s', par des zéros, on identifiera s (resp. σ) et s'.

Cette identification injecte $\underset{\sim}{S}$ dans $\underset{\sim}{\Sigma}$ de manière canonique.

Les relations " $\prec$ " et " $\leqslant$ " sont deux relations de préordre large sur $\underset{\sim}{\Sigma}$.

Le complémentaire de C_s dans $\underset{\sim}{\Sigma}$ sera noté I_s, et le complémentaire de D_s sera noté J_s.

Définition d'un "système déterminant d'objets". - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie stable par limites projectives dénombrables et par limites inductives de puissance égale à celle des réels, c'est-à-dire $\aleph_0^{\aleph_0}$.

Soit $\mathcal{E}$ une sous-classe de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

Je désigne par $\mathcal{E}$-système déterminant d'objets, toute application Δ vérifiant :

$$\Delta : \underset{\sim}{S} \longrightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{P}(\mathcal{C}\text{-morphismes}) \times \mathcal{P}(\mathcal{C}\text{-morphismes})$$

$$s \longmapsto (E(s), \{f_{ss'}\}_{s' \in C_s}, \{f_{rs}\}_{r \in D_s}),$$

où $E(s)$ est un objet de $\mathcal{E}$, $f_{ss'}$ un $\mathcal{C}$-morphisme de $E(s)$ dans $E(s')$, et f_{rs} un $\mathcal{C}$-morphisme de $E(r)$ dans $E(s)$.

Les morphismes $\{f_{ss'}\}_{s'<s}$ et $\{f_{rs}\}_{r\leqslant s}$ doivent en outre satisfaire aux conditions suivantes :

(a) $\forall\, s \in \underset{\sim}{S}$, f_{ss} = identité sur $E(s)$;

(b) Si s est une suite obtenue en prolongeant s' par des zéros, alors $E(s) = E(s')$, et $f_{ss'}$ est l'identité ;

(c) Si $s'' < s' < s$, alors $f_{s's''} \circ f_{ss'} = f_{ss''}$;

(d) Si $r \leqslant s \leqslant t$, alors $f_{st} \circ f_{rs} = f_{rt}$;

(e) De plus, ces applications doivent vérifier :

$$(s' < s\ ,\ r \leqslant s\ ,\ r' \leqslant s'\ ,\ r' < r) \implies (f_{ss'} \circ f_{rs} = f_{r's'} \circ f_{rr'}) \ .$$

Ces morphismes sont schématisés ci-dessous.

Pour toute suite infinie $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$, le système $\{E(s)\ ,\ f_{ss'}\}_{s<\sigma}$ est un système projectif. On peut donc définir $E(\sigma) = \varprojlim E(s)_{s<\sigma}$ dans la catégorie $\mathcal{C}$.

Si ρ et σ sont deux suites infinies vérifiant $\rho \leqslant \sigma$, alors, pour toutes suites $r < \rho$, $s < \sigma$, avec $\ell(r) = \ell(s)$, on a défini un morphisme f_{rs} de $E(r)$ dans $E(s)$. Par suite, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{\rho\sigma}$ de $E(\rho)$ dans $E(\sigma)$ vérifiant, si l'on appelle $f_{\sigma s}$ l'application canonique de $E(\sigma)$ dans $E(s)$, et $f_{\rho r}$ celle de $E(\rho)$ dans $E(r)$:

$$f_{\sigma s} \circ f_{\rho\sigma} = f_{rs} \circ f_{\rho r} \ .$$

Le système $\{E(\sigma)\ ,\ f_{\rho\sigma}\}_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}}$ est alors un système inductif de puissance égale à $\aleph_0^{\aleph_0}$ dans la catégorie $\mathcal{C}$.

On appelle noyau du système déterminant Δ, et on note $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, l'objet de $\mathcal{C}$ défini par :

$$\Delta(\underset{\sim}{\Sigma}) = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} E(\sigma)\ ,\ (f_{\rho\sigma}) \ .$$

On désigne par $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$ la sous-classe de $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, dont les objets sont des noyaux de $\mathcal{E}$-systèmes déterminants, et ces objets sont dits $\mathcal{E}$-analytiques ; plus généralement, on note $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ la sous-classe de $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$, dont les objets sont des limites inductives par des $\mathcal{C}$-morphismes d'objets $E(\sigma)$ de $\mathcal{C}$ indexés par $\underset{\sim}{\Sigma}$, qui soient des limites projectives de systèmes projectifs de $\mathcal{E}$:

$$E(\sigma) = \varprojlim_{s<\sigma} E(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s} \ ,$$

où les $E(s)$ soient des objets de $\mathcal{E}$, et les $f_{ss'}$ des $\mathcal{C}$-morphismes de $E(s)$ dans $E(s')$, c'est-à-dire :

$$E \in \mathcal{A}(\mathcal{E}) \iff E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \big(\varprojlim_{s<\sigma} E(s).\{f_{ss'}\}_{s'<s}\big) \,, \ \{f_\sigma\} \,.$$

$$\begin{tikzcd}
E(s') & E(s) \arrow[l, "s' < s"', "f_{ss'}"] & E(\sigma) \arrow[l, "s < \sigma"', "f_{\sigma s}"] \\
E(r') \arrow[u, "r' \leqslant s'", "f_{r's'}"'] & E(r) \arrow[l, "f_{rr'}", "r' < r"'] \arrow[u, "r \leqslant s", "f_{rs}"'] & E(\rho) \arrow[l, "f_{\rho r}", "r < \rho"'] \arrow[u, "\rho \leqslant \sigma", "f_{\rho\sigma}"']
\end{tikzcd}$$

<u>Les classes</u> $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ <u>et</u> $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$ <u>peuvent être définies dans les espaces pavés</u>. - Si Ω désigne un ensemble, on appelle pavage de Ω, tout ensemble $\mathcal{E}$ contenu dans l'ensemble des parties de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Lorsque l'on considère la catégorie $\mathcal{C}$, dont les objets sont les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, et dont les morphismes sont les injections canoniques d'un sous-ensemble de Ω dans un autre qui le contienne, on peut étudier le cas où la sous-classe $\mathcal{E}$ de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ est un pavage de Ω.

- <u>La classe</u> $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$: Si E appartient à la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$, il peut s'écrire

$$E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \big(\varprojlim_{s<\sigma} E(s) \,,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s} \,,\ \{f_{rs}\}_{r \leqslant s}\big) \,,$$

où les $E(s)$ appartiennent au pavage $\mathcal{E}$. Comme les $\{f_{ss'}\}_{s'<s}$ et les $\{f_{rs}\}_{r\leqslant s}$ appartiennent à $\mathrm{Hom}\ \mathcal{C}$, on peut déduire que l'égalité précédente est équivalente à

$$E = \bigcup_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \big(\bigcap_{s<\sigma} E(s)\big) \,, \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} s' < s \implies E(s) \subset E(s') \\ r \leqslant s \implies E(r) \subset E(s) \end{cases} .$$

Par conséquent, E est alors noyau d'un système déterminant régulier construit sur le pavage $\mathcal{E}$.

- <u>La classe</u> $\mathcal{A}(\mathcal{E})$: De même, si E appartient à la classe $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, il peut s'écrire :

$$E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \big(\varprojlim_{s<\sigma} E(s) \,,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s}\big) \,,\ f_\sigma \,,$$

c'est-à-dire :

$$E = \bigcup_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \big[\bigcap_{s<\sigma} E(s)\big] \,, \qquad \text{avec} \ \ (s' < s \implies E(s) \subset E(s')) \,.$$

E est encore noyau d'un système déterminant régulier sur $\mathcal{E}$, ce système déterminant n'étant plus soumis à la condition

$$(r \leq s \implies E(r) \subset E(s)) \quad .$$

Cependant, les ensembles $F(s) = \bigcup_{r \leq s} E(s)$ sont des réunions finies d'ensembles du pavage $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ est stable par réunions finies, ils appartiennent alors à $\mathcal{E}$. L'ensemble E peut encore s'écrire :

$$E = \bigcup_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} [\bigcap_{s < \sigma} F(s)] \ , \qquad \text{les } F(s) \text{ vérifiant } \begin{cases} s' < s \implies F(s) \subset F(s') & , \\ r \leq s \implies F(r) \subset F(s) & . \end{cases}$$

On peut donc conclure que E appartient à $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$.

Dans ce cas particulier, les deux classes $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$ sont donc égales. Il n'en est pas de même dans toutes les catégories, car on ne peut pas, en général, définir, si $E \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$, la $\varinjlim_{r \leq s} E(r)$, car, précisément, les $\{f_{rs}\}_{r \leq s}$ ne sont pas alors définis.

THÉORÈME 1.2.1. - Si $\mathcal{E}$ est une sous-classe des objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ stable par limite projective dénombrable et par limite inductive de puissance $2^{\aleph_0}$, alors la classe $\mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})]$ est égale à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Démonstration. - Pour montrer que $\mathcal{A}$ est une opération idempotente, il suffit de montrer que $\mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})]$ est contenue dans $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, car l'inclusion inverse est évidente.

Si E est un objet de $\mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})]$, alors E s'écrit sous la forme :

$$E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \{E(\sigma) \ , \ f_\sigma\} \quad ,$$

où f_σ est un $\mathcal{C}$-morphisme de $E(\sigma)$ dans E , et où chaque $E(\sigma)$ est une limite projective d'un système projectif :

$$E(\sigma) = \varprojlim_{s < \sigma} \{E(s) \ , \ \{f_{ss'}\}_{s' < s}\} \quad ,$$

et les objets $E(s)$ appartiennent à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

De même, puisque les objets $E(s)$ appartiennent à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, ils s'écrivent :

$$E(s) = \varinjlim_{\tau \in \underset{\sim}{\Sigma}} \{E_s(\tau) \ , \ f^s_\tau\} \quad ,$$

où f^s_τ est un $\mathcal{C}$-morphisme de $E_s(\tau)$ dans $E(s)$, et où chaque $E_s(\tau)$ s'écrit :

$$E_s(\tau) = \varprojlim_{t<\tau} \{E_s(t)\ ,\ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}\}\ ,$$

les objets $E_s(t)$ appartenant à $\mathcal{E}$.

Si l'on récapitule, E s'écrit donc :

$$E = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} [\varprojlim_{s<\sigma} \{\varinjlim_{\tau\in\underset{\sim}{\Sigma}} \{\varprojlim_{t<\tau} E_s(t)\ ,\ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}\}\ ,\ f^s_\tau\}\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s}]\ ,\ f_\sigma\ .$$

Si l'on fixe $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$, et si l'on note

$$E_s(\tau) = \varprojlim_{t<\tau} E_s(t)\ ,\ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}\ ,$$

on peut remarquer que l'objet $E(\sigma)$ est défini par :

$$E(\sigma) = \varprojlim_{s<\sigma} \{\varinjlim_{\tau\in\underset{\sim}{\Sigma}} E_s(\tau)\ ,\ f^s_\tau\}\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s}\ .$$

Si l'on considère le produit, dans la catégorie $\mathcal{C}$, des $E(s)$ pour $s < \sigma$, on note $p_{\sigma s}$ le $\mathcal{C}$-morphisme du produit $\prod_{s<\sigma} E(s)$ dans $E(s)$. Ce produit est un objet final, et il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, h_σ : $\varprojlim_{s<\sigma} E(s)$ dans $\prod_{s<\sigma} E(s)$, qui vérifie :

$$(s < \sigma) \implies f_{\sigma s} = p_{\sigma s} \cdot h\ .$$

On étudie ensuite l'objet $F(\sigma)$ défini par :

$$F(\sigma) = \varinjlim_{(\tau_1 \dots \tau_n \dots)\in\underset{\sim}{\Sigma}^{N}} [\varprojlim_{s<\sigma} \{ \lim_{t<\tau_{\ell(s)}} E_s(t)\ ,\ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}\}\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s}]\ ,\ \prod_{s<\sigma} f^s_{\tau_{\ell(s)}}$$

(**ci-après**, le diagramme des morphismes est représenté).
est licite, car l'objet

$$E_s(\tau_{\ell(s)}) = \lim_{t<\tau_{\ell(s)}} E_s(t)\ ,\ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}$$

existe dans la catégorie. Le -morphisme $f^s_{\tau_{\ell(s)}}$ admet $E_s(\tau_{\ell(s)})$ comme source, et $E(s)$ comme but. On peut, par suite, définir la limite projective :

$$F(\sigma\ ,\ \tau_1 \dots \tau_n) = \lim_{s<\sigma} (E(s)\ ,\ f^s_{\tau_{\ell(s)}}\ ,\ f_{\sigma s})\ .$$

Comme $\underset{s<\sigma}{\ } E_s(\tau_{\ell(s)})$ est un objet final d'une catégorie auxiliaire qui contient

$$
\begin{tikzcd}
E_s(t') & E_s(t) \arrow[l, "f^s_{tt'}"', "t'<t"] & E_s(\tau) \arrow[l, "f^{s,\tau}_t"', "t<\tau"] \arrow[d, "f^s_\tau"] & \\
 & & E(s) \arrow[dd, "f_{ss'}", "s'<s"'] & \\
\prod\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)}) \arrow[r, "\pi(\sigma,\tau_1\cdots\tau_n\cdots),s"] & E_s(\tau_{\ell(s)}) \arrow[ur, "f^s_{\tau_{\ell(s)}}"] & & \\
F(\sigma,\tau_1\cdots\tau_n\cdots) = \varprojlim\limits_{s<\sigma} (E(s), f^s_{\tau_{\ell(s)}}, f_{\sigma s}) \arrow[u, "k_\sigma"] \arrow[ur, "\varphi^{\sigma,s}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)}"] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi^\sigma_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)}"] & & E(s') & \\
F(\sigma) = \varinjlim\limits_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)\in\Sigma^N} F(\sigma,\tau_1\cdots\tau_n), \{(\prod\limits_{s<\sigma} f^s_{\tau_{\ell(s)}})\circ k_\sigma\} \arrow[r, "\varphi^r"] \arrow[rr, bend right, "\chi^\sigma"'] & \prod\limits_{s<\sigma} E(s) \arrow[ur, "p_{\sigma s'}"] & E(\sigma) \arrow[l, "h_\sigma"'] \arrow[u, "f_{\sigma s'}"', "s'<\sigma"] \arrow[r, "f_\sigma"] & E
\end{tikzcd}
$$

La définition de $F(\sigma)$ est licite, car l'objet

$$E_s(\tau_{\ell(s)}) = \varprojlim_{t<\tau_{\ell(s)}} E_s(t) \ , \ \{f^s_{tt'}\}_{t'<t}$$

existe dans la catégorie. Le $\mathcal{C}$-morphisme $f^s_{\tau_{\ell(s)}}$ admet $E_s(\tau_{\ell(s)})$ comme source, et $E(s)$ comme but. On peut, par suite, définir la limite projective :

$$F(\sigma \ , \ \tau_1 \ \ldots \ \tau_n \ \ldots) = \varprojlim_{s<\sigma} (E(s) \ , \ f^s_{\tau_{\ell(s)}} \ , \ f_{\sigma s}) \ .$$

Comme $\prod\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)})$ est un objet final d'une catégorie auxiliaire qui contient $F(\sigma\ ,\ \tau_1\ \ldots\ \tau_n\ \ldots)$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme k_σ , et un seul, de

$$F(\sigma\ ,\ \tau_1\ \ldots\ \tau_n\ \ldots) \quad \text{dans} \quad \prod_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)}) \quad ,$$

qui vérifie, si l'on note $\pi_{(\sigma,\tau_1\cdots\tau_n\cdots),s}$, le $\mathcal{C}$-morphisme de $\prod\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)})$ dans $E_s(\tau_{\ell(s)})$, et $\varphi^{\sigma,s}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)}$, le $\mathcal{C}$-morphisme de $\varprojlim\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)})$ dans $E_s(\tau_{\ell(s)})$,

$$\pi_{(\sigma,\tau_1\cdots\tau_n\cdots),s} \circ k_\sigma = \varphi^{\sigma,s}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)} \quad .$$

Le $\mathcal{C}$-morphisme

$$\varphi^{\sigma}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)} = \Big(\prod_{s<\sigma} f^s_{\tau_{\ell(s)}} \Big) \circ k_\sigma$$

admet $F(\sigma\ ,\ \tau_1\ \ldots\ \tau_n\ \ldots)$ comme source, et $\prod\limits_{s<\sigma} E(s)$ comme but. On peut donc définir la limite inductive des $F(\sigma\ ,\ \tau_1\ \ldots\ \tau_n\ \ldots)$ (pour $(\tau_1\ \ldots\ \tau_n\ \ldots)$ dans $\underset{\sim}{\Sigma}^N$) par les $\mathcal{C}$-morphismes $\varphi^{\sigma}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)}$. On note $F(\sigma)$ cette limite inductive. L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\sigma)\ ,\ \prod\limits_{s<\sigma} E(s))$ est alors réduit à un seul élément, que l'on note φ^σ .

Les $\mathcal{C}$-morphismes de $\varprojlim\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)})$ dans $E(\sigma)$ sont les

$$\varprojlim_{s'<s<\sigma} \big(f_{ss'} \circ f^s_{\tau_{\ell(s)}} \circ \varphi^{\sigma s}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)}\big) \quad .$$

Or les $\mathcal{C}$-morphismes des $\varprojlim\limits_{s<\sigma} E_s(\tau_{\ell(s)})$ dans $F(\sigma)$ sont les

$$\varphi^{\sigma}_{(\tau_1\cdots\tau_n\cdots)} = \Big[\prod_{s<\sigma} f^s_{\tau_{\ell(s)}} \Big] \circ k \quad .$$

Par suite des conditions de projectivité des $(E(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s})$, on peut déduire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme ζ_σ de $E(\sigma)$ dans $F(\sigma)$.

Comme $F(\sigma)\ ,\ \{p_{\sigma s} \circ \varphi_\sigma\}_{s<\sigma}$ appartient à la catégorie auxiliaire dont $(E(\sigma)\ ,\ \{f_{\sigma s} = p_{\sigma s} \circ h_\sigma\}_{s<\sigma})$ est un objet final, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme χ_σ , et un seul, de $F(\sigma)$ dans $E(\sigma)$, vérifiant :

$$\varphi^\sigma = h_\sigma \circ \chi_\sigma \quad .$$

Les $\mathcal{C}$-morphismes χ_σ et ζ_σ sont inverses l'un de l'autre et, par suite, $F(\sigma)$ et $E(\sigma)$ sont isomorphes dans $\mathcal{C}$.

Comme les limites inductives et projectives sont définies à un $\mathcal{C}$-isomorphisme près, on peut écrire E sous la forme :

$$E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \{ \varinjlim_{(\tau_1 \cdots \tau_n \cdots) \in \underset{\sim}{\Sigma}^{N}} [\varprojlim_{s < \sigma} \{ \varprojlim_{t < \tau_{\ell(s)}} E_s(t) , \{f^s_{tt'}\}_{t' < t}\} , \{f_{ss'}\}_{s' < s}] , \varphi^{\sigma}_{(\tau_1 \cdots \tau_n \cdots)}\} , \{f_\sigma\} \quad .$$

On peut définir une bijection de $\underset{\sim}{S}$ sur $\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{S}$ en associant à la suite $s \in \underset{\sim}{S}$, le couple (s_1 , s_2) de $\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{S}$, où s_1 est constituée par les termes de rangs impairs de s, et s_2 par les termes de rangs pairs.

On peut de plus remarquer que

$$(s' < s) \iff (s'_1 < s_1 \quad \text{et} \quad s'_2 < s_2) \quad .$$

Comme $\underset{\sim}{\Sigma}^{N}$ a le même cardinal que $\underset{\sim}{\Sigma}$, on peut définir une bijection α de $\underset{\sim}{\Sigma}$ sur $\underset{\sim}{\Sigma}^{N}$ en associant à la suite $\sigma = (n_1 , n_2 , \ldots , n_p , \ldots)$ de $\underset{\sim}{\Sigma}$, l'élément $(\tau_1 , \tau_2 , \ldots , \tau_p , \ldots)$ de $\underset{\sim}{\Sigma}^{N}$ obtenu de façon classique par le schéma :

$$\begin{array}{lllllll}
\tau_1 & = & n_1 & n_3 & n_6 & \cdots & n_{k+p-1} \; \cdots \\
\tau_2 & = & n_2 & n_5 & & & \\
\tau_3 & = & n_4 & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & n_{k+1} & & & \\
\tau_p & = & n_k & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & &
\end{array} \quad .$$

On peut alors voir que $(s \in \underset{\sim}{S}) \iff (\alpha(s) \in \underset{\sim}{S}^{(\underset{\sim}{N})})$, c'est-à-dire que $\alpha(s)$ est constitué par un nombre fini de suites finies.

De plus, si l'on pose

$$\alpha(s) = (t_1 , t_2 , \ldots , t_k) \qquad \text{et} \qquad \alpha(s') = (t'_1 , t'_2 , \ldots , t'_k) \quad ,$$

$$(s' < s) \implies (\forall\, i \in \{1 , 2 , \ldots , k\} : \; t'_i < t_i) \quad .$$

Pour toute suite σ de $\underset{\sim}{\Sigma}$, et toute section commençante finie s de σ, on pose :

$$F(s) = E_{s_1}(s_2) \quad ,$$

puis

$$\varprojlim_{s < \sigma} F(s) = \varprojlim_{s_1 < \sigma_1} [\varprojlim_{t < \text{la suite de rang } \ell(s_1) \text{ de } \alpha(s_2)} E_{s_1}(t)] \quad .$$

On obtient alors, si l'on note $\alpha(\sigma_2)_{\ell(s_1)}$ la suite de rang $\ell(s_1)$ dans $\alpha(\sigma_2)$,

$$E(\sigma_1) = \varinjlim_{\sigma_2 \in \underset{\sim}{\Sigma}} \left[\varprojlim_{s_1 < \sigma_1} \ \varprojlim_{t < \alpha(\sigma_2)_{\ell(s_1)}} E_{s_1}(t) \ , \ \{f^{s_1}_{tt'}\}_{t'<t} \ , \ \{f_{s_1 s_1'}\}_{s_1' < s_1} \right] \ ,$$

et

$$E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} \left[\varprojlim_{s < \sigma} F(s) \right] \ , \ (f^{\sigma_1} \circ \prod_{s_1 < \sigma_1} f^{s_1}_{\alpha(\sigma_2)_{\ell(s_1)}}) \ .$$

Par conséquent, E appartient bien à la classe $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

PROPOSITION 1.2.2. - <u>Si</u> $\mathcal{C}$ <u>est une catégorie stable par limite projective dénombrable et par limite inductive de puissance</u> $2^{\aleph_0}$, <u>et si</u> $\mathcal{E}$ <u>est une sous-classe de</u> $\mathcal{C}$, <u>les classes</u> $\mathcal{E}_\delta$, <u>des limites projectives de systèmes projectifs dénombrables d'objets de</u> $\mathcal{E}$, <u>et</u> $\mathcal{E}_\sigma$, <u>des limites inductives dénombrables d'objets de</u> $\mathcal{E}$, <u>sont deux sous-classes de</u> $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

<u>Démonstration.</u>

(a) On montre d'abord que $\mathcal{E}_\delta$ est contenu dans $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. Or, si E appartient à $\mathcal{E}_\delta$, il peut s'écrire :

$$E = \varprojlim_{n \in \underset{\sim}{N}} E_n \ , \ f_{np} \ ,$$

où les E_n sont des objets de $\mathcal{E}$, et les f_{np} des $\mathcal{C}$-morphismes de E_n dans E_p pour $n \geqslant p$.

Si, à toute suite $s \in \underset{\sim}{S}$, on associe

$$E(s) = E_{\ell(s)} \qquad \text{et} \qquad f_{ss'} = f_{\ell(s)\ell(s')} \ ,$$

alors, pour toute suite infinie σ , on a $E = E(\sigma)$. Or l'identité est un $\mathcal{C}$-morphisme, donc E appartient à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

(b) On montre ensuite que $\mathcal{E}_\sigma$ est contenu dans $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. Si E appartient à $\mathcal{E}_\sigma$, il s'écrit

$$E = \varinjlim_{n \in \underset{\sim}{N}} E_n \ , \ f_n \ ,$$

où $E_n \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{E}$, et où f_n est un $\mathcal{C}$-morphisme de E_n dans E .

A toute suite $s \in \underset{\sim}{S}$, on associe, l'objet $E(s)$ égal à E_n , où n désigne le premier entier de la suite s . Si s' est une section commençante de s , on a alors $E(s') = E(s)$, et l'on forme un système projectif en considérant, pour toute suite s' section commençante de s , l'identité de $E(s)$ sur $E(s')$. On a alors, pour toute suite infinie σ : $E(\sigma) = E_n$, où n est le premier entier de σ , et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_\sigma = f_n$ de $E(\sigma)$ dans E . De plus, $E = \varinjlim_{\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}} E(\sigma) , f_\sigma$; par suite E appartient bien à la classe $\mathrm{Ob}\ \mathcal{A}(\mathcal{E})$.

COROLLAIRE 1.2.2.1. - Dans la catégorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ est stable par limite projective de système projectif dénombrable et par limite inductive de système inductif dénombrable.

Démonstration. - De la proposition 1.2.2, on déduit que

$$[\mathcal{A}(\mathcal{E})]_\delta \text{ est contenu dans } \mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})] ,$$

et

$$[\mathcal{A}(\mathcal{E})]_\sigma \text{ est contenu dans } \mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})] .$$

Or, d'après le théorème 1.2.1, $\mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E})]$ est égal à $\mathcal{A}(\mathcal{E})$. On peut donc conclure que $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ est bien stable par limite projective dénombrable et par limite inductive dénombrable.

COROLLAIRE 1.2.2.2. - Dans la catégorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}_\Omega$ est une sous-classe de $\mathcal{A}(\mathcal{E})$.

Démonstration. - La classe $\mathrm{Ob}\ \mathcal{E}_\Omega$ est la plus petite classe contenant $\mathcal{E}$, et stable par limite projective dénombrable et par limite inductive dénombrable. Or, d'après le corollaire 1.2.2.1, la classe $\mathrm{Ob}\ \mathcal{A}(\mathcal{E})$ contient $\mathcal{E}$, et est stable par ces deux opérations ; par suite, $\mathrm{Ob}\ \mathcal{A}(\mathcal{E})$ contient $\mathrm{Ob}\ \mathcal{E}_\Omega$.

1.3. La classe $\mathcal{A}'(\mathcal{E})$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie stable par limite projective dénombrable et par limite inductive de puissance $2^{\aleph_0}$, et $\mathcal{E}$ une sous-classe de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$. On suppose que $\mathcal{C}$ vérifie l'axiome (4). On a désigné, dans le § 1.2, la classe des noyaux de $\mathcal{E}$-systèmes déterminants par $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$.

On note $\mathcal{A}'(\mathcal{E})$ la sous-classe de $\mathcal{A}_1(\mathcal{E})$, constituée par les noyaux de $\mathcal{E}$-systèmes déterminants vérifiant en outre l'axiome :

(f) Pour tout couple (s , s') de suites finies dont les longueurs vérifient $\ell(s) = \ell(s') + 1$, l'objet $E(s)$ est contenu dans la limite inductive :

$$\varinjlim_{n \in \underset{\sim}{N}} E(s' , n) , \{f_{(s',n),(s',p)}\}_{n \leq p} .$$

PROPOSITION 1.3.1. - Si $\mathcal{C}$ est une catégorie vérifiant l'axiome (5), la classe $\mathfrak{A}'(\mathcal{E})$ est contenue dans la classe $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$. Plus précisément, si

$$\Delta(\underset{\sim}{\Sigma}) = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} \left[\varprojlim_{s<\sigma} E(s) \;,\; \{f_{ss'}\}_{s'<s} \;,\; \{f_{rs}\}_{r\leq s}\right]$$

est un objet de la classe $\mathfrak{A}'(\mathcal{E})$, alors $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est égal à

$$\varprojlim_{p\in\underset{\sim}{N}} \left[\varinjlim_{\ell(s)=p} E(s) \;,\; \{f_{rs}\}_{r\leq s} \;,\; \{f_{ss'}\}_{s'<s}\right] .$$

Démonstration. - On justifie d'abord l'existence de l'objet $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ défini par

$$\delta(\underset{\sim}{\Sigma}) = \varprojlim_{p\in\underset{\sim}{N}} \left[\varinjlim_{\ell(s)=p} E(s) \;,\; \{f_{rs}\}_{r\leq s} \;,\; \{f_{ss'}\}_{s'<s}\right] .$$

Le système $\{E(s)\}_{\ell(s)=p}$, muni des $\mathcal{C}$-morphismes f_{rs} de $E(r)$ dans $E(s)$ pour $r \leq s$, forme un système inductif ; par suite, on peut définir

$$E(p) = \varinjlim_{\ell(s)=p} E(s) \quad ,$$

et, pour tout s vérifiant $\ell(s) = p$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme canonique, que l'on note f_{sp}, de $E(s)$ dans $E(p)$, ces $\mathcal{C}$-morphismes f_{sp} vérifiant :

$$(r \leq s \;,\; \ell(r) = \ell(s) = p) \implies (f_{rs} \circ f_{sp} = f_{rp}) \quad .$$

Si p et p' sont deux entiers vérifiant $p' \leq p$, on peut définir un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{pp'}$ de $E(p)$ dans $E(p')$, obtenu par limite inductive des $f_{ss'}$, pour $\ell(s) = p$ et $\ell(s') = p'$; on a, en effet, les diagrammes suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} r' < r \\ s' < s \\ s \geq r \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ccccc} E(r') & \xrightarrow{f_{r's'}} & E(s') & \xrightarrow{f_{s'p'}} & E(p') = \varinjlim_{\ell(s')=p'} E(s') \\ \uparrow{\scriptstyle f_{rr'}} & & \uparrow{\scriptstyle f_{ss'}} & & \uparrow{\scriptstyle f_{pp'}} \\ E(r) & \xrightarrow[f_{rs}]{} & E(s) & \xrightarrow[f_{sp}]{} & E(p) = \varinjlim_{\ell(s)=p} E(s) \end{array} \quad .$$

L'objet

$$(E(p') \;,\; \{f_{s'p'} \circ f_{ss'}\} \quad \text{avec} \quad \ell(s) = p \;,\; \ell(s') = p' \;,\; s' < s)$$

est un objet de la catégorie auxiliaire $\mathcal{C}_S$, dont

$$(E(p) \;,\; \{f_{sp}\}_{\ell(s)=p})$$

est un objet initial. Par suite, il existe un $\mathcal{C}_S$-morphisme, et un seul, du second dans le premier, c'est-à-dire : il existe un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, $f_{pp'}$ de $E(p)$ dans $E(p')$, vérifiant :

$$(\ell(s) = p\ ,\quad s' < s\ ,\quad \ell(s') = p') \implies (f_{pp'} \circ f_{sp} = f_{s'p'} \circ f_{ss'})\ .$$

Le système $\{E(p)\}_{p\in \underset{\sim}{N}}$, muni des $\mathcal{C}$-morphismes $\{f_{pp'}\}_{p'\leqslant p}$, est alors un système projectif ; on peut par conséquent définir

$$\delta(\underset{\sim}{\Sigma}) = \varprojlim_{p\in \underset{\sim}{N}} E(p)\ ,\ \{f_{pp'}\}_{p'\leqslant p}\ ,$$

et, pour tout entier p, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme canonique f_p de $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ dans $E(p)$.

La démonstration de la proposition 1.3.1 peut ensuite se faire en deux parties. Dans la partie (a), on montre que l'ensemble $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est égal à l'ensemble $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, et dans la partie (b), on montre que l'objet $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ de la catégorie $\mathcal{C}$ est égal à l'objet $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ (ces objets étant définis à un $\mathcal{C}$-isomorphisme près).

(a) L'ensemble $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est égal à l'ensemble $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$.

En effet, si l'on récapitule la définition de $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$:

$$(y \in \delta(\underset{\sim}{\Sigma})) \iff (\forall\ p \in \underset{\sim}{N}\ ,\quad \exists\ f_p(y) = y_p \in E(p))\ ,$$

et

$$(y_p \in E(p)) \iff (\exists\ s_p \text{ suite de longueur } p : s \geqslant s_p \implies \exists\, y_s \in E(s)\ ,\ f_{sp}(y_s) = y_p)\ ;$$

de plus, d'après la définition de $f_{pp'}(y_p) = y_{p'}$, on peut déduire que, pour $p' \leqslant p$, $s_{p'}$ est inférieure ou égale (au sens $\leqslant$) à la section commençante de longueur p' de s_p.

De même, si l'on récapitule la définition de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$; comme $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est la limite inductive des $E(\sigma)$ par les applications f_σ, on peut déduire que, pour tout x appartenant à $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, il existe une suite τ appartenant à $\underset{\sim}{\Sigma}$, telle que, pour tout σ de $\underset{\sim}{\Sigma}$ vérifiant $\sigma \geqslant \tau$, on puisse déterminer x_σ dans $E(\sigma)$ satisfaisant à $f_\sigma(x_\sigma) = x$. Or $E(\sigma) = \varprojlim_{s<\sigma} E(s)$; par suite, pour tout $s < \sigma$, il existe $x_s = f_{\sigma s}(x_\sigma)$ appartenant à $E(s)$.

Pour montrer que $\delta(\underset{\sim}{\Sigma}) = \Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, il suffit maintenant de prouver que, pour tout p dans $\underset{\sim}{N}$, la suite de longueur $(p + 1)$, notée précédemment s_{p+1}, et correspondant à $y_{p+1} = f_{p+1}(y)$, peut être choisie comme un prolongement de s_p. On montrera donc qu'il existe un entier n_p tel que y_{p+1} appartienne à $E[(s_p\ ,\ n_p)]$.

Or, d'après la condition (f) sur l'opération $\mathfrak{A}'$, on a

$$E(s_{p+1}) \subset \varinjlim_{n\in \underset{\sim}{N}} E(s_p\ ,\ n) \quad ;$$

par conséquent, il existe bien un entier n_p tel que l'on puisse prendre pour suite s_{p+1} la suite $(s_p\ ,\ n_p)$.

On peut donc déduire que, si y appartient à $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, il existe une suite $\tau = (n_0\ ,\ n_1\ ,\ \ldots\ ,\ n_p\ ,\ \ldots)$ de $\underset{\sim}{\Sigma}$ telle que, pour toute suite finie s supérieure ou égale (pour $\geqslant$) à la section commençante de longueur $\ell(s)$ de τ , on puisse définir y_s appartenant à $E(s)$, et vérifiant, si $\ell(s) = p$,

$$f_{sp}(y_s) = f_p(y) \quad .$$

Par suite y appartient à $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$. On peut conclure que les ensembles $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ et $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ sont égaux.

(b) On démontre ensuite que la $\mathcal{C}$-structure de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est identique à la $\mathcal{C}$-structure de $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$, c'est-à-dire que l'identité de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ sur $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme.

Dans la suite, j'adopterai la définition suivante :

<u>Si</u> E <u>et</u> E' <u>sont deux objets d'une catégorie</u> $\mathcal{C}$ <u>admettant le même ensemble sous-jacent, je dirai que</u> E <u>admet une</u> $\mathcal{C}$-<u>structure plus fine que celle de</u> E' , <u>si l'identité de</u> E <u>dans</u> E' <u>est un</u> $\mathcal{C}$-<u>morphisme</u>. (Cette définition est semblable à celle utilisée pour les topologies.)

On démontre que la $\mathcal{C}$-structure de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est plus fine que celle de $\delta(\Sigma)$:
La restriction de la $\mathcal{C}$-structure de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ à l'image de chaque $E(\sigma)$ est moins fine que la $\mathcal{C}$-structure image de celle de $E(\sigma)$ et, pour toute suite infinie σ et toute suite finie $s < \sigma$, l'application de $E(\sigma)$ dans $E(s)$ est un $\mathcal{C}$-morphisme, c'est-à-dire que la $\mathcal{C}$-structure image de celle de $E(\sigma)$ dans $E(s)$ est plus fine que celle de $E(s)$.

De même, pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$, l'image de la $\mathcal{C}$-structure de $E(s)$ (pour $\ell(s) = p$) dans $E(p)$ est plus fine que la restriction à l'image de $E(s)$ de la $\mathcal{C}$-structure de $E(p)$. Il en résulte que, pour tout $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$ et pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$, la restriction à l'image de $E(\sigma)$ de la $\mathcal{C}$-structure de $E(p)$ est moins fine que la $\mathcal{C}$-structure image de celle de $E(\sigma)$ et, par suite, la $\mathcal{C}$-structure limite projective de celles des $E(p)$ est moins fine que la $\mathcal{C}$-structure limite inductive de celles des $E(\sigma)$.

On démontre de même que la $\mathcal{C}$-structure de $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est plus fine que celle de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$:

Comme $\underset{\sim}{S}$ peut être considéré comme un sous-ensemble de $\underset{\sim}{\Sigma}$ (d'après la condition (c), imposée dans la définition d'un système déterminant), et comme, de même, l'ensemble des suites de longueur égale à p, où p est un entier, est un sous-ensemble de $\underset{\sim}{S}$, la restriction de la $\mathcal{C}$-structure de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ à l'image de $E(p)$ dans $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ est moins fine que la $\mathcal{C}$-structure image de celle de $E(p)$. Par conséquent, la $\mathcal{C}$-structure limite projective de celles des $E(p)$ est plus fine que la $\mathcal{C}$-structure de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$. On peut donc conclure que les $\mathcal{C}$-structures de $\Delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ et de $\delta(\underset{\sim}{\Sigma})$ sont identiques.

PROPOSITION 1.3.2. - *Dans cette proposition,* $\mathcal{C}$ *ne vérifie plus nécessairement l'axiome* (5). *Si* $\mathcal{C}$ *est une catégorie stable par limite projective dénombrable et par limite inductive de puissance* $2^{\aleph_0}$, *et si* $\mathcal{E}$ *est une sous-classe de* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, *si* E *est un objet de* $\mathfrak{A}_1(\mathcal{E})$ *et s'il peut s'écrire* :

$$E = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} \Big(\varprojlim_{s\prec\sigma} E(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'\prec s}\ ,\ \{f_{rs}\}_{r\leq s}\Big)\ ,$$

où les $f_{ss'}$ *soient des* $\mathcal{C}$-*morphismes surjectifs de* $E(s)$ *sur* $E(s')$, *alors* E *peut aussi s'écrire comme une limite projective de puissance* $2^{\aleph_0}$, *de limites inductives dénombrables d'objets de* $\mathcal{E}$.

Démonstration. - Cette proposition est une généralisation de la proposition 9 aux noyaux de $\mathcal{E}$-systèmes déterminants.

Si

$$E = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} \Big(\varprojlim_{s\prec\sigma} E(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'\prec s}\ ,\ \{f_{rs}\}_{r\leq s}\Big)\ ,$$

alors E est défini par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E(s') \arrow[r, dashed, bend right] & E(s) \arrow[l, "f_{ss'}"', "s'\prec s"] & E(\sigma) \arrow[l, "f_{\sigma s}"', "s\prec\sigma"] \arrow[r, "f_\sigma"] & E \\
E(r') \arrow[u, "f_{r's'}", "r'\leq s'"'] \arrow[r, bend right, "\varphi_{r'r}"'] & E(r) \arrow[u, "f_{rs}"', "r\leq s"] \arrow[l, "f_{rr'}"'] & E(\rho) \arrow[u, "f_{\rho\sigma}"', "\rho\leq\sigma"] \arrow[l, "f_{\rho r}"', "r\prec\rho"] &
\end{tikzcd}$$

$$f_{rr'} \circ \varphi_{r'r} = f_{r'r'}$$.

Dans ce diagramme, on désigne par $\varphi_{s's}$ un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(E(s')\ ,\ E(s))$, inverse à droite de $f_{ss'}$.

Comme $\underset{\sim}{N}$ est dénombrable et totalement ordonné, on peut construire les $\varphi_{s's}$ par récurrence, de manière qu'ils vérifient :

$$(r \leqslant s\ ,\quad r' \leqslant s'\ ,\quad r' < r\ ,\quad s' < s) \implies (\varphi_{s's} \circ f_{r's'} = f_{rs} \circ \varphi_{r'r}) \ .$$

En effet, si l'on suppose les $\mathcal{C}$-morphismes $(\varphi_{s's})_{s'<s}$ définis pour $\ell(s) \leqslant p$, on peut, pour toute suite s vérifiant $\ell(s) = p$, construire successivement :

$$\varphi_{s,(s,1)} : E(s) \to E(s\ ,\ 1) \ ,$$

puis, pour tout entier n :

$$\varphi_{s,(s,n)} : E(s) \to E(s\ ,\ n) \ ,$$

en posant :

$$\varphi_{s,(s,n)} = f_{(s,1),(s,n)} \circ \varphi_{s,(s,1)} \ .$$

Si l'on désigne par $\underset{\sim}{\Phi}$ le sous-ensemble de $\underset{\sim}{S}^{\underset{\sim}{N}}$ constitué des suites d'éléments de $\underset{\sim}{S}$ qui croissent simultanément pour les deux ordres " $<$ " et " $\leqslant$ ", on a

$$[(s_1\ ,\ s_2\ ,\ \dots\ ,\ s_p\ ,\ \dots) \in \underset{\sim}{\Phi}]$$
$$\iff [(\ell(s_1) \leqslant \ell(s_2) \leqslant \dots \leqslant \ell(s_p) \leqslant \dots)$$
$$\text{et}\quad (\forall\ p \in \underset{\sim}{N} :\ s_p \leqslant \text{la section commençante de longueur } \ell(s_p) \text{ de } s_{p+1})] \ .$$

Pour les deux ordres " $<$ " et " $\leqslant$ ", $\underset{\sim}{\Phi}$ est un ensemble cofinal à $\underset{\sim}{S}^{\underset{\sim}{N}}$.

Si l'on note, pour $(s_1\ ,\ s_2\ ,\ \dots\ ,\ s_p\ ,\ \dots) \in \underset{\sim}{\Phi}$, par $(s_n)^p$, la section commençante de longueur $\ell(s_p)$ de s_n, on peut définir, pour tout couple $(n\ ,\ p)$ vérifiant $n \geqslant p$, un $\mathcal{C}$-morphisme φ_{s_p,s_n} de $E(s_p)$ dans $E(s_n)$ en composant :

$$\varphi_{s_p,s_n} = \varphi_{(s_n)^p,s_n} \circ f_{s_p,(s_n)^p} \quad [E(s_p) \to E((s_n)^p) \to E(s_n)] \ .$$

Le système $(E(s_p)\ ,\ \{\varphi_{s_p,s_n}\}_{n\geqslant p})_{\underset{\sim}{N}}$ forme alors un système inductif dénombrable ; on note $F(s_1\ ,\ s_2\ ,\ \dots\ ,\ s_p\ ,\ \dots)$ sa limite inductive, et φ_{s_p} le $\mathcal{C}$-morphisme canonique $E(s_p) \to F(s_1\ ,\ s_2\ ,\ \dots\ ,\ s_p\ ,\ \dots)$.

On peut ordonner $\underset{\sim}{\Phi}$ par la relation :

$$((s'_1\ ,\ s'_2\ ,\ \dots\ ,\ s'_p\ ,\ \dots) \ll (s_1\ ,\ s_2\ ,\ \dots\ ,\ s_p\ ,\ \dots)) \iff (\forall\ p \in \underset{\sim}{N} :\ s'_p < s_p) \ .$$

Si $(s'_1 , s'_2 , \dots , s'_p , \dots) \ll (s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots)$, on peut définir un $\mathcal{C}$-morphisme, que l'on notera $\psi_{(s_p),(s'_p)}$, de $F(s_1 , \dots , s_p , \dots)$ dans $F(s'_1 , \dots , s'_p , \dots)$, obtenu par limite projective des $(f_{s_p,s'_p})_{p\in\underset{\sim}{N}}$, c'est-à-dire, défini par :

$$\forall\ n \in \underset{\sim}{N} , \qquad \psi_{(s_p),(s'_p)} \circ \varphi_{s_n} = \varphi'_{s'_n} \circ f_{s_n,s'_n} ,$$

où φ_{s_n} est le $\mathcal{C}$-morphisme : $E(s_n) \to F(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots)$, et $\varphi'_{s'_n}$ le $\mathcal{C}$-morphisme : $E(s'_n) \to F(s'_1 , s'_2 , \dots , s'_p , \dots)$. De plus, comme $(F(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots) , \{\varphi_{s_p}\}_{p\in\underset{\sim}{N}})$ est un objet initial, ce $\mathcal{C}$-morphisme $\psi_{(s_p),(s'_p)}$ est alors unique.

Le système $(F(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots) , \{\psi_{(s_p),(s'_p)}\}_{(s'_p)\ll(s_p)})_{(s_p)\in\underset{\sim}{\Phi}}$ est alors un système projectif de puissance $2^{\aleph_0}$. On note $(F , \{\psi_{(s_p)}\}_{(s_p)\in\underset{\sim}{\Phi}})$ sa limite projective, lorsqu'elle existe.

Pour tout élément $(\sigma_1 , \sigma_2 , \dots , \sigma_p , \dots , \sigma_n , \dots)$ de $\Sigma^{\underset{\sim}{N}}$, vérifiant $(\sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \dots \leqslant \sigma_p \leqslant \dots \leqslant \sigma_n \leqslant \dots)$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E(\sigma_p) \arrow[r, "f_{\sigma_p,\sigma_n}"] \arrow[d, "f_{\sigma_p,s_p}"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_p \leqslant \sigma_n"] & E(\sigma_n) \arrow[r, "f_{\sigma_n}"] \arrow[d, "f_{\sigma_n,s_n}"] & E \arrow[r, shift left, "\chi"'] \arrow[d, "\chi_{(s_p)}"', shift right] & F \arrow[l, dashed, shift left, "\zeta"'] \arrow[dl, "\psi_{(s_p)}"] \\
E(s_p) \arrow[r, "\varphi_{s_p,s_n}"] \arrow[dd, "f_{s_p,s'_p}"'] \arrow[dr, "f_{s_p,(s_n)^p}"'] \arrow[u, phantom, "s_p < \sigma_p"] & E(s_n) \arrow[r, "\varphi_{s_n}"] \arrow[d, shift right, "f_{s_n,(s_n)^p}"'] \arrow[ur, dashed, "f_{s_n}"] \arrow[u, phantom, "s_n < \sigma_n"] & F(s_1,s_2,\dots,s_p,\dots) \arrow[dd, "\psi_{(s_p),(s'_p)}"] \arrow[u, dashed, shift right, "\zeta_{(s_p)}"'] & \\
 & E((s_n)^p) \arrow[u, shift right, "\varphi_{(s_n)^p,s_n}"'] \arrow[d] & & \\
E(s'_p) \arrow[r, "\varphi'_{s'_p,s'_n}"'] \arrow[u, phantom, "(s'_p)\ll(s_p) \quad s'_p < s_p"] & E(s'_n) \arrow[r, "\varphi'_{s'_n}"'] & F(s'_1,s'_2,\dots,s'_p,\dots) &
\end{tikzcd}$$

.

L'objet $(E , \{f_{\sigma_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ est objet initial de la catégorie auxiliaire $(X , \{x_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$, où les x_n sont des $\mathcal{C}$-morphismes $E(\sigma_n) \to X$, vérifiant :

$$(p \leqslant n) \implies (x_p = x_n \circ f_{\sigma_p,\sigma_n}) \; .$$

L'objet $(F(s_1 , \dots , s_p , \dots) , \{\varphi_{s_n} \circ f_{\sigma_n,s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ appartient à cette catégorie auxiliaire. Par suite, pour tout $(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots)$ de $\underset{\sim}{\Phi}$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme $\chi_{(s_p)}$, et un seul, de E dans $F(s_1 , \dots , s_p , \dots)$, vérifiant :

$$(\forall\, n \in \underset{\sim}{N} , \; \chi_{(s_p)} \circ f_{\sigma_n} = \varphi_{s_n} \circ f_{\sigma_n,s_n}) \; .$$

Comme F est la limite projective de

$$(F(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots) , \{\psi_{(s_p),(s'_p)}\}_{(s'_p)\ll(s_p)}) \; ,$$

on peut déduire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme χ , et un seul, de E dans F , vérifiant, pour tout élément $(s_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$ de $\underset{\sim}{\Phi}$,

$$\psi_{(s_p)} \circ \chi = \chi_{(s_p)} \; .$$

Pour toute suite infinie σ_n , $E(\sigma_n)$ est la limite projective du système

$$(E(s_n) , \{f_{s_n,s'_n}\}_{s'_n<s_n})_{s_n<\sigma_n} \; ,$$

et les $\mathcal{C}$-morphismes f_{s_n,s'_n} admettent des inverses à droite $\varphi_{s'_n,s_n}$. Si $(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots , s_n , \dots)$ appartient à $\underset{\sim}{\Phi}$, la suite s_p , prolongée par des zéros, est un élément de $\underset{\sim}{\Sigma}$ inférieur ou égal (pour l'ordre $\leqslant$) à la suite s_n , prolongée par des zéros (où $p \leqslant n$ dans $\underset{\sim}{N}$). Or $E = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} (E(\sigma) , f_\sigma)$. Par suite, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme f_{s_n} : $E(s_n) \to E$, et un $\mathcal{C}$-morphisme f_{s_p} : $E(s_p) \to E$, ces $\mathcal{C}$-morphismes vérifiant :

$$f_{s_p} = f_{s_n} \circ \varphi_{s_p,s_n} \qquad (\forall\, (n , p) , \; p \leqslant n) \; .$$

Comme $(F(s_1 , s_2 , \dots , s_p , \dots) , \{\varphi_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ est défini comme l'objet initial d'une catégorie auxiliaire à laquelle appartient $(E , \{f_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$, car

$$(F(s_1 , \dots , s_p , \dots) , \{\varphi_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$$

est objet initial de la catégorie dont les objets s'écrivent $(X , \{x_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$, où les $(x_{s_n})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ sont des $\mathcal{C}$-morphismes $E(s_n) \to X$, vérifiant :

$$(p \leqslant n) \implies (x_{s_n} \circ \varphi_{s_p,s_n} = x_{s_p}) \ .$$

Or $(E , \{f_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ vérifie, par suite de la définition de E ,

$$(p \leqslant n) \implies (s_p \leqslant (s_n)^p) \implies (f_{(s_n)^p} \circ f_{s_p,(s_n)^p} = f_{s_p}) \ ,$$

et

$$(p \leqslant n) \implies ((s_n)^p < s_n) \implies (f_{(s_n)^p} \circ f_{s_n,(s_n)^p} = f_{s_n}) \ .$$

Comme $f_{s_n,(s_n)^p}$ est surjective, elle admet un inverse à droite $\varphi_{(s_n)^p,s_n}$, et la dernière relation entraîne :

$$f_{(s_n)^p} = f_{s_n} \circ \varphi_{(s_n)^p,s_n} \ .$$

Si l'on remplace $f_{(s_n)^p}$ par cette valeur dans la première égalité :

$$(p \leqslant n) \implies (f_{s_n} \circ \varphi_{(s_n)^p,s_n} \circ f_{s_p,(s_n)^p} = f_{s_p}) \ ,$$

c'est-à-dire

$$(p \leqslant n) \implies (f_{s_n} \circ \varphi_{s_p,s_n}) = f_{s_p} \ .$$

On peut donc conclure que $(E , \{f_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ appartient bien à la catégorie auxiliaire dont $(F(s_1 , \dots , s_p , \dots) , \{\varphi_{s_n}\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ est objet initial.

On peut déduire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme $\zeta_{(s_p)}$, et un seul, de

$$F(s_1 , \dots , s_p , \dots) \quad \text{dans} \quad E \ ,$$

vérifiant :

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N} , \qquad f_{s_n} = \zeta_{(s_p)} \circ \varphi_{s_n} \ .$$

Le $\mathcal{C}$-morphisme $\chi \circ \zeta_{(s_p)} \circ \psi_{(s_p)} : F \to F$ est un morphisme dans la catégorie auxiliaire dont F est objet final, il est donc égal à l'identité sur F . Par suite, le $\mathcal{C}$-morphisme $\zeta = \zeta_{(s_p)} \circ \psi_{(s_p)}$ est inverse à droite de χ .

De même, le $\mathcal{C}$-morphisme $\zeta \circ \chi : E \to E$ vérifie, pour toute suite σ_n,

$$\zeta \circ \chi \circ f_{\sigma_n} = \zeta(s_p) \circ \underbrace{\psi(s_p) \circ \chi} \circ f_{\sigma_n}$$

$$= \zeta(s_p) \circ \underbrace{\chi(s_p) \circ f_{\sigma_n}}$$

$$= \underbrace{\zeta(s_p) \circ \varphi_{s_n}} \circ f_{\sigma_n, s_n} = f_{s_n} \circ f_{\sigma_n, s_n} = f_{\sigma_n} .$$

Par conséquent, $\zeta \circ \chi$ est égal à l'identité sur E, et l'on peut déduire que ζ est inverse de χ.

Il en résulte que E et F sont bien isomorphes dans $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE 1.3.2.1. - <u>On considère la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces vectoriels topologiques localement convexes, dont les morphismes soient les applications linéaires continues, et la sous-classe $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ constituée par les espaces vectoriels métrisables et de Baire.</u>

<u>Soit E un objet de $\mathcal{C}$, limite inductive dans $\mathcal{C}$ de puissance quelconque d'espaces (E_α) de la classe $\mathcal{B}$; et soit F un espace séparé de la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, dont les morphismes $\{f_{ss'}\}_{s'<s}$ soient surjectifs.</u>

<u>Si u est une application linéaire de E dans F, telle que tout ouvert du graphe de u se projette sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u est une application continue de E dans F.</u>

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition 1.3.2, si F est de classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, F peut s'écrire comme limite projective de puissance $2^{\aleph_0}$ de limites inductives dénombrables d'espaces métrisables et de Baire. La conclusion se déduit donc du théorème 2.2 de "continuité d'applications linéaires".

COROLLAIRE 1.3.2.2. - <u>Si E est une limite inductive d'espaces (E_α) métrisables, de Baire, et sousliniens, si F est un espace souslinien de la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, toute application u de E dans F, dont le graphe dans $E \times F$ est borélien, est une application continue.</u>

<u>Démonstration</u>. - Elle se déduit du corollaire précédent en remarquant qu'un ouvert du graphe de u se projette alors sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire.

1.4. Exemples d'espaces de la classe $\mathfrak{a}'(\mathfrak{B})$ et de la classe $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels topologiques localement convexes, et dont les morphismes soient les applications linéaires continues.

On note $\mathfrak{B}$ la sous-classe de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, constituée par les espaces vectoriels métrisables et de Baire.

Parmi les objets de $\mathcal{C}$ appartenant à la classe $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$, on peut citer :

- Les espaces de Fréchet qui appartiennent à la classe $\mathfrak{B}$,
- La classe $\mathfrak{B}_\Omega$, contenue dans la classe $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$,
- Le quotient d'un espace de la classe $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$, par un sous-espace fermé, du type $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$, car $\mathfrak{a}(\mathfrak{B})$ est stable par limite projective.

PROPOSITION 1.4.1. - Le dual fort d'un espace de Fréchet sur $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$ appartient à la classe $\mathfrak{a}'(\mathfrak{B})$.

Démonstration. - Soient E un espace de Fréchet, E' son dual topologique fort, et E^* son dual algébrique.

On note $(p_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ une suite de semi-normes sur E , qui définit la topologie de E , et qui est croissante au sens que, pour tout x de E et tout n de $\underset{\sim}{N}$, on a

$$p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \quad .$$

On peut alors caractériser l'ensemble E' par :

$$E' = \{x' \in E^* : \exists\ \sigma = (n_1\ , \dots , n_k\ , \dots) \in \underset{\sim}{\Sigma} :$$
$$(x \in E\ ,\ \ k \in \underset{\sim}{N}) \implies (|x'(x)| \leqslant n_k\ p_k(x))\} \quad .$$

- Pour toute suite $s = (n_1\ , \dots , n_k\ , \dots , n_m)$ de $\underset{\sim}{S}$, on définit le sous-espace vectoriel $E'(s)$ de E^* par :

$$E'(s) = \{x' \in E^* : \exists\ c \in \underset{\sim}{R}_+ :$$
$$(k \leqslant m = \ell(s)\ ,\ \ x \in E) \implies (|x'(x)| \leqslant cn_k\ p_k(x))\ ,$$
$$(k > m = \ell(s)\ ,\ \ x \in E) \implies (x'(x) \leqslant cp_k(x))\} \quad .$$

Cet espace $E'(s)$ est muni de la topologie définie par la norme π_s , qui s'exprime par :

$$\pi_s(x') = \inf\{c \in \mathbb{R}_+ : (k \leqslant m = \ell(s)\ ,\ x \in E) \implies (|x'(x)| \leqslant c n_k\, p_k(x))\ ,$$
$$(k > m\ ,\ x \in E) \implies (|x'(x)| \leqslant c p_k(x))\}\ .$$

L'espace vectoriel $E'(s)$, muni de cette norme, est complet ; par conséquent, pour toute suite s de $\underset{\sim}{S}$, $E'(s)$ appartient à la classe $\mathcal{B}$.

– Si s et s' sont deux suites de $\underset{\sim}{S}$ vérifiant $s' < s$, ces deux suites s'écrivent :

$s = (n_1\ , n_2\ , \dots\ , n_m)$ et $s' = (n_1\ , n_2\ , \dots\ , n_{m'})$, avec $m' \leqslant m$.

Comme $\underset{\sim}{N}$ et $\underset{\sim}{N} \setminus \{0\}$ sont isomorphes, on supposera dans la suite que, pour tout k, n_k est supérieur ou égal à 1. On peut alors déduire de la définition que l'espace vectoriel $E'(s)$ contient $E'(s')$.

Pour tout x' de $E'(s)$, on considère l'élément de $E'(s')$ défini par

$$f_{ss'}(x') = \frac{x'}{\prod\limits_{m'<k\leqslant m} (n_k)}\ .$$

L'application $f_{ss'}$ de $E'(s)$ dans $E'(s')$ est alors linéaire, continue et surjective.

– Si $r = (q_1\ , q_2\ , \dots\ , q_m)$ et $s = (n_1\ , n_2\ , \dots\ , n_m)$ sont deux suites de $\underset{\sim}{S}$ vérifiant $\ell(r) = \ell(s) = m$ et $r \leqslant s$, on définit une application f_{rs} de $E'(r)$ dans $E'(s)$ en posant, pour tout x' de $E'(r)$,

$$f_{rs}(x') = x' \times \prod_{k\leqslant m} \left(\frac{n_k}{q_k}\right)\ .$$

L'application f_{rs} de $E'(r)$ dans $E'(s)$ est alors linéaire, continue et bijective.

– On a ainsi défini un $\mathcal{B}$-système déterminant, et on peut vérifier que

$$(r \leqslant s\ ,\ r' \leqslant s'\ ,\ r' < r\ ,\ s' < s) \implies (f_{ss'} \circ f_{rs} = f_{r's'} \circ f_{rr'})\ .$$

Cette vérification est immédiate, car

$$\frac{1}{\prod\limits_{m'<k\leqslant m} n_k} \times \prod_{k\leqslant m} \frac{n_k}{q_k} = \prod_{k\leqslant m'} \frac{n_k}{q_k} \times \frac{1}{\prod\limits_{m'<k\leqslant m} q_k}\ .$$

– Ce système déterminant satisfait de plus à la condition (f) : En effet, si s et s' sont deux suites dont les longueurs vérifient $\ell(s') + 1 = \ell(s)$, alors

$E'(s)$ est contenu dans $\varinjlim_{n \in \underset{\sim}{N}} E'(s', n)$.

La démonstration est immédiate en remarquant que, si $s = (n_1, \dots, n_m)$ et si $s' = (n'_1, \dots, n'_{m-1})$, la borne supérieure des différences $(|n_k - n'_k|)_{1 \leqslant k \leqslant m-1}$ est bornée par un réel c_0.

– Pour toute suite $\sigma = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ de $\underset{\sim}{\Sigma}$, on peut alors définir:

$$E'(\sigma) = \varprojlim_{s \prec \sigma} E'(s), \{f_{ss'}\} .$$

L'espace vectoriel $E'(\sigma)$ est défini par :

$$E'(\sigma) = \{x' \in E^* : \forall m \in \underset{\sim}{N}, \exists c_m \in \underset{\sim}{R}_+ :$$

$$(k \in \underset{\sim}{N}, \ k \leqslant m, \ x \in E) \implies (|x'(x)| \leqslant c_m n_k p_k(x)),$$

$$(k \in \underset{\sim}{N}, \ k > m, \ x \in E) \implies (|x'(x)| \leqslant c_m p_k(x))\} .$$

Cet espace est de plus muni de la topologie définie par la famille des semi-normes $(\pi_s)_{s \prec \sigma}$.

Si ρ et σ sont deux suites infinies vérifiant $\rho \leqslant \sigma$, l'espace vectoriel $E'(\rho)$ s'injecte dans $E'(\sigma)$ par une injection continue, notée $f_{\rho\sigma}$, obtenue par limite projective des f_{rs} pour $r \prec \rho$ et $s \prec \sigma$.

Le dual fort de E, c'est-à-dire E' fort, est alors la limite inductive des $E'(\sigma)$ par les applications $f_{\rho\sigma}$ pour $\rho \leqslant \sigma$.

L'espace vectoriel topologique E' appartient bien à la classe $\mathfrak{A}'(\mathfrak{B})$.

– Utilisant la proposition 1.3.1, on peut par conséquent déduire le corollaire suivant :

<u>Si</u> u <u>est une application linéaire d'un espace</u> E, <u>limite inductive d'espaces</u> (E_α) <u>métrisables et de Baire, et si</u> F <u>est le dual fort d'un espace de Fréchet, si la projection sur</u> E <u>de tout ouvert du graphe de</u> u <u>dans</u> $E \times F$ <u>vérifie la condition de Baire, alors</u> u <u>est continue</u>.

COROLLAIRE 1.4.1.1. – <u>Les espaces duaux forts de sommes directes topologiques dénombrables d'espaces de Fréchet appartiennent à la classe</u> $\mathfrak{A}'(\mathfrak{B})$.

<u>Démonstration</u>. – Elle est immédiate, en utilisant le fait que le dual fort d'une somme topologique d'espaces localement convexes s'identifie au produit topologique des duaux forts de ces espaces (cf. BOURBAKI [1], chap. IV, § 3, n° 4, exercice 13).

COROLLAIRE 1.4.1.2. - <u>Si E est une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet $(E_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ par des applications linéaires continues $(e_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$, tels que $E = \bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} e_n(E_n)$, alors le dual de E appartient à $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$.</u>

<u>Démonstration</u>. - Sous les hypothèses précédentes, E est isomorphe à un quotient de la somme directe topologique des E_n par un sous-espace fermé de cette somme ; on peut définir une application $u : \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} E_n \to E$. Par suite, le dual de E est la limite projective du produit topologique des E'_n par l'application transposée de u. Le dual de E est donc de classe $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$.

PROPOSITION 1.4.2. - <u>Les espaces localement convexes "à réseau absorbant" définis par de WILDE, munis d'une topologie plus fine que leur topologie propre, appartiennent à</u> $\mathfrak{A}'(\mathfrak{B})$.

<u>Démonstration</u>. - Soit E un espace localement convexe séparé. Un "réseau absorbant" de E est une application Γ de $\underset{\sim}{S}$ dans $\mathcal{P}(E)$, vérifiant :

1° $\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} \Gamma(n)$ absorbe E ;

2° Pour toute suite finie s, $\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} \Gamma(s, n)$ absorbe $\Gamma(s)$;

3° Si $(x_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ appartient à $E^{\underset{\sim}{N}}$,

$(\exists\, \sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots) \in \underset{\sim}{\Sigma} : \forall k \in \underset{\sim}{N},\ x_k \in \widehat{\Gamma}(n_1, \ldots, n_k)) \implies ((x_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ est une série convergente), où $\widehat{\Gamma}(s)$ désigne l'enveloppe convexe de $\Gamma(s)$.

Si l'on impose la condition supplémentaire :

4° Pour toute suite s, $\Gamma(s)$ est équilibré,

alors l'espace E, muni de la topologie qui sera définie dans la suite, appartient à $\mathfrak{A}'(\mathfrak{B})$.

On désigne par τ la topologie sur E, définie par la famille des $(\widehat{\Gamma}(s))_{s\in\underset{\sim}{S}}$. On note $\Delta(s)$ l'espace vectoriel fermé pour τ, engendré par la famille des $\widehat{\Gamma}(r)$, pour toutes les suites r vérifiant : $\ell(r) \geqslant \ell(s)$, et dont la section commençante de longueur $\ell(s)$ soit inférieure ou égale (pour $\leqslant$) à s. La famille $(\widehat{\Gamma}(s))_{s\in\underset{\sim}{S}}$ étant dénombrable, $\Delta(s)$ est écartisable.

On peut montrer que $\Delta(s)$ <u>est séparé</u>. S'il n'était pas séparé, il existerait un $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, vérifiant, pour toute suite σ infinie,

$$\sigma \succ s = (n_1, n_2, \ldots, n_{\ell(s)}),$$

$\forall\, k \in \underset{\sim}{N}$,

$$x_0 \in \widehat{\Gamma}(n_1 , n_2 , \dots , n_{\ell(s)}) \ .$$

La série $\sum\limits_{k\in\underset{\sim}{N}} x_0$ convergerait donc, ce qui entraîne $x_0 = 0$. On peut donc conclure que $\Delta(s)^{\sim}$ est séparé.

L'espace $\Delta(s)$ <u>est de plus complet</u>. Si $(y_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\Delta(s)$, alors, pour toute suite infinie $(\sigma = n_1 , n_2 , \dots , n_k , \dots)$ prolongeant s , et pour tout entier p , il existe un entier N_p tel que

$$(k \geqslant N_p \ , \ \ h \geqslant N_p) \implies ((y_k - y_h) \in \widehat{\Gamma}(n_1 , n_2 , \dots , n_p)) \ .$$

La suite $(x_p)_{p\in\underset{\sim}{N}}$, définie par $x_p = y_{N_{p+1}} - y_{N_p}$, vérifie alors :

$$\forall\, p \in \underset{\sim}{N} , \qquad x_p \in \widehat{\Gamma}(n_1 , n_2 , \dots , n_p) \ .$$

D'après la condition 3°, la série $\sum\limits_{p\in\underset{\sim}{N}} x_p$ converge dans E , vers un élément noté x . Il en résulte que la suite $(y_{N_p})_{p\in\underset{\sim}{N}}$ converge vers l'élément $y = y_{N_1} + x$. La suite $(y_k)_{k\in\underset{\sim}{N}}$ admet donc y comme point d'adhérence. Comme cette suite est une suite de Cauchy dans un espace séparé, elle converge alors vers y .

Si $s' < s$, l'ensemble $\Delta(s')$ contient $\Delta(s)$, et l'application $f_{ss'}$, égale à l'injection de $\Delta(s)$ dans $\Delta(s')$, est continue.

Si $r \leqslant s$, alors $\Delta(r)$ est contenu dans $\Delta(s)$, et l'application f_{rs} , injection de $\Delta(r)$ dans $\Delta(s)$, est continue.

On a donc défini un $\mathcal{B}$-système déterminant. Les conditions 1° et 2° entraînent que ce $\mathcal{B}$-système déterminant vérifie la propriété (f).

On peut alors définir, pour toute suite infinie σ de $\underset{\sim}{\Sigma}$, $E(\sigma) = \varprojlim\limits_{s<\sigma} E(s)$. La restriction à $E(\sigma)$ de la topologie τ est plus fine que la topologie limite projective des restrictions de τ aux $\Delta(s)$.

Puis, on peut définir $E(\underset{\sim}{\Sigma}) = \varinjlim\limits_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} E(\sigma)$. L'ensemble $E(\underset{\sim}{\Sigma})$ est égal à E , et la topologie limite inductive est plus fine que la topologie de E , d'après la condition 3°. Si l'on note $\mathcal{L}$ cette topologie limite inductive, l'espace E , muni de $\mathcal{L}$, appartient à la classe $\mathcal{A}'(\mathcal{B})$.

COROLLAIRE 1.4.2.1. - <u>Soit</u> E <u>un espace vectoriel localement convexe, limite inductive d'espaces</u> (E_α) <u>métrisables et de Baire</u>.

Soit F un espace localement convexe séparé et "à réseau absorbant", dont la topologie est notée $\mathcal{T}$, et dont la topologie construite à partir du réseau absorbant dans la démonstration de la proposition 1.4.2 est notée $\mathcal{L}$.

Si u est une application linéaire de E dans F, telle que tout ouvert du graphe de u dans $E \times F$, muni de la topologie produit de la topologie de E par la topologie $\mathcal{L}$, se projette sur E en un ensemble vérifiant la condition de Baire, alors u est une application continue de E dans F muni de $\mathcal{T}$.

Démonstration. - L'espace vectoriel F, muni de la topologie $\mathcal{L}$, appartient à $\mathcal{A}'(\mathcal{B})$. Il résulte, par suite du corollaire 1.3.2.1, que u est une application continue de E dans F muni de $\mathcal{L}$. Au cours de la démonstration de la proposition 1.4.2, on a vu que $\mathcal{L}$ est plus fine que $\mathcal{T}$; par suite, l'identité : $(F, \mathcal{L}) \to (F, \mathcal{T})$ est continue. L'application u est donc continue de E dans F muni de $\mathcal{T}$.

COROLLAIRE 1.4.2.2. - E et F étant définis comme dans le corollaire 1.4.2.1, et étant de plus métrisables, si u est une application linéaire de E dans F dont le graphe est fermé (dans $E \times F$ muni de la topologie produit de la topologie de E par la topologie $\mathcal{T}$ de F), alors u est une application continue de E dans F (muni de $\mathcal{T}$).

Démonstration. - Soit Γ le graphe de u. Si Γ est fermé dans $E \times F$ muni de la topologie produit de la topologie $\mathcal{E}$ de E par $\mathcal{T}$, Γ est encore fermé dans $E \times F$ muni de $\mathcal{E} \times \mathcal{L}$ (car $\mathcal{E} \times \mathcal{L}$ est plus fine que $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$). Par suite, Γ vérifie la condition du corollaire 1.4.2.1, et l'on peut conclure. En effet, tout ouvert de Γ est un G_δ de $E \times F$ muni de $\mathcal{E} \times \mathcal{L}$, et la projection est une application ouverte, par suite la projection d'un G_δ est un G_δ (car la projection de Γ sur E est bijective), c'est donc un ensemble vérifiant la condition de Baire.

Exemples d'espaces vectoriels topologiques qui appartiennent à la classe $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

Exemple 1. - Si E et F sont deux espaces topologiques de Fréchet, on note $\Gamma(E, F)$ l'espace des applications linéaires compactes de E dans F.

Pour tout voisinage disqué (c'est-à-dire convexe et stable par homothéties de modules inférieurs ou égaux à 1) V de 0, on note E_V l'espace normé associé à la jauge p_V de V.

Il existe une injection canonique de $\Gamma(E_V, F)$ dans $\Gamma(E, F)$.

Soit τ_V la topologie de la convergence bornée sur $\Gamma(E_V, F)$; cette topologie fait de $\Gamma(E_V, F)$ un espace de la classe $\mathcal{T}$, qui est contenue dans $\mathcal{B}$.

Si l'on désigne par τ la topologie sur $\Gamma(E, F)$, limite inductive des topologies (τ_V) pour les V, voisinages disqués de 0, cette topologie est encore la limite inductive des topologies $(\tau_{V_n})_{n\in\mathbb{N}}$, lorsque les $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base dénombrable de voisinages de l'origine.

Par suite, $\Gamma(E, F)$, muni de cette topologie τ, appartient à la classe $\mathcal{F}_\sigma$, contenue dans $\mathcal{B}_\sigma$; il appartient, par conséquent, à $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$.

Exemple 2. - Si l'on désigne par X un espace localement compact, et par $\mathcal{K}(X)$ l'espace des fonctions numériques continues, à support compact, sur X, pour tout compact A de X, on désigne par $\mathcal{K}(A)$ l'espace des fonctions continues sur X, ayant leur support contenu dans A ; on munit $\mathcal{K}(A)$ de la topologie de la convergence uniforme, qui en fait un espace de Banach.

Les $\mathcal{K}(A)$ s'injectent dans $\mathcal{K}(X)$, qui est leur réunion, et qui est muni de la topologie limite inductive.

Si X est dénombrable à l'infini, alors l'espace topologique $\mathcal{K}(X)$ s'écrit, si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ compacts,

$$\mathcal{K}(X) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}(A_n) .$$

On en déduit que $\mathcal{K}(X)$ appartient à la classe $\mathcal{B}_\sigma$, et donc, à la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$.

Exemple 3. - De même, si l'on note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables, à support compact, sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$, cet espace appartient à la classe $\mathcal{F}_\sigma$ et, par suite, à $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$.

Exemple 4. - On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{C}^N$ où N est un entier, par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω. D'après le théorème de Weierstrass, l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est métrisable complet, c'est-à-dire de type $\mathcal{F}$.

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{C}^N$, on note $H(A)$ l'ensemble des classes de fonctions holomorphes définies sur des voisinages ouverts de A, pour la relation d'équivalence :

Deux fonctions sont équivalentes si elles sont égales sur un même voisinage de A.

Si B est un ensemble contenant A, la restriction φ_{BA} est une application linéaire continue. On peut donc munir $H(A)$ de la topologie limite inductive des topologies des $H(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$, pour tous les ouverts Ω contenant A.

Si A est un G_δ de $\underset{\sim}{C}^{n}$, A peut s'écrire :

$$A = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} \Omega_n \quad ,$$

pour une certaine suite (Ω_n) d'ouverts ; par conséquent, $H(A)$ est alors une limite inductive dénombrable d'espaces de Fréchet, ce qu'on peut écrire

$$H(A) \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \quad .$$

Exemple 5. - Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, bornologique (c'est-à-dire : où tout disque bornivore est un voisinage de l'origine), et quasi-complet (c'est-à-dire : où les parties fermées et bornées sont complètes), si, de plus, E admet une base dénombrable $(D_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ de disques bornés fermés, alors E appartient à la classe $\mathcal{F}_\sigma$ et, par conséquent, à la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$.

Puisque E est bornologique, sa topologie τ est la topologie limite inductive des topologies des espaces normés E_D, engendrés par tous les disques bornés fermés D de E, et normés par les jauges j_D de ces disques.

Si l'on suppose que E admet une base dénombrable $(D_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ de disques bornés fermés, alors E est la limite inductive des espaces normés $(E_{D_n})_{n \in \underset{\sim}{N}}$. Comme E est quasi-complet, les espaces E_{D_n} sont complets ; ils appartiennent donc à la classe $\mathcal{F}$. On peut donc conclure que E appartient à la classe $\mathcal{F}_\sigma$, et par suite à $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

Les espaces qui ont été cités appartiennent à la classe $\mathcal{A}_1(\mathcal{B})$, et par suite toute application linéaire vérifiant les conditions du corollaire 1.4.2.1, ou 1.4.2.2, est continue, car, ici, les espaces sont, de plus, séparés.

2. Mesures de Radon vectorielles

2.1. Notations et définitions.

On désigne par E un espace vectoriel normé dont la norme est notée $\|.\|$, et on suppose que E est complet.

Si Ω est un espace topologique séparé, on appelle $\mathcal{B}$ le σ-anneau engendré par les fermés de Ω, c'est-à-dire la plus petite sous-classe de $\mathcal{P}(\Omega)$, contenant les fermés, et stable par réunion dénombrable et intersection dénombrable.

Définition d'une mesure de Borel vectorielle. - On dira que μ est une mesure de Borel à valeurs dans E, si μ est une application de $\mathcal{B}$ dans E vérifiant :

(a_σ) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ et disjoints :

$$\mu(\bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n) = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \mu(A_n) \quad ;$$

(a_δ) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$, décroissante pour l'inclusion:

$$\mu(\bigcap_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad .$$

Dans cet axiome, on impose que la limite du second membre existe.

Définition d'une mesure de Radon vectorielle. - On dira que μ est une mesure de Radon sur Ω à valeurs dans E, si μ est une mesure de Borel qui vérifie en outre :

(b) μ est intérieurement régulière par rapport aux compacts :

$\forall\, B \in \mathcal{B}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, K$ compact $\subset B$: $(C \in \mathcal{B}\,,\ C \subset B \setminus K) \implies (\|\mu(C)\| < \varepsilon)$.

On impose de plus que la mesure μ soit finie au sens que :

(c) Pour toute suite $(B_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de boréliens disjoints, la quantité $\sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|\mu(B_n)\|$ soit majorée par une constante fixe ; on note $|||\mu|||$ la borne supérieure de ces quantités.

Généralisation aux catégories. - Si $\mathcal{C}$ est une catégorie stable par limite inductive dénombrable et par limite projective dénombrable, on peut généraliser les notions de mesures de Borel et de Radon.

Si $\mathcal{B}$ désigne une sous-classe de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, et $\mathcal{B}'$ une sous-classe de la classe des $\mathcal{C}$-morphismes, stable par composition, contenant les identités sur les objets de $\mathcal{C}$,

- stable par limite projective au sens suivant : Si l'on a une famille d'objets $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{C}$, et une famille de $\mathcal{B}'$-morphismes $a_i : X \to A_i$ admettant tous la même source X, alors il existe un unique $\mathcal{B}'$-morphisme $a : X \to \varprojlim_{i\in I} (A_i\,,\, a_i)$ vérifiant, si p_i est la projection : $\varprojlim_{i\in I} A_i \to A_i$, la relation $p_i \circ a = a_i$;

- et stable par limite inductive au sens suivant : Si l'on a une famille d'objets de $\mathcal{C}$, $(A_i)_{i\in I}$, et une famille de $\mathcal{B}'$-morphismes $a_i : A_i \to X$ admettant tous le même but X, il existe un unique $\mathcal{B}'$-morphisme $a : \varinjlim_{i\in I} (A_i\,,\, a_i) \to X$ vérifiant, si f_i est l'injection : $A_i \to \varinjlim_{i\in I} A_i$, pour tout i de I ,

$$a \circ f_i = a_i \quad ;$$

(dans les deux cas, l'existence de a se déduit des axiomes antérieurs, mais non son appartenance à $\mathcal{B}'$) ;

On considère la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ dont les objets soient les objets de $\mathcal{C}$, et dont les morphismes soient ceux de $\mathcal{B}'$ (on admet que, pour certains objets A et B de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(A , B)$ puisse être vide).

Si $\{E_i , \{f_{ij}\}_{i\leqslant j}\}$ est un système inductif dans $\mathcal{C}'$, dénombrable, dont les objets appartiennent à $\mathcal{B}$, et dont les morphismes appartiennent à $\mathcal{B}'$, on suppose que la limite inductive appartient encore à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire, on suppose $\mathcal{B}$ stable par limite inductive dénombrable par des $\mathcal{B}'$-morphismes.

De même, on impose que $\mathcal{B}$ soit stable par limite projective dénombrable par des $\mathcal{B}'$-morphismes.

Si $(A_\ell)_{\ell\in L}$ constitue une famille d'objets de $\mathcal{C}$, on désigne par $(\coprod_{\ell\in L} A_\ell , \{i_{A_\ell}\})$ l'objet somme des (A_ℓ) dans la catégorie $\mathcal{C}$, et par $(\bigoplus_{\ell\in L} A_\ell , \{j_{A_\ell}\})$ l'objet somme des $(A_\ell)_{\ell\in L}$ dans la catégorie $\mathcal{C}'$. Dans la suite, on dira que " $\coprod_{\ell\in L} A_\ell$ est égal à $\bigoplus_{\ell\in L} A_\ell$ " si, et seulement si, $(\bigoplus_{\ell\in L} A_\ell , \{j_{A_\ell}\}_{\ell\in L})$ est objet initial de la catégorie auxiliaire qui a permis de définir $(\coprod_{\ell\in L} A_\ell , \{i_{A_\ell}\}_{\ell\in L})$.

On dira que μ est une $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesure, à valeurs dans l'espace vectoriel E , si μ est une application de $\mathcal{B}$ dans E , et si μ vérifie en outre :

(a'_σ) <u>Pour tout système inductif dénombrable</u>

$$(E_i , \{f_{ij}\}_{i\leqslant j})_{i\in I} ,$$

<u>où</u> I <u>désigne un ensemble préordonné dénombrable réticulé à droite, dont les objets</u> (E_i) <u>appartiennent à</u> $\mathcal{B}$, <u>et les</u> $\mathcal{C}$-<u>morphismes</u> $f_{ij} : E_i \to E_j$ <u>appartiennent à</u> $\mathcal{B}'$, <u>la mesure de la limite inductive est égale à la limite des mesures des</u> E_i , <u>c'est-à-dire</u>

$$\mu(\varinjlim E_i , \{f_{ij}\}_{i\leqslant j}) = \lim_{i\in I} \mu(E_i) \quad .$$

(On impose dans cet axiome que cette limite existe.)

Dans cet axiome, on impose de plus que, pour tout couple (A , B) d'objets de $\mathcal{B}$, vérifiant $A \amalg B = A \oplus B$, la mesure $\mu(A \amalg B)$ soit égale à $\mu(A) + \mu(B)$.

On peut alors déduire de cet axiome que, pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{B}$ dont la somme $\coprod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans $\mathcal{C}$ soit égale à la somme $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans $\mathcal{C}'$, la mesure $\mu(\coprod_{n\in\mathbb{N}} E_n)$ est égale à $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

(a'_δ) Pour tout système projectif dénombrable, indexé par un ensemble I réticulé à droite :

$$(E_i \, , \{f_{ij}\}_{i\geqslant j})_{i\in I} \, ,$$

dont les objets E_i appartiennent à $\mathcal{B}$, et dont les morphismes f_{ij} appartiennent à $\mathcal{B}'$, on a l'égalité :

$$\mu(\varprojlim_{i\in I} E_i) = \lim_{(i \text{ croissant pour le préordre de } I)} \mu(E_i) \, .$$

(On impose dans cet axiome que la seconde limite existe pour tout système projectif dénombrable indexé par un ensemble I réticulé à droite.)

Si $\mathcal{K}$ désigne une sous-classe de $\mathcal{B}$ stable par limite projective quelconque, et vérifiant : pour tout objet B de $\mathcal{B}$, il existe un objet K de $\mathcal{K}$, et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{KB} : K \to B$ appartenant à $\mathcal{B}'$ (c'est-à-dire : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(K, B) \cap \mathcal{B}'$ est non vide), lorsque E est normé, on peut définir une notion de mesure de Radon.

On dira que la $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesure μ est de Radon par rapport à $\mathcal{K}$ si :

(b') Pour tout objet B de $\mathcal{B}$, et pour tout réel ε strictement positif, il existe un objet K de $\mathcal{K}$, et un $\mathcal{C}$-morphisme $f_{KB} : K \to B$ appartenant à $\mathcal{B}'$ et vérifiant : pour tout objet C de $\mathcal{B}$ satisfaisant à $C \oplus K = C \amalg K$, et tel qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme $f_C : C \amalg K \to B$, appartenant à $\mathcal{B}'$, la mesure $\mu(C)$ est de norme inférieure à ε .

De plus :

(c') La mesure μ est dite bornée si, pour toute suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{B}$, dont la somme $\coprod_{n\in\mathbb{N}} B_n$ dans $\mathcal{C}$ soit égale à la somme $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$ dans la sous-catégorie $\mathcal{C}'$, la quantité $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\mu(B_n)\|$ admet un majorant fini, et la borne supérieure est appelée norme de μ et notée $|||\mu|||$.

Les mesures boréliennes ou de Radon sur un espace topologique forment un cas particulier du précédent. - On considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les sous-ensembles de Ω, et dont les morphismes sont les applications d'un sous-ensemble dans un autre. Une application f appartient à la classe $\mathcal{B}'$ si, et seulement si, la source de f est contenue dans son but, et si f est l'injection canonique de sa source dans son but.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de Ω, disjoints, le seul système inductif dont les morphismes appartiennent à $\mathcal{B}'$ est celui obtenu lorsque la relation de préordre de I est l'égalité ; par conséquent, on a alors

$$\varinjlim_{i\in I} A_i , \{f_{ii}\} = \bigcup_{i\in I} A_i .$$

Si l'on considère la sous-classe $\mathcal{B}$ de $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, constituée par le σ-anneau engendré par les fermés, alors toute $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesure μ vérifie l'axiome (a) ; elle est, par conséquent, une mesure de Borel sur Ω.

Si l'on définit le sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$ comme étant l'ensemble des compacts de Ω, l'axiome (b') s'écrit :

Pour tout objet B, sous-ensemble borélien de Ω, et pour tout réel positif ε, il existe un compact K contenu dans B vérifiant : pour tout borélien C contenu dans $B \setminus K$, la mesure $\mu(C)$ est de norme inférieure à ε.

Cet axiome est alors équivalent à (b).

De même, l'axiome (c') est alors équivalent à (c).

On obtient bien les mêmes définitions que précédemment.

Les mesures de Haar sur un groupe G compact peuvent être définies comme des $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesures. - Dans les axiomes (a'_σ) et (a'_δ), on peut remarquer que la mesure d'une limite inductive ou projective d'un système muni de morphismes appartenant à $\mathcal{B}'$, ne dépend pas de ces morphismes.

Dans l'exemple précédent, pour tout couple (A , B) d'objets de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B) \cap \mathcal{B}'$ contenait au plus un élément, et par suite les $\mathcal{B}'$-morphismes f_{ij} étaient définis par la famille des objets $(E_i)_{i\in I}$ (lorsqu'ils existaient).

Il existe des catégories pour lesquelles on puisse définir des couples (A , B) d'objets tels que l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B) \cap \mathcal{B}'$ contienne plus d'un élément. Ainsi, si l'on considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets soient les sous-ensembles d'un groupe topologique G compact, dont les morphismes soient les applications d'un sous-ensemble de G dans un autre, si $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne de G engendrée par les compacts, et $\mathcal{B}'$ la sous-classe des applications constituée par les translations à gauche sur G, la classe $\mathcal{K}$ désigne la classe des compacts de G.

Les mesures de Haar sur G étant les mesures de Radon sur G invariantes à gauche, on peut déduire que les mesures de Haar sur G sont les $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesures de Radon pour $\mathcal{K}$. On obtient ainsi une généralisation des mesures de Haar classiques aux mesures de Haar vectorielles.

Prolongement d'une $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesure à des objets noyaux de systèmes déterminants. - Dans la suite, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie stable par limite projective dénombrable et par limite inductive de puissance $\aleph_1$ par des $\mathcal{B}'$-morphismes. On rappelle que l'on note :

$\mathcal{B}'$ une sous-classe de la classe des morphismes de $\mathcal{C}$, stable par composition, contenue dans la classe des morphismes injectifs, stable par limite inductive et projective.

Comme précédemment, on désigne par $\mathcal{C}'$ la catégorie dont les objets soient ceux de $\mathcal{C}$, et dont les morphismes soient constitués par ceux de $\mathcal{B}'$.

Dans toute la suite, on supposera que, pour tout système inductif dont les morphismes appartiennent à $\mathcal{B}'$, la limite inductive est la même dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}'$, et que, de même pour tout système projectif dont les morphismes appartiennent à $\mathcal{B}'$, la limite projective est la même dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}'$.

Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$, on note :

$$(A \amalg B \, , \, i_A \, , \, i_B) \quad \text{la somme de } A \text{ et } B \text{ dans } \mathcal{C} \, ,$$

et

$$(A \oplus B \, , \, j_A \, , \, j_B) \quad \text{la somme de } A \text{ et } B \text{ dans } \mathcal{C}' \, .$$

On considère une classe $\mathcal{E}$ d'objets de $\mathcal{C}$, stable par limites inductives finies, et par limites projectives dénombrables, par des $\mathcal{B}'$-morphismes ; on note $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{E})$ la classe des noyaux de $\mathcal{E}$-systèmes déterminants par des $\mathcal{B}'$-morphismes, et on note $\mathcal{B} = \mathcal{E}_\Omega$ le σ-anneau engendré par $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}'$.

LEMME 2.1.1.1. - Si A et B sont deux objets de $\mathcal{C}$ vérifiant $A \amalg B = A \oplus B$, et si A_1 et B_1 sont deux objets de $\mathcal{C}$ tels que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1 \, , \, A) \cap \mathcal{B}' \quad \text{contienne un } \mathcal{C}\text{-morphisme } f \, ,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B_1 \, , \, B) \cap \mathcal{B}' \quad \text{contienne un } \mathcal{C}\text{-morphisme } g \, ,$$

alors

$$A_1 \amalg B_1 = A_1 \oplus B_1 \, .$$

Démonstration. - Pour démontrer cette égalité (définie à un $\mathcal{C}$-isomorphisme près), il suffit de montrer que, pour tout $(X \, , \, \xi_1 \, , \, \eta_1)$, où X désigne un objet de $\mathcal{C}$, ξ_1 un $\mathcal{C}$-morphisme : $A_1 \to X$, et η_1 un $\mathcal{C}$-morphisme : $B_1 \to X$, on peut définir un $\mathcal{C}$-morphisme $h_1 : A_1 \oplus B_1 \to X$ tel que

$$h_1 \circ j_{A_1} = \xi_1 \qquad \text{et} \qquad h_1 \circ j_{B_1} = \eta_1 \, .$$

Comme f et g appartiennent à $\mathcal{B}'$, ils sont injectifs, et par suite, admettent des inverses à gauche f' et g'. On peut donc écrire :

$$\xi_1 = \xi_1 \circ f' \circ f \ ,$$

$$\eta_1 = \eta_1 \circ g' \circ g \ ,$$

où

$$\xi = \xi_1 \circ f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\ ,\ X) \ ,$$

$$\eta = \eta_1 \circ f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B\ ,\ X) \ .$$

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "\xi"] \arrow[r, "i_A"'] & A \oplus B \arrow[u, "h"] & B \arrow[ul, "\eta"'] \arrow[l, "i_B"] \\
A_1 \arrow[u, "f"] \arrow[uur, bend left, "\xi_1"] \arrow[r, "j_{A_1}"'] & A_1 \oplus B_1 \arrow[u, "k"] \arrow[uu, bend left, "h_1"] & B_1 \arrow[u, "g"'] \arrow[uul, bend right, "\eta_1"'] \arrow[l, "j_{B_1}"]
\end{tikzcd}$$

Comme $A \oplus B = A \amalg B$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme h, et un seul : $A \oplus B \to X$, vérifiant : $h \circ i_A = \xi$ et $h \circ i_B = \eta$.

Or $i_A = j_A$ et $i_B = j_B$; ils appartiennent donc à $\mathcal{B}'$. Par suite, $i_A \circ f$ et $i_B \circ g$ appartiennent à $\mathcal{B}'$, et l'on peut en déduire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme k, et un seul :

$$A_1 \oplus B_1 \to A \amalg B \ ,$$

vérifiant :

$$i_A \circ f = k \circ j_{A_1} \qquad \text{et} \qquad i_B \circ g = k \circ j_{B_1} \ .$$

Il en résulte que le $\mathcal{C}$-morphisme $h_1 = h \circ k$, qui admet $A_1 \oplus B_1$ pour source, et X pour but, vérifie :

$$h_1 \circ j_{A_1} = h \circ k \circ j_{A_1} = h \circ i_A \circ f = \xi \circ f = \xi_1 \qquad \text{et} \qquad h_1 \circ j_{B_1} = \eta_1 \ .$$

On peut donc conclure que

$$(A_1 \oplus B_1\ ,\ j_{A_1}\ ,\ j_{B_1}) = (A_1 \amalg B_1\ ,\ i_{A_1}\ ,\ i_{B_1}) \ .$$

LEMME 2.1.1.2. - <u>Si</u> $(C_i\ ,\ \{c_{ij}\}_{i\leqslant j})_{i\in I}$ <u>et</u> $(D_k\ ,\ \{d_{kh}\}_{k\leqslant h})_{k\in K}$ <u>sont deux systèmes inductifs dénombrables dans</u> $\mathcal{C}$ <u>dont les morphismes appartiennent à</u> $\mathcal{B}'$, <u>si, pour tout couple</u> $(i\ ,\ k)$ <u>de</u> $I\times K$, <u>il existe deux objets</u> E_{ik} <u>et</u> F_{ik} <u>de</u> $\mathcal{B}$ <u>vérifiant</u> :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i\ ,\ E_{ik})\cap\mathcal{B}' \quad \underline{\text{contient un morphisme}}\quad e_{ik}\ ,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D_k\ ,\ F_{ik})\cap\mathcal{B}' \quad \underline{\text{contient un morphisme}}\quad f_{ik}\ ,$$

<u>et</u>

$$E_{ik}\amalg F_{ik} = E_{ik}\oplus F_{ik}\ ,$$

<u>alors, il existe deux objets</u> E <u>et</u> F <u>de</u> $\mathcal{B}$ <u>vérifiant</u> :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{i\in I} C_i\ ,\ E)\cap\mathcal{B}' \quad \underline{\text{contient un morphisme}}\quad e\ ,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim_{k\in K} D_k\ ,\ F)\cap\mathcal{B}' \quad \underline{\text{contient un morphisme}}\quad f\ ,$$

<u>et</u>

$$E\amalg F = E\oplus F\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour tout i de I , on peut considérer l'objet

$$\varprojlim_{k\in K}(E_{ik}\ ,\ e_{ik}) = E_i\ .$$

Comme $\mathcal{B}$ est stable par limite projective dénombrable, E_i appartient à $\mathcal{B}$. De plus, comme $\mathcal{B}'$ est stable par limite projective, et comme les $(e_{ik})_{k\in K}$ appartiennent à $\mathcal{B}'$, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme $e_i : C_i \to E_i$ qui factorise les diagrammes suivants. Ce $\mathcal{B}'$-morphisme est de plus unique.

$$\begin{tikzcd}
 & & C_i \arrow[r, "c_{ij}", "(i\leqslant j)"'] \arrow[dll, "e_i"'] \arrow[dl, "e_{ik}"] \arrow[dd, "e_{ih}"] & C_j \arrow[r, "c_j"] \arrow[dd, shift right, "e_j"'] & C = \varinjlim_{i\in I}(C_i\ ,\ \{c_{ij}\}_{i\leqslant j}) \arrow[dd, "e"] \\
E_i = (\varprojlim_{k\in K} E_{ik}) \arrow[r, "\varepsilon_{ik}"] \arrow[drr, "\varepsilon_{ih}"'] & E_{ik} & & & \\
 & & E_{ih} & E_j \arrow[uu, shift right, "e'_j"'] \arrow[r, "\varepsilon_j"] & E = \varinjlim_{i\in I}(E_i\ ,\ c_i\circ e'_i)
\end{tikzcd}$$

De même, pour tout k de K , on définit

$$F_k = \varprojlim_{i\in I}(F_{ik}\ ,\ f_{ik})\ .$$

On obtient que F_k est un objet de la classe $\mathcal{B}$, on note φ_{ik} le $\mathcal{C}$-morphisme canonique $\varphi_{ik} : F_k \to F_{ik}$, et on désigne par f_k l'unique $\mathcal{B}'$-morphisme : $D_k \to F_k$ tel que, $\forall\, i \in I$, $\varphi_{ik} \circ f_k = f_{ik}$.

D'après les hypothèses, pour tout couple $(i\,,\,k)$ de $I \times K$,

$$E_{ik} \amalg F_{ik} = E_{ik} \oplus F_{ik} \quad .$$

On peut donc déduire du lemme 2.1.1.1 que, pour tout couple $(i\,,\,k)$ de $I \times K$,

$$E_i \amalg F_k = E_i \oplus F_k \quad .$$

Pour tout i de I, les $\mathcal{C}$-morphismes e_i et c_i appartiennent à $\mathcal{B}'$, et admettent C_i comme source.

On peut donc considérer la famille inductive $(C_i\,,\,e_i\,,\,c_i)_{i\in I}$. On note E sa limite inductive dans la catégorie $\mathcal{C}$, et $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ les $\mathcal{C}$-morphismes canoniques $E_i \to E$. Comme $\mathcal{B}$ est stable par limite inductive dénombrable, E est un objet de la classe $\mathcal{B}$.

D'après les hypothèses sur $\mathcal{C}'$, $(E\,,\,\{\varepsilon_i\}_{i\in I})$ est aussi la limite inductive de la famille inductive dans la catégorie $\mathcal{C}'$; par suite, les ε_i appartiennent à $\mathcal{B}'$. Or $(E\,,\,\{\varepsilon_i \circ e_i\}_{i\in I})$ est objet de la catégorie auxiliaire dont $(C\,,\,\{c_i\}_{i\in I})$ est objet initial ; on peut donc en déduire qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme e, et un seul, de C dans E.

D'autre part, on a imposé par hypothèse que $\mathcal{B}'$ soit stable par limite inductive dénombrable, et l'on a vu que, pour tout i de I, le $\mathcal{C}$-morphisme

$$\varepsilon_i \circ e_i : C_i \to E$$

appartient à $\mathcal{B}'$; par conséquent, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme de $C = \varinjlim_{i\in I} C_i$ dans E.

On peut donc conclure que e appartient à $\mathcal{B}'$.

De même, on note F la limite inductive de la famille :

$$F = \varinjlim_{k\in K} (D_k\,,\,d_k\,,\,f_k) \quad ,$$

et on note φ_k le $\mathcal{C}$-morphisme canonique $F_k \to F$. On voit alors que F est un objet de la classe $\mathcal{B}$, et qu'il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme, et un seul, $f : D \to F$, tel que les diagrammes commutent.

Il reste à démontrer que $F \oplus E = F \amalg E$. Pour cela, il suffit de démontrer que, pour tout (X , ξ , η) , où X est un objet de $\mathcal{C}$, où ξ est un $\mathcal{C}$-morphisme : $E \to X$, et où η est un $\mathcal{C}$-morphisme : $F \to X$, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme $h : E \oplus F \to X$ vérifiant :

$$\xi = h \circ j_E \qquad \text{et} \qquad \eta = h \circ j_F \ .$$

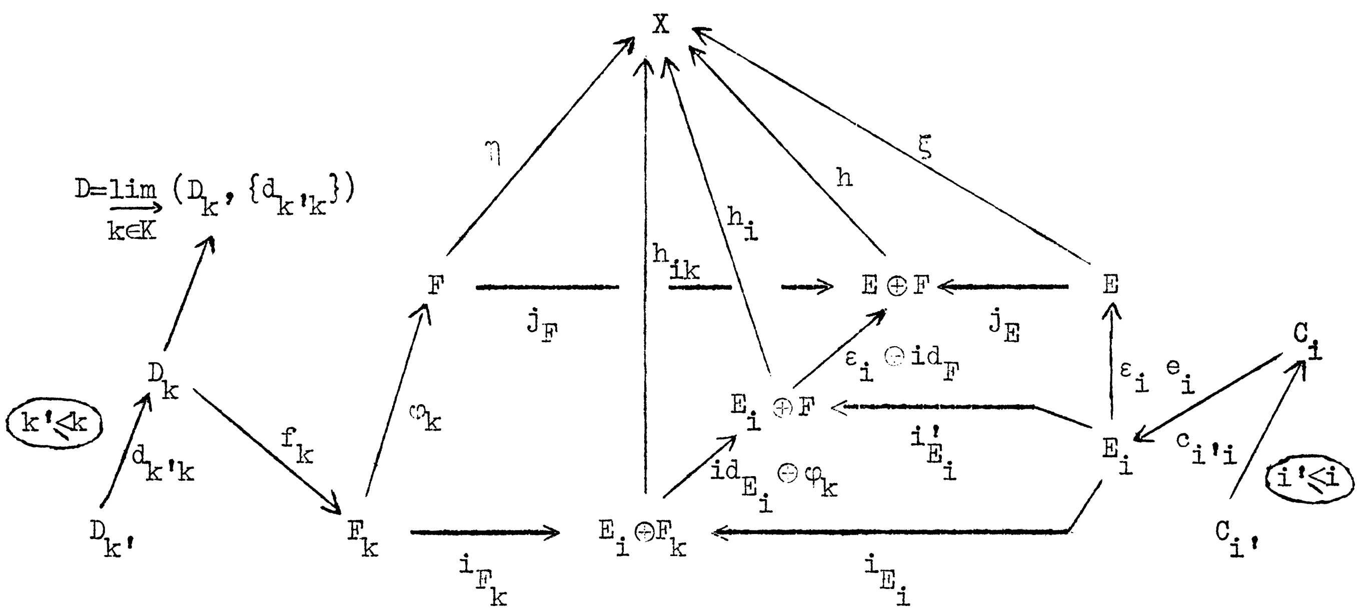
Or, pour tout couple (i , k) de $I \times K$, on a

$$E_i \amalg F_k = E_i \oplus F_k \ ;$$

par suite, on peut déterminer un $\mathcal{C}$-morphisme, et un seul, $h_{ik} : F_k \oplus E_i \to X$ vérifiant :

$$\xi \circ \varepsilon_i = h_{ik} \circ j_{E_i} \qquad \text{et} \qquad \eta \circ \varphi_k = h_{ik} \circ j_{F_k} \ .$$

On peut tracer un schéma des diagrammes :



Si l'on fixe i dans I , les $\mathcal{C}$-morphismes $(h_{ik})_{k \in K}$ vérifient :

$$\forall\ (k , k') \in K \times K : \ (k' \leqslant k) \implies (h_{ik} \circ i_{F_k} \circ f_k \circ d_{k'k} = h_{ik'} \circ i_{F_{k'}} \circ f_{k'}) \ .$$

Il existe donc un $\mathcal{C}$-morphisme h_i , et un seul : $E_i \oplus F \to X$ tel que, pour tout k de K ,

$$h_i \circ (id_{E_i} \oplus \varphi_k) = h_{ik} \ ,$$

où id_{E_i} désigne l'unité de $Hom_{\mathcal{C}}(E_i , E_i)$.

De même, si l'on désigne par $i^!_{E_i}$ le $\mathcal{C}$-morphisme canonique : $E_i \to E_i \oplus F$, les $(h_i)_{i \in I}$ vérifient :

$$\forall\,(j\,,\,j') \in I \times I\;:\;(j' \leqslant j) \implies (h_j \circ i'_{E_j} \circ e_j \circ c_{j'j} = h_{j'} \circ i'_{E_{j'}} \circ e_{j'})\;.$$

Il existe donc un $\mathcal{C}$-morphisme h, et un seul : $E \oplus F \to X$ vérifiant :

$$\xi = h \circ j_E \qquad \text{et} \qquad \eta = h \circ j_F\;.$$

On peut donc conclure que, à un $\mathcal{C}$-isomorphisme près,

$$(E \oplus F\,,\,j_E\,,\,j_F) = (E \amalg F\,,\,i_E\,,\,i_F)\;.$$

PROPOSITION 2.1.1. - <u>Si</u> $\mathcal{E}$ <u>vérifie la propriété suivante qui sera dite de "semi-compacité"</u> :

<u>Pour tout couple</u>

$$(A_i\,,\,\{f_{ij}\}_{i\geqslant j})_{i\in I} \qquad \underline{\text{et}} \qquad (B_k\,,\,\{g_{kh}\}_{k\geqslant h})_{k\in K}$$

<u>de systèmes projectifs dénombrables, dont les objets appartiennent à</u> $\mathcal{E}$, <u>et dont les morphismes appartiennent à</u> $\mathcal{B}'$, <u>la relation</u>

$$\varprojlim_{i\in I}(A_i\,,\,\{f_{ij}\}_{i\geqslant j}) \amalg \varprojlim_{k\in K}(B_k\,,\,\{g_{kh}\}_{k\geqslant h}) = \varprojlim_{i\in I}(A_i\,,\,\{f_{ij}\}_{i\geqslant j}) \oplus \varprojlim_{k\in K}(B_k\,,\,\{g_{kh}\}_{k\geqslant h})$$

<u>implique l'existence d'un ensemble fini</u> I_0 <u>contenu dans</u> I, <u>et d'un ensemble fini</u> K_0 <u>contenu dans</u> K, <u>tels que</u>

$$\varprojlim_{i\in I_0}(A_i\,,\,\{f_{ij}\}_{i\geqslant j}) \amalg \varprojlim_{k\in K_0}(B_k\,,\,\{g_{kh}\}_{k\geqslant h}) = \varprojlim_{i\in I_0}(A_i\,,\,\{f_{ij}\}_{i\geqslant j}) \oplus \varprojlim_{k\in K_0}(B_k\,,\,\{g_{kh}\}_{k\geqslant h})\;;$$

<u>alors, pour tout couple</u> $(A\,,\,B)$ <u>d'objets appartenant à</u> $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{E})$ <u>et vérifiant</u> :

$$(A \amalg B\,,\,i_A\,,\,i_B) = (A \oplus B\,,\,j_A\,,\,j_B)\;,$$

<u>il existe deux objets</u> A_1 <u>et</u> B_1 <u>de la classe</u> $\mathcal{B}$, <u>pour lesquels</u> $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\,,\,A_1) \cap \mathcal{B}'$ <u>et</u> $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B\,,\,B_1) \cap \mathcal{B}'$ <u>soient des ensembles non vides, et qui satisfassent à</u> :

$$(A_1 \amalg B_1\,,\,i_{A_1}\,,\,i_{B_1}) = (A_1 \oplus B_1\,,\,j_{A_1}\,,\,j_{B_1})\;.$$

<u>Démonstration</u>. - Les objets A et B peuvent s'écrire :

$$A = \varinjlim_{\sigma\in\Sigma}\Big(\varprojlim_{s<\sigma} A(s)\,,\,\{f_{ss'}\}_{s'<s}\,,\,\{f_{rs}\}_{r\leqslant s}\Big)\;,$$

et

$$B = \varinjlim_{\tau\in\Sigma}\Big(\varprojlim_{t<\tau} B(t)\,,\,\{g_{tt'}\}_{t'<t}\,,\,\{g_{tu}\}_{t\leqslant u}\Big)\;,$$

où les $A(s)$ et les $B(t)$ sont des objets de la classe $\mathcal{E}$, et où les $f_{ss'}$, f_{rs}, $g_{tt'}$, g_{tu} sont des $\mathcal{B}'$-morphismes.

On définit alors les objets suivants : pour $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$, on pose

$$A(\sigma) = \varprojlim_{s<\sigma} (A(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s})\ ;$$

pour $\tau \in \underset{\sim}{\Sigma}$, on pose de même

$$B(\tau) = \varprojlim_{t<\tau} (B(t)\ ,\ \{g_{tt'}\}_{t'<t})\ .$$

Ces objets sont des limites projectives dénombrables d'objets de $\mathcal{E}$, ils appartiennent donc à $\mathcal{B} = \mathcal{E}_\Omega$.

Comme, pour toute suite $\sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}$, le $\mathcal{C}$-morphisme $f_\sigma : A(\sigma) \to A$ appartient à $\mathcal{B}'$ et, pour toute suite $\tau \in \underset{\sim}{\Sigma}$, le $\mathcal{C}$-morphisme $g_\tau : B(\tau) \to B$ appartient aussi à $\mathcal{B}'$, on peut déduire du lemme 2.1.1 que

$$\forall\ (\sigma\ ,\ \tau) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{\Sigma}\ , \qquad A(\sigma) \amalg B(\tau) = A(\sigma) \oplus B(\tau)\ .$$

Comme la classe $\mathcal{E}$ est "semi-compacte", on peut alors déduire que, pour tout couple $(\sigma\ ,\ \tau)$ de $\underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{\Sigma}$, on peut déterminer un couple $(s_{\sigma\tau}\ ,\ t_{\sigma\tau})$ de $\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{S}$, vérifiant $s_{\sigma\tau} < \sigma$ et $t_{\sigma\tau} < t$, et pour lesquels

$$\varprojlim_{s'<s_{\sigma\tau}} (A(s')\ ,\ \{f_{s's''}\}) \amalg \varprojlim_{t'<t_{\sigma\tau}} (B(t')\ ,\ \{g_{t't''}\})$$
$$= \varprojlim_{s'<s_{\sigma\tau}} (A(s')\ ,\ \{f_{s's''}\}) \oplus \varprojlim_{t'<t_{\sigma\tau}} (B(t')\ ,\ \{g_{t't''}\})\ .$$

Si l'on fixe la suite τ de $\underset{\sim}{\Sigma}$, on peut remarquer que, puisque $\underset{\sim}{S}$ est dénombrable, l'ensemble $\underset{\sim}{S}_{1,\sigma} = \{s_{\sigma\tau}\ :\ \sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}\}$ est dénombrable et que, de même, l'ensemble $\underset{\sim}{S}_1 = \{s_{\sigma\tau}\ :\ \sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}\ ,\ \tau \in \underset{\sim}{\Sigma}\}$ est dénombrable.

Or, pour tout couple $(\sigma\ ,\ \tau) \in \underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{\Sigma}$, on peut déduire du lemme 2.1.1.1, que

$$\varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s')) \amalg \varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{t'<t_{\rho\tau}} B(t')) = \varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s')) \oplus \varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{t'<t_{\rho\tau}} B(t'))\ .$$

Comme, pour toute suite σ, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme :

$$A(\sigma) \to \varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))\ ,$$

et comme les $\mathcal{B}'$-morphismes rendent les diagrammes de système inductif commutatifs, on peut déduire qu'il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme admettant $A = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} A(\sigma)$ comme source, et $A_1 = \varinjlim_{\sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}} [\varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))]$ comme but.

De même, on montre qu'il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme admettant comme source $B = \varinjlim_{\tau\in\underset{\sim}{\Sigma}} B(\tau)$ et, comme but, $B_1 = \varinjlim_{\tau\in\underset{\sim}{\Sigma}} [\varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))]$.

Comme $\{s_{\sigma\rho} : \rho \in \underset{\sim}{\Sigma}\}$ est dénombrable, l'objet $[\varprojlim_{\rho\in\underset{\sim}{\Sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))]$ est une limite projective dénombrable d'objets de $\mathcal{B}$, c'est, par suite, un objet de la classe $\mathcal{B}$. [On peut remarquer que cet objet s'écrit $\varprojlim_{s_{\sigma\rho}\in\underset{\sim}{S}_{1,\sigma}} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))$.]

Comme l'ensemble $\underset{\sim}{S}_1$ est dénombrable, tout sous-ensemble strictement croissant, pour l'inclusion de l'ensemble $\{\underset{\sim}{S}_{1,\sigma} : \sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}\} \subset \underset{\sim}{S}_1$, est dénombrable.

Soit $S'_1 , S'_2 , \ldots , S'_n , \ldots$ une suite cofinale à $\{\underset{\sim}{S}_{1,\sigma} : \sigma \in \underset{\sim}{\Sigma}\}$. Alors A_1 s'écrit :

$$A_1 = \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} [\varprojlim_{s_{\sigma\rho}\in S'_n} (\varprojlim_{s'<s_{\sigma\rho}} A(s'))] .$$

L'objet A_1 est donc une limite inductive dénombrable d'objets de $\mathcal{B}$, c'est, par suite, un objet de $\mathcal{B}$. De même, B_1 est un objet de $\mathcal{B}$. On peut alors déduire du lemme 2.1.1.2 que $A_1 \amalg B_1 = A_1 \oplus B_1$. La proposition est donc démontrée.

PROPOSITION 2.1.2. - <u>Si l'on conserve les notations de la proposition précédente, toute</u> $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-<u>mesure</u>, μ , <u>peut se prolonger en une</u> $\mathfrak{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{E})$-$\mathcal{B}'$-<u>application vérifiant</u> (a'_σ), <u>et notée</u> μ^* .

<u>Démonstration</u>. - Si A est un noyau de $\mathcal{B}$-système déterminant par des morphismes de $\mathcal{B}'$, on considère le sous-ensemble de l'espace vectoriel normé complet E , défini par

$$M(A) = \{\mu(A_1) : A_1 \in \mathcal{B} , \exists f , \mathcal{B}'\text{-morphisme} : A \to A_1\} .$$

Si l'on note $\mathbb{S}(A)$ la classe des objets de $\mathcal{B}$, définie par

$$\mathbb{S}(A) = \{A_1 \in \mathcal{B} : \exists f , \mathcal{B}'\text{-morphisme} : A \to A_1\} ,$$

on peut munir $\mathbb{S}(A)$ d'un préordre ; on écrira :

$$(A_1 \subset A'_1) \iff (\exists h , \mathcal{B}'\text{-morphisme} : A_1 \to A'_1) .$$

La classe $\mathbb{S}(A)$, munie de ce préordre, est réticulée à gauche.

En effet, si A_1 et B_1 appartiennent à cette classe, ils appartiennent à $\mathcal{B}$, et vérifient :

$$\exists\, f \;,\;\; \mathfrak{B}'\text{-morphisme} : \;\; A \to A_1 \;,$$

$$\exists\, g \;,\;\; \mathfrak{B}'\text{-morphisme} : \;\; A \to B_1 \;.$$

La catégorie $\mathcal{C}'$ étant la sous-catégorie de $\mathcal{C}$, définie à la proposition 2.1.1, l'objet $C_1 = \varprojlim (A_1 , B_1) , \{f , g\}$ est encore un objet de $\mathfrak{B}$, puisque cette classe est stable par limite projective dénombrable (la limite projective est considérée dans la catégorie $\mathcal{C}'$). Comme $\mathfrak{B}'$ a été supposé stable par limite projective, il existe un $\mathcal{C}$-morphisme h appartenant à $\mathfrak{B}'$, de A dans C_1. De plus, les $\mathcal{C}$-morphismes canoniques :

$$f' : \; C_1 \to A_1 \qquad \text{et} \qquad g' : \; C_1 \to B_1$$

appartiennent aussi à $\mathfrak{B}'$, et h vérifie :

$$f' \circ h = f \qquad \text{et} \qquad g' \circ h = g \;.$$

L'objet C_1 est un objet de $\mathbb{S}(A)$, qui vérifie :

$$C_1 \subset A_1 \qquad \text{et} \qquad C_1 \subset B_1 \;.$$

On peut donc conclure que $\mathbb{S}(A)$ est réticulé à gauche.

On considère sur E le filtre $\mathfrak{F}$, dont une base est constituée par

$$(F(A_1) = \{\mu(B_1) \;:\; B_1 \in \mathbb{S}(A) \;,\;\; B_1 \subset A_1\})_{A_1 \in \mathbb{S}(A)} \;.$$

Pour montrer que ce filtre converge, il suffit de montrer qu'il est de Cauchy.

Si le filtre $\mathfrak{F}$ n'était pas de Cauchy, on pourrait écrire :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;,\;\; \forall\, A_1 \in \mathbb{S}(A) \;,\;\; \exists\, B_1 \subset A_1 \;,\;\; B_1 \in \mathbb{S}(A) \;,\;\; \exists\, C_1 \subset A_1 \;,\;\; C_1 \in \mathbb{S}(A) :$$
$$\|\mu(B_1) - \mu(C_1)\| \geqslant \varepsilon \;.$$

Comme $\mathbb{S}(A)$ est réticulé à gauche :

$$\forall\, A_2 \in \mathbb{S}(A) : \;\; A_2 \subset B_1 \;,\;\; A_2 \subset C_1 \;,\;\; \exists\, B_2 \subset A_2 \;,\;\; \exists\, C_2 \subset A_2 :$$
$$\|\mu(B_2) - \mu(C_2)\| \geqslant \varepsilon$$

...

$$\forall\, A_n \in \mathbb{S}(A) : \;\; A_n \subset B_{n-1} \;,\;\; A_n \subset C_{n-1} \;,\;\; \exists\, B_n \subset A_n \;,\;\; \exists\, C_n \subset A_n :$$
$$\|\mu(B_n) - \mu(C_n)\| \geqslant \varepsilon$$

...

On construit ainsi un système projectif $(B_n , C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réticulé à droite. L'objet

$\varprojlim\limits_{n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}} \{B_n , C_n\}$ par les $\mathcal{B}'$-morphismes, construits dans la récurrence, appartient à la classe $\mathcal{B}$, et il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme $h : A \rightarrow \varprojlim\limits_{n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}} (B_n , C_n)$; par suite, il appartient à $\mathcal{S}(A)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & \varprojlim\limits_{n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}} (B_n , C_n) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddrrr, dashed] & B_n \arrow[dr] & & C_n \arrow[dl] \\
 & & A_n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & B_{n-1} \arrow[dr] & & C_{n-1} \arrow[dl] \\
 & & A_{n-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & {} & & {}
\end{tikzcd}$$

La mesure $\mu(\varprojlim\limits_{n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}} B_n , C_n)$ ne peut être égale à $\lim\limits_{n \to \infty} (\mu(B_n) , \mu(C_n))$, puisque, pour tout entier n ,

$$\|\mu(B_n) - \mu(C_n)\| \geqslant \varepsilon \quad .$$

On obtient un résultat contraire à l'axiome (a'_δ). Il en résulte que le filtre $\mathfrak{F}$ est de Cauchy, il admet donc une limite, on la désigne par $\mu^*(A)$.

L'application μ^* de $\mathfrak{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ dans E vérifie l'axiome (a'_σ).

En effet, si A et B appartiennent à $\mathfrak{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, et vérifient $A \amalg B = A \oplus B$, on peut déduire de la proposition 2.1.1 qu'il existe deux objets A_1 et B_1 de $\mathcal{B}$, vérifiant :

$$A \subset A_1 , \quad B \subset B_1 , \qquad \text{et} \qquad A_1 \amalg B_1 = A_1 \oplus B_1 \quad .$$

D'après la définition de μ^* , pour tout réel ε strictement positif, il existe A' et B' , objets de $\mathcal{B}$, que l'on peut choisir vérifiant :

$$A \subset A' \subset A_1 \qquad \text{et} \qquad B \subset B' \subset B_1 \quad ,$$

et tels que

$$\|\mu^*(A) - \mu(A')\| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \|\mu^*(B) - \mu(B')\| < \varepsilon \quad .$$

Ceux-ci vérifient alors $A' \amalg B' = A' \ominus B'$, et, par conséquent,

$$\mu(A' \amalg B') = \mu(A') + \mu(B') \quad .$$

Il en résulte que

$$\mu^*(A \amalg B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \quad .$$

De plus, si $(A_n , \{f_{np}\}_{n\leq p})_{n\in\mathbb{N}}$ constitue un système inductif dénombrable, où les A_n appartiennent à $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, et les f_{np} à $\mathcal{B}'$, on note A la limite inductive de ce système. Pour tout réel ε strictement positif, il existe un objet A' de la classe $\mathcal{B}$, vérifiant $A' \supset A$ et, pour tout objet B de $\mathcal{B}$, tel que $A \subset B \subset A'$, alors $\|\mu^*(A) - \mu(B)\| < \varepsilon$. De même, pour tout entier n , il existe des objets A'_n de $\mathcal{B}$, vérifiant $A_n \subset A'_n$, et pour lesquels on ait l'implication

$$(B_n \in \mathcal{B} , \quad A_n \subset B_n \subset A'_n) \implies (\|\mu^*(A_n) - \mu(B_n)\| < \varepsilon/2^n) \quad .$$

On note alors, pour tout entier n , $B_n = \varprojlim (A'_n , A')$. Cet objet B_n vérifie bien les conditions imposées, et on peut conclure que

$$\|\mu^*(A_n) - \mu(B_n)\| < \varepsilon/2^n \quad .$$

L'objet $A' = \varinjlim B_n$ vérifie $\|\mu(A') - \mu^*(A)\| < \varepsilon$. Par suite, puisque l'axiome (a'_σ) est vérifié par μ sur les objets de la classe $\mathcal{B}$, on peut déduire que

$$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+_* , \qquad \|\mu^*(A) - \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)\| < 2\varepsilon \quad ,$$

et donc que $\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$. On peut alors conclure que l'axiome (a'_σ) est vérifié par μ^* sur la classe $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

La vérification de l'axiome (a'_δ) se déduira, pour les mesures de Radon, de la proposition 2.1.3.

PROPOSITION 2.1.3. - <u>Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition</u> 2.1.2, <u>si</u> $\mathcal{K}$ <u>est une sous-classe de</u> $\mathcal{B}$, <u>stable par limite inductive finie et limite projective quelconque, et semi-compacte, et si</u> μ <u>est une mesure de Radon pour</u> $\mathcal{K}$, <u>alors</u> μ^* <u>est encore une mesure de Radon pour</u> $\mathcal{K}$.

<u>Démonstration</u>. - Pour tout objet A de $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, on a défini $\mu^*(A)$ par

$$\mu^*(A) = \lim_{\mathfrak{F}} \mu(A_1) \quad ,$$

où $\mathfrak{F}$ est le filtre de Cauchy défini à la proposition 2.1.2.

Comme E est normé, il existe une suite $B_1 , \dots , B_n , \dots$ d'éléments de $\mathbb{S}(A)$ tels que $\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Comme $\mathbb{S}(A)$ est réticulé à gauche, on peut de plus supposer que la suite $(B_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est décroissante pour le préordre sur $\mathbb{S}(A)$.

Pour montrer que μ^* est de Radon pour $\mathcal{K}$, il suffit de montrer que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ K$, objet de $\mathcal{K}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme $k : K \to A$, tels que, pour tout objet C de $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, vérifiant les conditions de l'axiome (b'), on ait $\|\mu^*(C)\| < \varepsilon$.

Dans le cas particulier où A peut s'écrire comme une limite projective d'objets de la classe $\mathcal{B}$ par des $\mathcal{B}'$-morphismes,

$$A = \varprojlim_{i\in I} (A_i , a_i) \quad ,$$

pour tout objet A_i de la classe $\mathcal{B}$, on peut déterminer un objet K_i de la classe $\mathcal{K}$, tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(K_i , A_i)$ contienne au moins un morphisme h_i , et tel que, pour tout objet C de la classe $\mathcal{B}$ pour lequel

$$K_i \amalg C = K_i \oplus C \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(K_i \oplus C , A_i) \neq \emptyset \quad ,$$

on ait $\|\mu(C)\| < \varepsilon$.

On considère alors l'objet $\varprojlim_{i\in I} (A_i , a_i , h_i) = K$. Comme $A = \varprojlim_{i\in I} (A_i , a_i)$, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme f admettant K comme source, et A comme but, et f est le seul $\mathcal{C}'$-morphisme de K dans A , vérifiant, si l'on note k_i les $\mathcal{B}'$-morphismes : $K \to K_i$, les relations :

$$h_i \circ k_i = a_i \circ f \qquad (\forall\ i \in I) \quad .$$

L'objet K vérifie alors :

Pour tout objet C de la classe $\mathcal{B}$ pour lequel

$$C \amalg K = C \oplus K \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(C \amalg K , A) \neq \emptyset \quad ,$$

on a $\|\mu(C)\| < \varepsilon$.

Or, pour tout objet C de $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, on a

$$\mu^*(C) = \text{limite suivant l'ordre d'inclusion sur } \mathbb{S}(C) \text{ de } \{\mu(C_1)\}_{C_1\in\mathbb{S}(C)} \quad .$$

On peut donc conclure que la propriété énoncée pour K reste vraie pour tout objet C de $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.

Dans le cas général, on peut faire la démonstration suivante. On impose que la classe $\mathcal{K}$ soit telle que, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe un objet K de $\mathcal{K}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme $b : K \to X$. Alors la classe

$$\mathfrak{J}(A) = \{K \in \mathcal{K} : \exists \text{ un } \mathcal{B}'\text{-morphisme } b : K \to A\}$$

est non vide. Si K_1 et K_2 sont deux objets de $\mathfrak{J}(A)$, il existe deux $\mathcal{B}'$-morphismes $b_1 : K_1 \to A$ et $b_2 : K_2 \to A$.

Si $\mathcal{K}$ est stable par limite inductive finie, l'objet $K = \varinjlim (K_1 , b_1) , (K_2 , b_2)$ appartient à $\mathcal{K}$. De plus, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme $b : K \to A$. La classe $\mathfrak{J}(A)$, munie du préordre :

$$(K_1 \subset K_2) \iff (\exists\, k ,\ \mathcal{B}'\text{-morphisme} : K_1 \to K_2) \quad ,$$

est donc réticulée à droite.

Si l'on considère le filtre $\mathfrak{F}_0$ sur E , qui admet pour base :

$$F_0(K_1) = \{\mu(K_2) : K_2 \in \mathfrak{J}(A) ,\ K_1 \subset K_2\}_{K_1 \in \mathfrak{J}(A)} \quad ,$$

le filtre est un filtre de Cauchy sur E (la démonstration est analogue à celle de $\mathfrak{F}$), par suite il converge, et l'on note $\mu^0(A)$ sa limite.

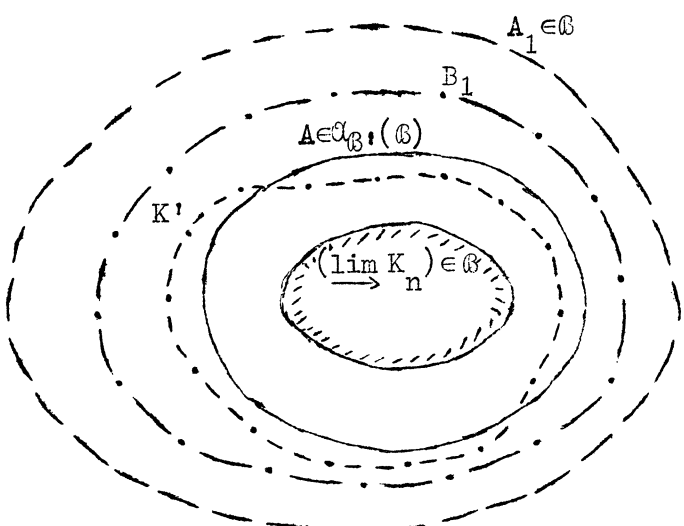
Comme E est normé, il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que l'on peut supposer croissante, d'objets de $\mathfrak{J}(A)$, qui vérifie :

$$\mu^0(A) = \mu(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_n) \quad .$$

De plus, on peut remarquer que $(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_n)$ appartient à $\mathcal{B}$.

Si l'on suppose $\mu^0(A) \neq \mu^*(A)$, il existe un réel α strictement positif, tel que

$$\|\mu^0(A) - \mu^*(A)\| = \alpha \quad .$$



Utilisant les définitions :

$$\mu^*(A) = \lim_{\mathfrak{F}} \{\mu(A_1) : A_1 \in \mathbb{S}(A)\} ,$$

$$\mu^0(A) = \lim_{\mathfrak{F}_0} \{\mu(H_1) : H_1 \in \mathfrak{J}(A)\} ,$$

on déduit :

Il existe un objet A_1 de $\mathbb{S}(A)$, vérifiant :

(1) $$(B_1 \in \mathbb{S}(A) , \ B_1 \subset A_1) \implies (\|\mu(B_1) - \mu(A_1)\| < \frac{\alpha}{8}) ,$$

de même, il existe un objet H_1 de $\mathfrak{J}(A)$, vérifiant :

$$(J_1 \in \mathfrak{J}(A) , \ H_1 \subset J_1) \implies (\|\mu(H_1) - \mu(J_1)\| < \frac{\alpha}{8}) ;$$

la conclusion suivante se déduit des deux premières relations :

(2) $$(B_1 \in \mathbb{S}(A) , \ B_1 \subset A_1 , \ J_1 \in \mathfrak{J}(A) , \ J_1 \supset H_1) \implies (\|\mu(B_1) - \mu(J_1)\|) > \frac{\alpha}{2} .$$

Comme μ est de Radon pour $\mathcal{K}$, et que B_1 appartient à $\mathcal{B}$, il existe un objet K' de $\mathcal{K}$, vérifiant $K' \subset B_1$, ce qui signifie qu'on peut déterminer un $\mathcal{B}'$-morphisme $f : K' \to B_1$, cet objet K' étant tel que tout objet C de $\mathcal{B}$, pour lequel il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme $f_C : C \amalg K \to B_1$ vérifiant $f_C \circ i_K = f$, où i_K désigne le $\mathcal{C}$-morphisme canonique : $K \to C \amalg K$, satisfait à

$$\|\mu(C)\| < \frac{\alpha}{8} .$$

Comme E est normé, et comme l'ensemble des objets C vérifiant la relation précédente est réticulé à droite, on peut définir une suite $(C_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ de tels objets, vérifiant :

$$\mu(B_1) = \mu(K') + \mu(\varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} C_n) .$$

Or K' appartient à $\mathcal{K}$, et $\mathcal{K}$ est stable par limite projective finie ; par suite, pour tout entier n ,

$$\varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}} (K' , K_n) \qquad \begin{array}{l}\text{(par les } \mathcal{B}'\text{-morphismes } K' \to B_1 \\ \text{et les } \mathcal{B}'\text{-morphismes composés } K_n \to A \to B_1)\end{array}$$

est un objet de $\mathcal{K}$ et, plus précisément, un objet de $\mathfrak{J}(A)$.

Comme $\|\mu(\varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} C_n)\| \leqslant \frac{\alpha}{8}$, on peut déduire que

$$\|\mu(K') - \mu[\varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} (\varprojlim K', K_n)]\| \geqslant \frac{\alpha}{4} .$$

Par conséquent, il existe un objet X de $\mathcal{B}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme $f_{XK'}$ de X dans K', tels que

$$\|\mu(X)\| \geqslant \frac{\alpha}{2} .$$

De plus, utilisant la propriété 2.1.1, on peut déterminer X tel qu'il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme,

$$f : X \amalg \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} (\varprojlim K', K_n) \longrightarrow K' .$$

Comme $X \ominus A$ appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, il existe un objet D_1 de $\mathcal{B}$, appartenant à la classe $\mathcal{S}(X \oplus A)$, et vérifiant :

$$\|\mu^*(X \oplus A) - \mu(D_1)\| < \frac{\alpha}{8} .$$

De plus, d'après la proposition 2.1.1, on peut choisir $D_1 \subset B_1$. La dernière inégalité entraîne alors :

$$\|\mu(A_1) - \mu(D_1)\| = \|[\mu(A_1) - \mu^*(A)] + [\mu^*(A) - \mu^*(A \oplus X)] + [\mu^*(A \oplus X) - \mu(D_1)]\|$$

$$\geqslant \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{8} - \frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{4} .$$

Ceci est en contradiction avec l'appartenance de D_1 à $\mathcal{S}(A)$ et avec l'existence d'un $\mathcal{B}'$-morphisme : $D_1 \to A_1$ et d'un autre $\mathcal{B}'$-morphisme : $A \to D_1$ (d'après la relation (1)).

On doit donc conclure que, sur $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, on a $\mu^* = \mu^0$. Il est immédiat que ceci entraîne que μ^* est une application de Radon pour $\mathcal{K}$.

COROLLAIRE 2.1.3.1. - <u>Toute</u> $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-<u>mesure</u> μ <u>de Radon, pour une sous-classe</u> $\mathcal{K}$ <u>semi-compacte de</u> $\mathcal{B}$, <u>peut se prolonger en une</u> $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$-$\mathcal{B}'$-<u>mesure, notée</u> μ^*, <u>de Radon pour</u> $\mathcal{K}$.

<u>Démonstration</u>. - On a vu à la proposition 2.1.2 que μ^* vérifie l'axiome (a'_σ), et à la proposition 2.1.3 que μ^* vérifie (b'). Il reste à démontrer l'axiome (a'_δ).

Si $(A_n, \{f_{np}\}_{n\geqslant p})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ est un système projectif dénombrable, où les A_n appartiennent à $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, et les (f_{np}) à $\mathcal{B}'$, on note A la limite projective de ce système. Comme μ^* est de Radon sur $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, pour tout réel ε strictement positif, il existe un compact $K \subset A$, tel que, pour tout compact K' vérifiant : $K \subset K' \subset A$, on ait $\|\mu^*(A) - \mu(K')\| < \varepsilon$.

De même, pour tout entier n, il existe un compact $K_n \subset A_n$, tel que, pour tout compact K'_n vérifiant : $K_n \subset K'_n \subset A_n$, on ait $\|\mu^*(A_n) - \mu(K'_n)\| < \varepsilon/2^n$.

Si l'on pose $\underrightarrow{\lim}\,(K_n , K) = K'_n$, puis $\underset{n\in\underset{\sim}{N}}{\underleftarrow{\lim}}\,(\underrightarrow{\lim}\, K_n , K) = K'$, on déduit alors que

$$\forall\ \varepsilon \in \underset{\sim}{R}^+_* , \qquad \|\mu^*(A) - \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)\| \leqslant 2\varepsilon \ .$$

On peut donc conclure que

$$\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) \quad ,$$

et, par suite, l'axiome (a'_δ) est donc bien vérifié.

EXEMPLES.

<u>Mesures de Radon sur un espace topologique semi-compact.</u> - Soient Ω un espace topologique semi-compact, et $\mathcal{B}$ le σ-anneau des boréliens sur Ω. On note $\mathcal{B}'$ l'ensemble des injections d'un sous-ensemble de Ω dans un autre qui le contienne. La classe $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ est alors la classe des ensembles sousliniens sur Ω.

On peut déduire de l'étude précédente que toute mesure μ sur $\mathcal{B}$, de Radon par rapport à la classe $\mathcal{K}$ des compacts de Ω, peut se prolonger en une mesure μ^* sur la classe $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$, de Radon pour $\mathcal{K}$.

<u>Mesures de Radon sur un semi-groupe</u> G <u>semi-compact.</u> - Si G est un semi-groupe, et si l'ensemble G est muni d'une topologie τ semi-compacte (c'est-à-dire telle que, de toute famille dénombrable de fermés ayant une intersection vide, on puisse extraire une sous-famille finie d'intersection vide), la topologie τ n'étant pas nécessairement une topologie de semi-groupe, si, pour la topologie τ, les translations à gauche sont continues, on peut encore obtenir une notion de mesure.

On considère la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les sous-ensembles de G, et dont les morphismes sont les translations à gauche. On étudie le cas où $\mathcal{B}'$ est la classe de tous les morphismes de $\mathcal{C}$, et où $\mathcal{B}$ est le σ-anneau engendré par les fermés de τ. Si s est un élément de G, on note s_g la translation à gauche définie par s. Pour tout s, s_g est continue (mais non nécessairement biconti-nue, car G est supposé seulement semi-compact), et la topologie τ_s, image de τ par s_g, est plus fine que τ ; on suppose, de plus, que les compacts de τ_s sont les images de ceux de τ. Les σ-anneaux $\mathcal{B}_s$, engendrés par les fermés des topologies τ_s, contiennent $\mathcal{B}$.

Une mesure μ sur G sera une $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-mesure, si elle est invariante par translations à gauche au sens que :

$$\forall\ s \in G\ ,\quad \forall\ B \text{ borélien de } G \text{ pour } \mathcal{B}\ ,\qquad \mu[s_g^{-1}(B)] = \mu(B)\quad .$$

Dans la suite, on suppose que μ est de Radon.

Comme, pour tout s , s_g est continue, et que les compacts de τ et de τ_s sont les mêmes, on peut donc prolonger μ en une mesure μ_s sur le σ-anneau $\mathcal{B}_s$. D'après le corollaire 2.1.3.1, μ_s peut se prolonger en une $\mathcal{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}_s)$-mesure, c'est-à-dire se prolonger en une mesure de Radon sur les ensembles obtenus par l'opération $\mathcal{A}$ de Souslin sur le σ-anneau $\mathcal{B}_s$.

On peut donc finalement conclure que la réunion, pour tous les éléments s de G , des ensembles sousliniens pour les topologies τ_s , est contenue dans le σ-anneau des ensembles μ^*-mesurables.

2.2. Capacités sur des catégories.

On peut se placer dans un cadre plus général que celui étudié précédemment, et définir une notion de capacité sur les catégories.

On considère une catégorie $\mathcal{C}$ stable par limites inductives et projectives de puissance dénombrable.

Comme précédemment, on note $\mathcal{B}'$ une sous-classe de la classe des morphismes de $\mathcal{C}$, stable par composition, contenant les identités sur les objets de $\mathcal{C}$, stable par limites inductives et projectives. Cependant, on n'impose plus que $\mathcal{B}'$ soit contenue dans l'ensemble des morphismes injectifs. La relation entre A et B : $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\ ,\ B) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset)$ est donc encore une relation de préordre, mais

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\ ,\ B) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B\ ,\ A) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset)$$

n'entraîne plus que A et B soient $\mathcal{B}'$-isomorphes, ni même qu'ils soient $\mathcal{C}$-isomorphes.

On désigne par $\mathcal{K}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-classes de la classe des objets de $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ étant stable par limite inductive finie, et par limite projective dénombrable par des $\mathcal{B}'$-morphismes, et $\mathcal{G}$ stable par limite projective finie et par limite inductive de système inductif dénombrable par des $\mathcal{B}'$-morphismes. On suppose en outre que, pour tout objet A de $\mathcal{C}$, il existe un objet H de $\mathcal{K}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H\ ,\ A) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset\quad ,$$

et un objet G de $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A\ ,\ G) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset\quad .$$

<u>Définition d'une capacité</u>. - On appellera capacité relative à $\mathcal{K}$ et à $\mathcal{B}'$, et on notera $\mathcal{K}$-$\mathcal{B}'$-capacité, toute application $f : \mathcal{K} \to E$ où E désigne un espace de Banach, continue à droite au sens que :

Pour tout système projectif $(A_i , \{f_{ij}\}_{i \geqslant j})_{i \in I}$, indexé par un ensemble I dénombrable et muni d'un préordre réticulé à droite, où les objets A_i appartiennent à la classe $\mathcal{K}$ et les morphismes f_{ij} à $\mathcal{B}'$, la limite $\lim\limits_{i\uparrow} f(A_i)$ existe et est égale à

$$f(\varprojlim_{i \in I} A_i) \quad .$$

<u>Capacités intérieures et extérieures. Objets capacitables</u>. - Sur la classe des objets de $\mathcal{C}$, on peut définir une relation de préordre qui sera dite d'<u>inclusion</u> :

$$(A \subset B) \iff (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , B) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset) \quad .$$

Si A est un objet de $\mathcal{C}$, on note $\mathfrak{I}(A)$ la classe :

$$\mathfrak{I}(A) = \{H \in \mathcal{K} , \quad H \subset A\} \quad .$$

Comme $\mathcal{K}$ est stable par limite inductive finie, l'ensemble $\mathfrak{I}(A)$, muni du préordre d'<u>inclusion</u> (qui n'est pas ici un ordre), est réticulé à droite.

On peut alors considérer le filtre sur E, $\mathfrak{F}_*(A)$, dont une base est constituée par :

$$(F(H) = \{f(H') : \quad H' \in \mathcal{K} , \quad H \subset H' \subset A\})_{H \in \mathfrak{I}(A)} \quad .$$

Lorsque ce filtre admet une limite, on note $f_*(A)$ cette limite, et f_* est appelée <u>capacité intérieure</u> de A.

Dans la suite, on suppose que, pour tout objet G de $\mathcal{G}$, le filtre $\mathfrak{F}_*(G)$ converge, c'est-à-dire que

$$\forall\, G \in \mathcal{G} , \quad \forall\, \varepsilon > 0 , \quad \exists\, H \in \mathcal{K} : \quad (H' \in \mathcal{K} , \quad H \subset H' \subset G) \implies \|f(H) - f(H')\| < \varepsilon \, .$$

De même, si A est un objet de $\mathcal{C}$, on définit :

$$\mathbb{S}(A) = \{G \in \mathcal{G} : \quad G \supset A\} \quad .$$

Comme $\mathcal{G}$ est stable par limite projective finie, $\mathbb{S}(A)$ est muni d'un préordre réticulé à gauche.

On définit alors le filtre $\mathfrak{F}^*(A)$ sur E dont une base est :

$$(F(G) = \{f(G') : \quad G' \in \mathcal{G} , \quad A \subset G' \subset G\})_{G \in \mathbb{S}(A)} \quad .$$

Lorsque ce filtre est de Cauchy, on note $f^*(A)$ sa limite, et $f^*(A)$ est appelée <u>capacité extérieure</u> de A.

<u>Objet capacitable</u>. - Si A est un objet de $\mathcal{C}$ qui admette une capacité intérieure $f_*(A)$ et une capacité extérieure $f^*(A)$, on dira que A est capacitable si

$$f_*(A) = f^*(A) .$$

On note alors $f(A)$ leur valeur commune. On désignera par Ob cap (f) la classe des objets capacitables pour f. Il est évident, d'après les définitions, que tout objet G de $\mathcal{G}$ est <u>capacitable</u>.

Dans la suite, on se limitera à l'étude des capacités f pour lesquelles tout objet de $\mathcal{K}$ soit capacitable, c'est-à-dire pour lesquelles $f_*(H) = f^*(H)$. On peut remarquer que, si H appartient à $\mathcal{K}$, on a nécessairement $f_*(H) = f(H)$. Il n'y a donc pas de contradiction à noter $f(H)$ leur valeur commune.

La proposition suivante indique une condition suffisante pour qu'un objet de $\mathcal{K}$ soit capacitable.

PROPOSITION 2.2.1. - <u>Si</u> H <u>est un objet de</u> $\mathcal{K}$, <u>admettant une capacité extérieure</u> $f^*(H)$, <u>et si</u> H <u>est une limite projective d'un système projectif dénombrable d'objets de la classe</u> $\mathcal{G}$ <u>par des</u> $\mathcal{B}'$<u>-morphismes, alors</u> H <u>est capacitable pour la capacité</u> f <u>relative aux classes</u> $\mathcal{K}$, $\mathcal{G}$, <u>et</u> $\mathcal{B}'$, <u>c'est-à-dire que l'égalité</u>

$$f^*(H) = f(H)$$

<u>est vérifiée</u>.

<u>Démonstration</u>. - Si H est un objet de $\mathcal{K}$, il existe une suite $(G_n)_{\underset{\sim}{N}}$ d'objets de $\mathcal{G}$, et une suite $(f_n)_{\underset{\sim}{N}}$ de $\mathcal{B}'$-morphismes, $f_n : H \to G_n$, tels que

$$f^*(H) = \lim_{n\to\infty} f(G_n) .$$

Comme $\mathcal{G}(H)$ est réticulé à gauche, on peut supposer que la suite (G_n) est décroissante pour le préordre appelé "inclusion", et, comme H appartient à la classe $\mathcal{G}_\delta$, on peut supposer que $H = \varprojlim_{n\in\underset{\sim}{N}} (G_n)$. Si l'on considère G_1 :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ H_1 \in \mathcal{K}\ ,\quad H_1 \subset G_1\ :\quad (K \in \mathcal{K}\ ,\quad H_1 \subset K \subset G_1) \implies (\|f(K) - f(G_1)\| < \varepsilon).$$

En remplaçant le cas échéant H_1 par $\varinjlim (H_1 , H)$, on peut supposer $H \subset H_1$.

Dans la suite, on note $(f_{np})_{n\geqslant p}$ un système inductif de $\mathcal{B}'$-morphismes :

$$f_{np} : G_n \to G_p ,$$

et on note φ_1 un $\mathcal{B}'$-morphisme : $H_1 \to G_1$. L'objet

$$G_2' = \varprojlim (H_1 , \varphi_1 ; G_2 , f_{21})$$

vérifie alors : $\exists\, H_2 \in \mathcal{H}$, $H_2 \subset G_2'$ (et on peut supposer $H_2 \supset H$) tel que, $\forall\, K \in \mathcal{H}$,

$$(H_2 \subset K \subset G_2') \implies (\|f(K) - f_*(G_2')\| < \frac{\varepsilon}{2}) ,$$

ce qui entraîne

$$(K \in \mathcal{H} ,\ H_2 \subset K \subset G_2) \implies (\|f(K) - f(G_2)\| < \frac{3\varepsilon}{2}) .$$

Si l'on suppose définie, pour tout entier n inférieur ou égal à un entier n_0 , une suite $(H_n)_{n \leqslant n_0}$ décroissante d'objets de $\mathcal{H}$, vérifiant :

$\forall\, n \leqslant n_0$: $H \subset H_n \subset G_n$ et

$$(\forall\, K \in \mathcal{H} ,\ (H_n \subset K \subset G_n)) \implies (\|f(K) - f(G_n)\| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}) ,$$

si l'on note φ_n un $\mathcal{B}'$-morphisme $H_n \to G_n$, on peut définir l'objet

$$G'_{n_0+1} = \varprojlim (H_{n_0} , \varphi_{n_0} ; G_{n_0+1} , f_{n_0+1,n_0}) .$$

C'est un sous-objet de G_{n_0+1} et, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\exists\, H_{n_0+1} \in \mathcal{H} , \qquad H_{n_0+1} \subset G'_{n_0+1} \qquad \text{et} \qquad H_{n_0+1} \supset H ,$$

tel que

$$(K \in \mathcal{H} ,\ H_{n_0+1} \subset K \subset G'_{n_0+1}) \implies (\|f(K) - f_*(G'_{n_0+1})\| < \frac{\varepsilon}{2^n}) ,$$

par suite

$$(K \in \mathcal{H} ,\ H_{n_0+1} \subset K \subset G_{n_0+1}) \implies (\|f(K) - f(G_{n_0+1})\| < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n}) .$$

On peut donc définir une suite dénombrable $(H_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ vérifiant les conditions précédentes.

Pour tout entier n , on a $\|f(H_n) - f(G_n)\| < 2\varepsilon$. Par suite,

$$\|\lim_{n \to \infty} f(H_n) - \lim_{n \to \infty} f(G_n)\| \leqslant 2\varepsilon .$$

Les $(H_n)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ forment une suite décroissante pour le préordre de l'<u>inclusion</u> d'objets de $\mathcal{H}$, ils déterminent donc un système projectif, et

$$f(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H_n) = \lim_{n\to\infty} f(H_n) \quad .$$

Or, pour tout entier n, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme :

$$H \to H_n \qquad \text{et} \qquad H = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} G_n \quad .$$

On peut donc choisir les $\mathcal{B}'$-morphismes du système projectif de manière que $H = \varprojlim H_n$. On déduit alors que

$$\forall\ \varepsilon > 0 \ , \qquad \|f(H) - \lim_{n\to\infty} f(G_n)\| \leqslant 2\varepsilon \quad ,$$

ou encore

$$\|f(H) - f^*(H)\| \leqslant 2\varepsilon \quad .$$

On peut donc conclure à l'égalité, et H est bien capacitable.

Extension d'une capacité. - Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux sous-classes de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$. Si $\mathcal{G}$ est une sous-classe de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ telle que, pour tout système projectif dénombrable $(A_n , \{f_{np}\}_{n\geqslant p})_{n\in\mathbb{N}}$, où les A_n soient des objets de $\mathcal{C}$ appartenant à $\mathcal{K}$, et les f_{np} des $\mathcal{B}'$-morphismes, et, pour tout objet G de $\mathcal{G}$ vérifiant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varprojlim A_n , G) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset \quad ,$$

il existe un entier n_0 tel que $(n \geqslant n_0) \implies (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n , G) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset)$.

Si $\mathcal{H}$ est une sous-classe de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, et si f est une $\mathcal{H}$-$\mathcal{G}$-capacité telle que tout objet de $\mathcal{H}$ soit f-capacitable, alors, pour toute sur-classe $\mathcal{K}$ de $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ étant contenue dans la classe des objets de $\mathcal{C}$ qui admettent une capacité extérieure f^*, on peut déterminer une $\mathcal{K}$-$\mathcal{G}$-capacité, g, extension de f à la classe $\mathcal{K}$.

En effet, la fonction $g = f^*$ sur $\mathcal{K}$, définie par $g(A) = f^*(A)$, est une extension de f. De plus, pour tout système projectif $(A_n , \{f_{np}\}_{n\geqslant p})_{n\in\mathbb{N}}$, où les objets (A_n) appartiennent à $\mathcal{K}$, et les morphismes (f_{ij}) à $\mathcal{B}'$, on peut définir $A = \varprojlim A_n$. Il faut démontrer que, si A appartient à $\mathcal{K}$, alors

$$f^*(A) = \lim_{n\to\infty} f^*(A_n) \quad .$$

Or, si A appartient à $\mathcal{K}$, A admet une capacité extérieure $f^*(A)$ et, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un objet G de $\mathcal{G}$, tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A , G) \neq \emptyset$, et pour lequel

$$(G' \in \mathcal{G} \ , \ A \subset G' \subset G) \implies (\|f^*(A) - f(G')\| < \varepsilon) \quad .$$

Comme $G \in \mathcal{G}$, il existe un entier n_0 tel que

$$(n \geqslant n_0) \Longrightarrow (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_n , G) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset) .$$

On déduit alors l'implication suivante :

$$(G' \in \mathcal{G} \text{ et } A_n \subset G' \subset G) \Longrightarrow (\|f(G') - f(G)\| < 2\varepsilon) ,$$

et, par suite,

$$\|f^*(A_n) - f(G)\| \leqslant 2\varepsilon .$$

Il en résulte :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists n_0 \in \underset{\sim}{N} : \qquad (n \geqslant n_0) \Longrightarrow (\|f^*(A_n) - f^*(A)\| < 3\varepsilon) .$$

Par conséquent, la fonction f^* est bien continue à droite sur $\mathcal{K}$.

Remarque. - Lorsque l'on étudie les capacités sur un espace topologique séparé E , on considère les classes suivantes : $\mathcal{B}'$ est la classe des injections canoniques, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ des sous-classes de la classe des compacts, et $\mathcal{G}$ est la classe des ouverts. La classe $\mathcal{G}$ vérifie alors bien la condition imposée précédemment :

Si (A_n) est une suite de sous-ensembles compacts de E , décroissante pour l'inclusion au sens habituel, et d'intersection A , pour tout ouvert G contenant A , on peut montrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$(n \geqslant n_0) \Longrightarrow (A_n \subset G) .$$

Stabilité par limites inductives.

PROPOSITION 2.2.2. - Soit f une $\mathcal{H}$-$\mathcal{G}$-capacité telle que les objets de $\mathcal{H}$ soient capacitables.

Si $\mathcal{H}$ est stable par limite inductive finie, et $\mathcal{G}$ par limite projective finie, et si f vérifie, pour tout couple (H_1 , H_2) d'objets de $\mathcal{H}$, admettant, pour limite inductive par des $\mathcal{B}'$-morphismes h_i , un objet H , et pour limite projective par des $\mathcal{B}'$-morphismes $(\delta_i)_{i=1,2}$ d'objets O_1 et O_2 de $\mathcal{G}$, tout objet O , tel que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H , O) \cap \mathcal{B}'$ soit non vide, l'inégalité :

$$\|f(O) - f(H)\| \leqslant \sum_{i=1,2} \|f(O_i) - f(H_i)\| ;$$

alors toute limite inductive finie par des $\mathcal{B}'$-morphismes d'objets capacitables est encore un objet capacitable.

Démonstration. - Je fais la démonstration pour une limite inductive E de deux objets capacitables $(E_i)_{i=1,2}$ par des $\mathcal{B}'$-morphismes $(e_i)_{i=1,2}$; elle se ferait de la même façon pour toute limite inductive finie.

Comme les E_i sont capacitables, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut déterminer un objet (A_i) de $\mathcal{K}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme $a_i : A_i \to E_i$, tel que

$$(K \in \mathcal{K} \ , \ A_i \subset K \subset E_i) \implies (\|f(K) - f(E_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}) \ .$$

De même, on peut déterminer un objet (G_i) de $\mathcal{S}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme :

$$g_i : E_i \to G_i \ ,$$

tel que

$$(U \in \mathcal{S} \ , \ E_i \subset U \subset G_i) \implies (\|f(E_i) - f(U)\| < \frac{\varepsilon}{2}) \ .$$

On note A l'objet limite inductive des A_i par les $\mathcal{B}'$-morphismes, $e_i \circ a_i$; il existe donc un $\mathcal{B}'$-morphisme $a : A \to E$.

De même, on note $(G , \gamma_1 , \gamma_2)$ la somme de G_1 et G_2 dans la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ dont les morphismes soient ceux de $\mathcal{B}'$; il existe alors un $\mathcal{B}'$-morphisme $g : E \to G$.

Pour tout couple d'objets H et O , vérifiant $H \in \mathcal{K}$, $O \in \mathcal{S}$,

$$A \subset H \subset E \qquad \text{et} \qquad E \subset O \subset G \ ,$$

on peut déterminer deux objets H_1 et H_2 de $\mathcal{K}$, et deux objets O_1 et O_2 de $\mathcal{S}$, par

$$H_i = \varprojlim (H , h \circ \alpha_i ; E_i , a_i) \qquad \text{et} \qquad O_i = \varprojlim (O , k \circ e_i ; G_i , g_i) \ .$$

Ces objets vérifient alors $H = \varinjlim (H_i , \beta_i)$, et $O = \varinjlim (O_i , \delta_i)$, et $A_i \subset H_i \subset E_i \subset O_i \subset G_i$. Par suite, pour $i = 1 , 2$,

$$\|f(O_i) - f(H_i)\| \leqslant \|f(O_i) - f(E_i)\| + \|f(E_i) - f(H_i)\| < \varepsilon \ .$$

On peut donc conclure :

$$\|f(O) - f(H)\| \leqslant 2\varepsilon \ .$$

Par suite, $f^*(E)$ et $f_*(E)$ existent et sont égaux.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[rr, "a_1"] \arrow[r, "h_1"'] \arrow[d, "\alpha_1"'] & H_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & E_1 \arrow[rr, "g_1"] \arrow[r] \arrow[d, "e_1"] & O_1 \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"] \\
A \arrow[rr, "a"'] \arrow[r, "h"] & H \arrow[r] & E \arrow[rr, "g"'] \arrow[r, "k"] & O \arrow[r] & G \\
A_2 \arrow[rr, "a_2"'] \arrow[r, "h_2"] \arrow[u, "\alpha_2"] & H_2 \arrow[r] \arrow[u, "\beta_2"'] & E_2 \arrow[rr, "g_2"'] \arrow[r] \arrow[u, "e_2"'] & O_2 \arrow[r] \arrow[u, "\delta_2"'] & G_2 \arrow[u, "\gamma_2"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.2.3. – Si f vérifie les conditions de la proposition 2.2.2, et si f est de plus telle que, pour tout système inductif dénombrable $(G_n, (f_{np})_{n\leq p})_{n\in\underset{\sim}{N}}$, où les G_n soient des objets de $\mathcal{G}$, et où les morphismes appartiennent à $\mathcal{B}'$, alors

$$f(\varinjlim G_n) = \lim_{n\to\infty} f(G_n) \quad ;$$

on peut déduire :

(a) Pour toute suite (A_n) d'objets de $\mathcal{C}$, formant un système inductif par des $\mathcal{B}'$-morphismes $(A_n, (a_{np})_{n\leq p})_{n\in\underset{\sim}{N}}$, si les capacités extérieures existent, elles vérifient :

$$f^*(\varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n) = \lim_{n\to\infty} f^*(A_n) \quad ;$$

(b) Toute limite inductive dénombrable d'un système inductif d'objets capacitables par des $\mathcal{B}'$-morphismes est un objet capacitable.

Démonstration.

(a) En faisant une construction analogue à celle effectuée dans la proposition 2.2.1, on peut, pour tout réel $\varepsilon > 0$, construire une suite $(G_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'objets de $\mathcal{G}$, qui forme un système inductif pour des $\mathcal{B}'$-morphismes, $(\gamma_{np})_{n\leq p}$, et telle que, pour tout n, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme $g_n : A_n \to G_n$, pour lequel les diagrammes ci-dessous soient commutatifs.

On note $(G, \{\gamma_n\}_{n\in\underset{\sim}{N}})$ la limite inductive de ce système. Comme $f^*(\varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n)$ existe, il existe un objet F de $\mathcal{G}$, et un $\mathcal{B}'$-morphisme $f : A = \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} A_n \to F$, tels que

$$(F' \in \mathcal{G} : A \subset F' \subset F) \implies (\|f^*(A) - f(F')\| < \varepsilon) \quad .$$

$(n\leq p)$

$$\begin{tikzcd}
A_n \arrow[rr, "a_{np}"] \arrow[dr, "k_n"] \arrow[dd, "g_n"'] & & A_p \arrow[rr, "a_p"] \arrow[dr, "k_p"] \arrow[dd] & & A \arrow[dr, "k"] \arrow[ddrr, "f"] \arrow[dd, "g"] & & \\
& O_n \arrow[rr, "\delta_{np}"] \arrow[dl] & & O_p \arrow[rr, "\delta_p"] \arrow[dl] & & O \arrow[dl] \arrow[drr] & \\
G_n \arrow[rr, "\gamma_{np}"'] & & G_p \arrow[rr, "\gamma_p"'] & & G & & F
\end{tikzcd}$$

Si l'on note O l'objet de $\mathcal{G}$ défini par $O = \varprojlim (G, g ; F, f)$, et k le $\mathcal{B}'$-morphisme : $A \to O$, comme $A \subset O \subset G$, on peut déduire que $\|f^*(A) - f(O)\| < \varepsilon$.

Pour tout entier n, on définit alors un objet O_n de $\mathcal{G}$, en définissant O_n comme produit dans la catégorie $\mathcal{C}'$, dont les morphismes sont ceux de $\mathcal{B}'$ de O et des objets $(G_p)_{p\leqslant n}$.

Il existe alors un $\mathcal{B}'$-morphisme $k_p : A_p \to O_p$ $(\forall\, p \in \underset{\sim}{N})$ et, pour tout couple (n, p), où $n \leqslant p$, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme canonique $\delta_{np} : O_n \to O_p$.

De même, il existe, pour tout p, un $\mathcal{B}'$-morphisme : $O_p \to G_p$, et on peut donc déduire que, pour tout p,

$$\|f(O_p) - f^*(A_p)\| < \varepsilon \quad .$$

Comme $O = \varinjlim (O_p, \{\delta_{np}\}_{n\leqslant p})$, on déduit que

$$f(O) = \lim_{n\to\infty} f(O_p) \quad ,$$

et, par suite,

$$(\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, n_0 \in \underset{\sim}{N},\ n \geqslant n_0) \implies (\|f^*(A) - f^*(A_n)\| < 3\varepsilon) \quad ,$$

ce qui permet de conclure que la suite $f^*(A_n)$ admet une limite, et que celle-ci est égale à $f^*(A)$.

(b) Si l'on considère un système inductif $(A_n, \{a_{np}\}_{n\leqslant p})_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'objets A_n capacitables, on déduit de (a), si $f^*(\varinjlim A_n)$ existe, que

$$f^*(\varinjlim A_n) = \lim_{n\to\infty} f^*(A_n) \quad .$$

Or, pour chaque $n \in \underset{\sim}{N}$, $f^*(A_n) = f_*(A_n)$.

On peut alors déterminer, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite $(H_n)_{n\in\underset{\sim}{N}}$ d'objets de $\mathcal{H}$, formant un système inductif pour des $\mathcal{B}'$-morphismes $(\beta_{np})_{n\leqslant p}$ tels qu'il existe, pour tout n, un $\mathcal{B}'$-morphisme $h_n : H_n \to A_n$, et tels que

$$(H' \in \mathcal{H} : H_n \subset H' \subset A_n) \implies (\|f(H') - f(A_n)\| < \tfrac{\varepsilon}{2}) \quad .$$

Comme $A = \varinjlim A_n$ est supposé intérieurement capacitable,

$$(\exists\, H \in \mathcal{H},\ \forall\, H' \in \mathcal{H} : H \subset H' \subset A) \implies (\|f(H') - f_*(A)\| < \tfrac{\varepsilon}{2}) \quad .$$

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, on détermine un objet H'_n de $\mathcal{H}$, en le définissant comme produit dans la catégorie $\mathcal{C}'$ de H_n et de H. Alors

$$(H' \in \mathcal{H} : H'_n \subset H' \subset A_n) \implies (\|f(H') - f(A_n)\| < \varepsilon) \quad .$$

Comme $H = \varinjlim H'_n$, on déduit que $f^*(H) = \lim\limits_{n\to\infty} f^*(H'_n)$, où $f^*(H) = f(H)$ et

$f^*(H'_n) = f(H'_n)$. On peut donc conclure :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ , \qquad \|f_*(A) - \lim_{n\to\infty} f(A_n)\| < 3\varepsilon \ ,$$

et, par suite,

$$f_*(A) = f^*(A) \quad .$$

PROPOSITION 2.2.4. - Si $\mathcal{H}$ est une sous-classe de $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, et $\mathcal{S}$ une autre sous-classe, $\mathcal{H}$ étant stable par limite inductive finie et par limite projective dénombrable, et $\mathcal{S}$ par limite projective finie et par limite inductive de système inductif dénombrable par des $\mathcal{B}'$-morphismes, on désigne par f une $\mathcal{H}$-$\mathcal{B}'$-capacité, telle que les objets de $\mathcal{H}$ soient capacitables, et telle que toute limite inductive A de système inductif dénombrable $(A_n\ , \{a_{np}\}_{n\leq p})$ indexé par $\underset{\sim}{N}$ et formé de morphismes de $\mathcal{B}'$ et d'objets A_n capacitables, soit un objet capacitable et vérifiant :

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f(A_n) \quad .$$

Alors tout objet E de la classe $\mathfrak{A}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{H})$, c'est-à-dire noyau par des $\mathcal{B}'$-morphismes d'objets de la classe $\mathcal{H}$, qui admette une capacité extérieure et une capacité intérieure, est un objet capacitable.

Démonstration. - L'objet E est défini au moyen de limites inductives et projectives schématisées par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E(s') \arrow[rr, phantom, "s'<s" near end, shift right=4ex] & & E(s) \arrow[ll, "f_{ss'}"'] \arrow[rr, phantom, "s<\sigma", shift right=4ex] & & E(\sigma) \arrow[ll, "f_{\sigma s}"'] \arrow[rr, "f_\sigma"] & & E \\
E(r') \arrow[u, "f_{r's'}", "r'\leq s'"'] & & E(r) \arrow[ll] \arrow[u, "r\leq s"'] & & E(\rho) \arrow[ll] \arrow[u, "f_{\rho\sigma}", "\rho\leq\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$E = \underset{\substack{\longrightarrow \\ \sigma\in\underset{\sim}{\Sigma}}}{\lim} \Big(\underset{\substack{\longleftarrow \\ s<\sigma}}{\lim} E(s)\ ,\ \{f_{ss'}\}_{s'<s}\Big)\ ,\ \{f_{\rho\sigma}\}_{\rho\leq\sigma} \quad .$$

Pour tout $s \in \underset{\sim}{S}$, on pose :

$$A(s) = \underset{\substack{\longrightarrow \\ \sigma > s}}{\lim} E(\sigma)\ ,\ \{f_{\rho\sigma}\}_{\rho\leq\sigma} \quad ;$$

puis, si $r \leq s$, a_{rs} le $\mathcal{B}'$-morphisme $A(r) \longrightarrow A(s)$ obtenu par limite inductive des $f_{\rho\sigma}$ pour $\rho \leq \sigma$, $\rho > r$, $\sigma > s$. On a alors

$$E = \underset{\substack{\longrightarrow \\ n\in\underset{\sim}{N}}}{\lim} (A(n)\ ,\ \{a_{pn}\}_{p\leq n})\ ,$$

et, si l'on appelle (s , n) la suite obtenue en prolongeant la suite s par l'entier n ,

$$A(s) = \varinjlim_{n\in\underset{\sim}{N}} (A(s , n) , \{a_{(s,p),(s,n)}\}_{p\leqslant n}) .$$

Pour tout entier $\varepsilon > 0$, comme $E = \varinjlim A(n)$,

$$\exists\, n_1 \in \underset{\sim}{N} : \qquad \|f^*(E) - f^*(A(n_1))\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Puis, de même,

$$\exists\, n_2 \in \underset{\sim}{N} : \qquad \|f^*(A(n_1)) - f^*(A(n_1 , n_2))\| < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Par récurrence, si l'on suppose définie une suite $(n_1 , n_2 , \dots , n_p)$ jusqu'à l'entier p , il existe un entier n_{p+1} tel que

$$\|f^*[A(n_1 , \dots , n_p)] - f^*[A(n_1 , n_2 , \dots , n_{p+1})]\| < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} .$$

D'où on déduit

$$\|f^*(E) - f^*[A(n_1 , n_2 , \dots , n_{p+1})]\| < \varepsilon .$$

La suite $(A(n_1 , n_2 , \dots , n_p))_{p\in\underset{\sim}{N}}$ est une suite d'objets de $\mathcal{K}$ qui forme un système projectif pour les $\mathcal{B}'$-morphismes $\{f_{(n_1,n_2,\dots,n_p),(n_1,n_2,\dots,n_q)}\}_{q\leqslant p}$. On note F sa limite projective. Comme $\mathcal{K}$ est stable par limite projective par des $\mathcal{B}'$-morphismes, F appartient à $\mathcal{K}$ et, comme f est une capacité,

$$f(F) = \lim_{p\to\infty} f(A(n_1 , n_2 , \dots , n_p)) .$$

On peut donc déduire que $\|f^*(E) - f(F)\| < \varepsilon$.

Comme $F = A(n_1 , n_2 , \dots , n_p , \dots)$, il existe un $\mathcal{B}'$-morphisme

$$f_{(n_1,n_2,\dots,n_p,\dots)}$$

de F dans E . Or, pour tout objet H de $\mathcal{K}$ vérifiant : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H , E) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$, on peut définir E comme noyau d'objets $(E(s))_{s\in\underset{\sim}{S}}$ tels que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H , E(s)) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$ (on peut, pour cela, considérer les limites inductives des $E(s)$ et de H) ; alors F vérifiera $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H , F) \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$. Par suite, pour tout $H \in \mathcal{K}$, $H \subset E$, et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un objet $F \in \mathcal{K}$, $H \subset F \subset E$, tel que $\|f(F) - f^*(E)\| < \varepsilon$, ce qui permet de conclure que

$$f_*(E) = f^*(E) .$$

Remarque. - Dans les hypothèses des propositions précédentes, on impose l'existence, pour un objet A, de $f^*(A)$, ou de $f_*(A)$. Cette existence est toujours vérifiée, lorsque l'espace de Banach E est égal au corps des réels $\underset{\sim}{R}$, et lorsque de plus la capacité f est croissante pour le préordre d'inclusion et l'ordre de $\underset{\sim}{R}$.

2.3. Mesures de Radon sur des espaces topologiques séparés.

Espaces de fonctions sur Ω. - On suppose que Ω est un espace topologique séparé.

On note $\mathcal{F}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de Ω dans le corps des réels $\underset{\sim}{R}$, $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées et dénombrablement étagées, $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω. (L'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ peut être réduit à la seule fonction identiquement nulle.)

Sur chacun de ces espaces, on peut définir la topologie de la convergence uniforme. Pour simplifier les notations, on la désignera par la même lettre $\mathcal{U}$ sur les trois espaces. De plus, on notera $[\cdot]$ la norme de la convergence uniforme.

Topologie τ. - Sur les trois espaces de fonctions, on peut définir une topologie d'espace uniforme, que l'on note τ, en considérant la topologie dont une base de voisinages d'un élément f soit constituée par

$$\left\{ \mathcal{V}_K(f) = \left\{ \begin{array}{l} g \text{ appartenant à l'espace dont } f \text{ est élément et vérifiant :} \\ [g - f] \leqslant 1 \quad \text{et} \quad g - f = 0 \quad \text{sur} \quad K \end{array} \right\} \right\}_{K \text{ compact de } \Omega}.$$

Dans la suite, la base de voisinages de la fonction identiquement nulle, 0, sera notée :

$$\{\mathcal{V}_K\}_{K \text{ compact de } \Omega} .$$

Comme Ω est séparé, les points de Ω sont des compacts et, par suite, la topologie τ est séparée (sur les trois espaces de fonctions). De plus, les voisinages $\mathcal{V}_K$ sont symétriques et convexes : en effet, si f et g appartiennent à $\mathcal{V}_K$, il en est de même de $\frac{1}{2}(f+g)$.

Si $\mathcal{V}_K$ et $\mathcal{V}_{K'}$ sont deux éléments de la base de voisinages de 0, définie précédemment, alors $\mathcal{V}_{K\cup K'} = \mathcal{V}_K \cap \mathcal{V}_{K'}$.

On peut donc conclure que les espaces vectoriels, $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{C}(\Omega)$, munis de la topologie τ, sont des espaces vectoriels dont les topologies sont localement convexes et séparées.

La topologie τ n'est cependant pas une topologie d'espace vectoriel topologique ; en effet, les voisinages $\mathcal{V}_K$ ne sont pas absorbants, et la loi de groupe sur les espaces vectoriels n'est pas continue pour la topologie τ.

On peut d'ailleurs remarquer que, si Ω est compact, alors $\mathcal{V}_\Omega = \{0\}$, par suite, la topologie τ est discrète, et il est connu que la topologie discrète n'est pas une topologie d'espace vectoriel topologique.

PROPOSITION 2.3.1. - Soient E un espace vectoriel normé complet, dont la norme est notée $\|.\|$, et Ω un espace topologique séparé.

1° Si μ est une mesure de Radon de norme 1, on peut associer à μ une application linéaire μ_0 sur $\mathcal{E}(\Omega)$ vérifiant, pour tout borélien B :

$$\mu(B) = \mu_0(1_B) \quad ,$$

où 1_B désigne la fonction caractéristique de B. De plus, μ_0 est alors continue lorsque $\mathcal{E}(\Omega)$ est muni des topologies $\mathcal{U}$ et τ, et la norme de μ_0 considérée comme application linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de $\mathcal{U}$, est inférieure ou égale à 1.

2° Si μ_0 est une application linéaire de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans E, continue pour les topologies $\mathcal{U}$ et τ, et de norme 1, alors la mesure μ associée à μ_0 est une mesure de Radon de norme $|||\mu|||$ supérieure ou égale à 1.

3° Dans le cas où E est isomorphe au corps (on a choisit $\underset{\sim}{R}$ dans le cas présent, mais on obtiendrait le même résultat avec tout corps valué complet), alors les normes de μ et de μ_0 sont égales.

Démonstration.

1° Pour toute fonction f de $\mathcal{E}(\Omega)$ s'écrivant : $f = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \alpha_n 1_{B_n}$, on définit : $\mu_0(f) = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \alpha_n \mu(B_n)$.

D'après (b) et (c), les sommes finies $\sum_{n\leqslant N} \alpha_n \mu(B_n)$ vérifient, pour tout entier N :

$$\|\sum_{n\leqslant N} \alpha_n \mu(B_n)\| \leqslant \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} |\alpha_n| \quad .$$

D'après (a) et (b), la série $\sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \|\mu(B_n)\|$ converge, par suite, comme E est complet, il existe bien un élément $\mu_0(f)$ appartenant à E et vérifiant :

$$\mu_0(f) = \sum_{n\in\underset{\sim}{N}} \alpha_n \mu(B_n) \quad .$$

Comme $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = [f]$, on peut déduire que μ_0 est une application linéaire continue, de norme inférieure ou égale à 1 , de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de $\mathcal{U}$, dans E .

Comme $|||\mu||| = 1$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de boréliens de Ω tels que

$$\left| \, |||\mu||| - \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\mu(B_n)\| \, \right| < \varepsilon \quad .$$

Dans le cas où E est isomorphe à $\mathbb{R}$, si l'on considère la fonction f de $\mathcal{E}(\Omega)$ définie par

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu(B_n)}{\|\mu(B_n)\|} 1_{B_n} \quad ,$$

cette fonction est de norme $[f] = 1$, et vérifie :

$$\left| \, \|\mu_0(f)\| - |||\mu||| \, \right| < \varepsilon \quad .$$

On peut donc alors conclure que $|||\mu_0||| = |||\mu|||$. Dans le cas où E n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$, on ne peut pas conclure à l'égalité des normes.

Pour montrer la continuité de μ_0 pour la topologie τ , il suffit de prouver que :

$$\forall \varepsilon > 0 , \quad \exists K \text{ compact de } \Omega , \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega) : \qquad (f \in \mathcal{V}_K) \implies (\|\mu_0(f)\| \leqslant \varepsilon) \, .$$

Or Ω est un borélien dans lui-même, puisqu'il est un ouvert et un fermé, par suite, la condition (b) entraîne :

$$\forall \varepsilon' > 0 , \quad \exists K \text{ compact de } \Omega , \quad \forall C \text{ borélien de } \Omega :$$
$$(C \subset \Omega \setminus K) \implies (\|\mu(C)\| \leqslant \varepsilon') \quad .$$

Si μ_0 n'était pas continue pour τ , on aurait :

$$\exists \varepsilon > 0 , \quad \forall K_1 \text{ compact de } \Omega , \quad \exists f_1 \in \mathcal{V}_{K_1} : \qquad \|\mu_0(f_1)\| > \varepsilon \quad .$$

Or $f_1 = \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p^1 1_{B_p^1}$, où les $(B_p^1)_{p\in\mathbb{N}}$ sont des boréliens disjoints. D'après l'approximation (b), on peut déterminer une suite $(K_p^1)_{p\in\mathbb{N}}$ de compacts vérifiant : $K_p^1 \subset B_p^1$, et tels que

$$\left\| \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p^1 \, \mu(K_p^1) \right\| > \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Comme, pour tout p , $|\alpha_p^1|$ est inférieur ou égal à 1 , ceci entraîne :

$$\sum_{p \in \underset{\sim}{N}} \|\mu(K_p^1)\| > \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Il existe donc un entier N_1 tel que

$$\sum_{p \leqslant N_1} \|\mu(K_p^1)\| > \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

L'ensemble $K_1 \cup (\bigcup_{p \leqslant N_1} K_p^1)$ est un compact de Ω que l'on note K_2.

En recommençant le raisonnement précédent :

$$\exists\, f_2 \in \mathscr{V}_{K_2} : \qquad \|\mu_0(f_2)\| > \varepsilon \quad .$$

Par suite, on peut déterminer une famille finie de compacts, $(K_p^2)_{p \leqslant N_2}$, telle que

$$(\bigcup_{p \leqslant N_2} K_p^2) \cap K_2 = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \sum_{p \leqslant N_2} \|\mu(K_p^2)\| > \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Par récurrence, on détermine, pour tout entier n, un compact

$$K_n = K_{n-1} \cup (\bigcup_{p \leqslant N_{n-1}} K_p^{n-1}) \quad ,$$

et une famille finie $(K_p^n)_{p \leqslant N_n}$ de compacts disjoints entre eux, disjoints de K_n, et vérifiant :

$$\sum_{p \leqslant N_n} \|\mu(K_p^n)\| > \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Si l'on considère la famille dénombrable de compacts disjoints :

$$(\{K_p^n\}_{p \leqslant N_n})_{n \in \underset{\sim}{N}} \quad ,$$

elle vérifie :

$$\sum_{n \in \underset{\sim}{N}} (\sum_{p \leqslant N_n} \|\mu(K_p^n)\|) = \infty \quad .$$

On obtient donc une contradiction avec la propriété (c). On peut donc conclure que μ_0 est continue pour la topologie τ.

2° Si μ_0 est une application linéaire continue de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni des topologies $\mathcal{U}$ ou τ, dans E, et de norme 1 pour $\mathcal{U}$, on peut lui associer une mesure μ sur les boréliens, $\mathcal{B}$, par :

$$\forall\, B \in \mathcal{B}, \qquad \mu(B) = \mu_0(1_B) \quad .$$

Il est immédiat, en utilisant la continuité de μ_0 pour $\mathcal{U}$, que μ est alors une mesure de Borel, et que sa norme (en admettant la valeur $+\infty$) est supérieure ou égale à celle de μ_0.

Il reste à vérifier que μ est intérieurement régulière par rapport aux compacts. Si B est borélien dans Ω, 1_B est une fonction de $\mathcal{E}(\Omega)$. Comme μ_0 est continue pour la topologie τ,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ K \text{ compact de } \Omega : \qquad \mu_0(\mathcal{V}_K) \subset \{x \in E : \|x\| < \varepsilon\}\ .$$

La fonction caractéristique de $B \setminus K$ appartient à $\mathcal{V}_K$, par suite, elle vérifie :

$$\|\mu_0(1_{B\setminus K})\| < \varepsilon\ .$$

De même, pour tout borélien C contenu dans $B \setminus K$, la fonction 1_C appartient à $\mathcal{V}_K$, et $\mu_0(1_C) = \mu(C)$ vérifie par suite :

$$\|\mu_0(1_C)\| = \|\mu(C)\| < \varepsilon\ .$$

La mesure μ est donc bien une mesure de Radon.

3° Dans le cas où E est isomorphe à $\underset{\sim}{R}$, les normes de μ et de μ_0 sont égales, d'après ce qui a été vu au 1°.

Cependant, les hypothèses imposées ne permettent pas, lorsque E est de dimension quelconque, d'obtenir l'égalité des normes de μ et de μ_0.

Voici un contre-exemple :

Si Ω est un ensemble fini muni de la topologie discrète, et si E est l'espace $\mathcal{F}(\Omega)$ de toutes les fonctions bornées sur Ω, muni de la topologie $\mathcal{U}$, on considère la mesure de Borel :

$$\mu : B \longmapsto 1_B$$

(pour tous les sous-ensembles B de Ω). C'est une mesure finie, de norme $|||\mu||| = \mathrm{Card}(\Omega)$. De plus, elle est de Radon, car tout sous-ensemble de Ω est un compact.

Toute fonction f de $\mathcal{E}(\Omega)$ s'écrit : $f = \sum\limits_{n\in A_f} \alpha_n 1_{B_n}$, où A_f est un ensemble fini de cardinal inférieur ou égal à celui de Ω. On définit, comme précédemment :

$$\mu_0(f) = \sum_{n\in A_f} \alpha_n\, \mu(B_n) = \sum_{n\in A_f} \alpha_n 1_{B_n} = f\ .$$

Il en résulte que

$$|||\mu_0||| = 1\ .$$

Par conséquent, si Ω contient plus d'un point, les normes de μ et de μ_0 ne sont pas égales.

PROPOSITION 2.3.2. - Dans la suite, on étudie le cas particulier des mesures de Radon sur des espaces localement compacts, pour montrer l'équivalence de la définition classique et de la propriété caractéristique obtenue dans la proposition 2.3.1.

Si Ω est un espace topologique séparé localement compact :

1° L'adhérence de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{F}(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme, contient $\mathcal{C}(\Omega)$;

2° Si τ' est la topologie sur $\mathcal{F}(\Omega)$ la plus fine qui coïncide avec τ sur $\mathcal{E}(\Omega)$, alors, la restriction de τ' à $\mathcal{C}(\Omega)$ est plus fine que la topologie $\mathcal{P}$, limite projective des topologies de la convergence uniforme sur les compacts.

Démonstration.

1° Pour tout compact K de Ω, toute fonction continue, à support contenu dans K, est uniformément continue ; elle appartient, par suite, à l'adhérence pour $\mathcal{U}$ de l'ensemble des fonctions en escalier sur K. On peut donc en déduire que $\mathcal{E}(\Omega)^{\mathcal{U}}$ contient $\mathcal{C}(\Omega)$.

2° La topologie τ' admet pour restriction aux espaces $\mathcal{C}(K)$ pour les compacts K de Ω, la restriction à $\mathcal{C}(K)$ de la topologie la plus fine sur $\mathcal{F}(K)$ qui soit égale à la topologie discrète τ_K sur $\mathcal{E}(K)$.

Si l'on désigne par $\mathcal{U}_K$ la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(K)$, cette topologie est moins fine que la topologie discrète ; par suite, la topologie $\mathcal{P}$, limite projective des $\mathcal{U}_K$, est moins fine que la topologie τ'.

Remarque 2.3.2.1. - Si Ω est un espace topologique séparé localement compact et dénombrable à l'infini, alors la topologie τ sur $\mathcal{F}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, ou bien $\mathcal{C}(\Omega)$, est métrisable.

En effet, pour démontrer la métrisabilité de τ, il suffit de montrer que l'origine admet une base dénombrable de voisinages. Or, puisque Ω est localement compact et dénombrable à l'infini, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω tels que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Les voisinages $\{\mathcal{V}_{K_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ forment alors une base dénombrable de voisinages de l'origine.

Remarque 2.3.2.2. - Si Ω est un espace localement compact, et si $\mathcal{C}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues à supports compacts, on désigne par $\mathcal{P}$ la topologie limite projective des topologies $\mathcal{U}_K$ des convergences uniformes sur les espaces $\mathcal{C}(K)$ pour les compacts K de Ω.

On peut schématiser :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{F}(\Omega) & & \\
 & & (\tau\ ,\ \mathcal{U}) & & \\
 & & \cup & & \\
 & & \mathcal{E}(\Omega) & & \\
 & & (\tau\ ,\ \mathcal{U}) & & \\
 & & \cup & & \\
\mathcal{C}(K) & \xrightarrow{\text{injection}} & \mathcal{C}(\Omega) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \mathcal{C}(K) \\
(\tau_K\ ,\ \mathcal{U}_K) & & (\tau\ ,\ \mathcal{U}) & & (\mathcal{U}_K\ ,\ \tau_K)
\end{array}
$$

τ plus fine que $\mathcal{P}$, limite projective des τ_K
$\mathcal{U}$ plus fine que la limite projective des $\mathcal{U}_K$
$\mathcal{U}$ plus fine que $\mathcal{P}$.

Si μ_0 est une application continue sur $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de τ et de $\mathcal{U}$, alors μ_0 est continue sur $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de $\mathcal{P}$.

En effet, les voisinages de l'origine pour $\mathcal{P}$ admettent une base de la forme :

$$\mathcal{V}_{\alpha,K} = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \ :\ \|f/K\| < \alpha\}_{\alpha\in\underset{\sim}{R}^+,\ K \text{ compact de } \Omega} \ .$$

Or, si μ_0 est continue sur $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de $\mathcal{U}$,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ \alpha > 0\ :\qquad ([f] < \alpha) \implies (\|\mu_0(f)\| < \varepsilon/2) \ .$$

Si μ_0 est continue pour τ ,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ K \text{ compact } :\qquad ([f] \leqslant 1\ ,\ f/K = 0) \implies (\|\mu_0(f)\| < \varepsilon/2) \ .$$

Par suite, pour toute fonction f de $\mathcal{V}_{\alpha,K}$, on peut écrire :

$$f = f.1_K + (f - f.1_K) \ ,$$

où $f.1_K$ vérifie $[f.1_K] < \alpha$, et où $(f - f.1_K)$ appartient à $\mathcal{V}_K$ voisinage pour τ , et $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \mathcal{V}_{\alpha,K}$ voisinage de l'origine pour $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$(f \in \mathcal{V}_{\alpha,K}) \implies (\|\mu_0(f)\| < \varepsilon) \ .$$

On obtient bien la conclusion annoncée.

PROPOSITION 2.3.3. - _Soient_ Ω _un espace topologique localement compact, et_ E _un espace vectoriel normé complet._

1° _Si_ μ_0 _est une application linéaire de_ $\mathcal{E}(\Omega)$ _dans_ E , _continue pour la topologie de la convergence uniforme_ $\mathcal{U}$ _et pour la topologie_ τ , _alors_ μ_0 _peut être prolongée en une application linéaire continue, unique, de_ $\mathcal{C}(\Omega)$ _dans_ E ,

<u>$\mathcal{C}(\Omega)$ étant muni de la topologie $\mathcal{P}$, limite projective des topologies $\mathcal{U}_K$ sur les espaces $\mathcal{C}(K)$.</u>

2° <u>Si μ_0 est une application linéaire continue de $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de $\mathcal{P}$, dans E, on peut prolonger μ_0 à l'ensemble $\mathcal{B}(\Omega)$ des fonctions boréliennes bornées, en une application linéaire continue pour $\mathcal{U}$, que l'on notera encore μ_0. De plus, la restriction de μ_0 à $\mathcal{E}(\Omega)$ est une application continue pour τ.</u>

3° <u>Si Ω est un espace localement compact, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :</u>

(α) <u>μ est une mesure de Radon finie sur Ω ;</u>

(β) <u>L'application linéaire μ_0 correspondant à μ, de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans E, est continue pour la topologie $\mathcal{P}$.</u>

<u>De plus, si E est isomorphe à $\underset{\sim}{R}$, les normes de μ et de μ_0 sont égales.</u>

<u>Démonstration.</u>

1° Comme $\mathcal{C}(\Omega)$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$, muni de la topologie $\mathcal{U}$, on peut prolonger μ_0 en une application linéaire continue unique de $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de la topologie $\mathcal{U}$ ou bien de la topologie τ, à valeurs dans E. De la remarque 2.3.2.2, on peut alors conclure que μ_0 est continue pour la topologie $\mathcal{P}$.

2° Si μ_0 est une application linéaire continue de $\mathcal{C}(\Omega)$, muni de $\mathcal{P}$, dans E, on peut prolonger μ_0 en une application de l'ensemble des fonctions sur Ω, à valeurs dans E.

– Lorsque f est semi-continue inférieurement positive et à support compact :

$$\mu_0(f) = \lim_{\mathcal{F}_i} \mu(\varphi) \quad ,$$

où $\mathcal{F}_i$ désigne le filtre sur $\mathcal{C}(\Omega)$, intersection de $\mathcal{C}(\Omega) \cap \{\varphi : \varphi \leqslant f\}$ et du filtre des voisinages de f pour la topologie $\mathcal{P}$.

Comme $\mathcal{F}_i$ est un filtre de Cauchy pour $\mathcal{U}_f$, et que μ_0 est uniformément continue pour $\mathcal{P}$, le filtre image $\mu_0(\mathcal{F}_i)$ est un filtre de Cauchy dans E, il admet donc une limite, que l'on note $\mu_0(f)$.

– Lorsque f est positive à support compact :

$$\mu_0^0(f) = \lim_{\mathcal{F}_c} \mu_0(g) \quad ,$$

où $\mathcal{F}_c$ désigne le filtre sur l'ensemble $\mathcal{J}^+$ des fonctions semi-continues inférieurement positives, intersection de $\mathcal{J}^+ \cap \{g : g \geqslant f\}$ et du filtre des voisinages de f pour la topologie $\mathcal{P}$.

Comme $\mathcal{F}_c$ est un filtre de Cauchy pour $\mathcal{P}$, et que μ_0 est continue pour $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{J}^+$, le filtre image $\mu_0(\mathcal{F}_c)$ est un filtre de Cauchy dans E , il converge donc vers un point, que l'on appelle $\mu_0(f)$.

- Lorsque f est positive arbitraire :

$$\mu_0^0(f) = \lim_{\mathcal{F}_p} \mu_0^0(h) \quad ,$$

où le filtre $\mathcal{F}_p$ est le filtre intersection de l'ensemble des fonctions h , positives à support compact, inférieures ou égales à f , et du filtre des voisinages de f pour $\mathcal{P}$.

Ici aussi, $\mu_0^0(\mathcal{F}_p)$ est un filtre de Cauchy dans E , il converge donc, et l'on note $\mu_0^0(f)$ sa limite.

- Lorsque f est une fonction arbitraire, elle s'écrit : $f = f^+ - f^-$, et l'on définit :

$$\mu_0^0(f) = \mu_0^0(f^+) - \mu_0^0(f^-) \quad .$$

Comme μ_0 est dénombrablement additive sur $\mathcal{C}(\Omega)$, on peut déduire que μ_0^0 est dénombrablement additive sur $\mathcal{E}(\Omega)$, et, comme μ_0 est continue pour les topologies $\mathcal{U}$ et $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(\Omega)$, μ_0^0 est continue pour la topologie $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$. La topologie $\tau' = \varinjlim (\mathcal{E}(\Omega)\ , \tau)$ par l'injection de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{F}(\Omega)$ est plus fine que $\mathcal{P}$. Par suite, μ_0^0 est continue pour la topologie τ' , et la restriction de μ_0^0 à $\mathcal{E}(\Omega)$ est continue pour la topologie τ .

3° L'équivalence se déduit de la proposition 2.3.1 et des parties 1° et 2° de cette proposition.

Pour démontrer la propriété relative aux normes de μ et de μ_0 , on utilise la proposition 2.3.1, 3°, et on procède par approximations pour montrer que la norme de μ_0^0 , application de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans E , est égale à celle de μ_0 , application de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans E .

<u>Remarque</u>. - Dans l'étude qui précède, on a seulement utilisé la métrisabilité de E et sa complétion pour la métrique notée $\|\cdot\|$.

On aurait donc pu supposer que E soit un espace de Fréchet ; il n'était pas nécessaire de supposer E de Banach.

PROPOSITION 2.3.4. - <u>Soit</u> $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite d'espaces topologiques séparés, dont les tribus boréliennes sont notées</u> $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, <u>munis chacun d'une mesure de</u>

Radon μ_n vectorielle à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$, normé et complet. On suppose que les mesures μ_n sont de norme 1, ainsi que les applications linéaires μ_{n_0} qui leur correspondent. On impose que les $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment un système inductif :

$$\{(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}, \{f_{np}\}_{n\leqslant p}\} ,$$

où l'application f_{np} soit une application continue de Ω_n dans Ω_p, et que les mesures de Radon vérifient :

$$[n \leqslant p] \implies [\forall\ \varphi_p \in \mathcal{E}(\Omega_p)\ ,\ \mu_{n_0}(\varphi_p \circ f_{np}) = \mu_{p_0}(\varphi_p)]\ .$$

On se place dans le cas où la limite inductive est séparée. Si Ω désigne la limite inductive des Ω_n, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les applications canoniques des $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans Ω, alors, il existe une mesure μ de Radon sur Ω, unique, vérifiant, pour tout entier n :

$$[\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)] \implies [\mu_0(\varphi) = \mu_{n_0}(\varphi \circ f_n)]\ .$$

De plus, la norme de μ_0 est inférieure ou égale à 1, et celle de μ est supérieure ou égale à 1.

Démonstration. - On note :

$\mathcal{F}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{F}(\Omega_n)$] l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur Ω [resp. sur Ω_n];

$\mathcal{C}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{C}(\Omega_n)$] l'ensemble des fonctions continues, à supports compacts sur Ω [resp. sur Ω_n];

$\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{E}(\Omega_n)$] l'ensemble des fonctions boréliennes bornées et dénombrablement étagées sur Ω [resp. sur Ω_n].

On désigne par :

$\mathcal{U}$ [resp. $\mathcal{U}_n$] la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}(\Omega)$ [resp. sur $\mathcal{F}(\Omega_n)$];

τ [resp. τ_n] la topologie sur $\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\mathcal{E}(\Omega_n)$] associée à la structure uniforme dont les voisinages de l'origine admettent une base de la forme :

$$\{\mathcal{V}_K = \{f \in \mathcal{E}(\Omega) : [f] \leqslant 1\ ,\ f = 0 \text{ sur } K\}\}_{K \text{ compact de } \Omega}$$

$$[\text{resp. } \{\mathcal{V}_K^n = \{f \in \mathcal{E}(\Omega_n) : [f] \leqslant 1\ ,\ f = 0 \text{ sur } K\}\}_{K \text{ compact de } \Omega_n}]\ .$$

Pour tout entier n , on définit une application f_n^* de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{E}(\Omega_n)$, en associant à toute fonction φ de $\mathcal{E}(\Omega)$ la fonction $f_n^*(\varphi) = \varphi \circ f_n$ de $\mathcal{E}(\Omega_n)$. L'application $f_n^* : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega_n)$ est une application linéaire.

Comme $[\varphi] \geqslant [\varphi \circ f_n]$ (où les crochets désignent la norme uniforme), on peut déduire que f_n^* est une application continue de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de la topologie $\mathcal{U}$, dans $\mathcal{E}(\Omega_n)$, muni de la topologie $\mathcal{U}_n$.

Si l'on note $\mathcal{U}'$ la topologie sur $\mathcal{E}(\Omega)$, limite projective des topologies $\mathcal{U}_n$ par les applications f_n^* , on peut déduire que $\mathcal{U}$ est plus fine que $\mathcal{U}'$.

Pour tout compact K de Ω_n , $f_n(K)$ est un compact de Ω muni de la topologie limite inductive des topologies des Ω_n . Si φ est une application de $\mathcal{E}(\Omega)$ vérifiant $[\varphi] \leqslant 1$ et $\varphi / f_n(K) = 0$, alors $f_n^*(\varphi) = \varphi \circ f_n$ appartient à $\mathcal{E}(\Omega_n)$, et vérifie $[f_n^*(\varphi)] \leqslant 1$ et $f_n^*(\varphi)/K = 0$. Ceci s'écrit :

$$f_n^*[\mathcal{V}_{f_n(K)}] \subset \mathcal{V}_K^n \quad .$$

Par suite, f_n^* est une application continue de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de la topologie τ , dans $\mathcal{E}(\Omega_n)$, muni de la topologie τ_n .

Si l'on note τ' la topologie sur $\mathcal{E}(\Omega)$, limite projective des topologies τ_n par les applications f_n^* , on peut conclure que τ est plus fine que τ' .

On peut définir une application μ_0 de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans E , en associant à toute fonction φ de $\mathcal{E}(\Omega)$ l'élément $\mu_0(\varphi) = \mu_{n_0}(\varphi \circ f_n)$. La condition imposée aux μ_n :

$$(n \leqslant p) \implies (\forall\, \varphi_p \in \mathcal{E}(\Omega_p)\ ,\ \mu_{n_0}(\varphi_p \circ f_{np}) = \mu_{p_0}(\varphi_p))$$

entraîne que la définition de μ_0 ne dépend pas de l'entier n . L'application μ_0 est de plus linéaire. On peut donc lui faire correspondre une mesure vectorielle μ sur les boréliens de la tribu $\mathcal{B}$ de Ω , à valeurs dans E .

Pour montrer que μ est une mesure de Radon de norme 1 , il suffit de montrer, d'après la proposition 2.1.3.2, que μ_0 est continue pour les topologies τ et $\mathcal{U}$, et de norme 1 .

Comme $\mu_0 = \mu_{n_0} \circ f_n^*$ pour tout entier n , et comme les f_n^* sont continues de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de $\mathcal{U}$ [resp. de τ], dans $\mathcal{E}(\Omega_n)$, muni de $\mathcal{U}_n$ [resp. de τ_n], et les μ_{n_0} sont continues de $\mathcal{E}(\Omega_n)$, muni de $\mathcal{U}_n$ [resp. de τ_n], dans E , il résulte que μ_0 est une application continue de $\mathcal{E}(\Omega)$, muni de $\mathcal{U}$ [resp. de τ], dans E ; et, par suite, μ est une mesure de Radon.

De l'égalité $\mu_0 = \mu_{n_0} \circ f_n$, on déduit que la norme de μ_0 est inférieure ou égale à celle de μ_{n_0}, c'est-à-dire inférieure ou égale à 1. Comme la norme de μ_n est égale à 1, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω_n, disjoints, et vérifiant :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\mu_n(K_n)\| = 1 \quad .$$

Les ensembles $f_n(K_n)$ sont alors des compacts de Ω, et μ vérifie :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\mu[f_n(K_n)]\| = 1 \quad .$$

Par conséquent, la norme de μ est bien supérieure ou égale à 1.

PROPOSITION 2.3.5. - Soit I un ensemble préordonné, filtrant à droite, admettant une partie cofinale dénombrable. On considère un système projectif :

$$(\{X_i\}_{i\in I} , \{f_{ij}\}_{i\geqslant j}) \quad ,$$

où les X_i sont des espaces topologiques séparés à bases dénombrables, et les f_{ij} des applications continues de X_i dans X_j, pour $i \geqslant j$. On suppose que les f_{ij} sont surjectives.

Soit X la limite projective des X_i ; X est lui aussi séparé. On note f_i les projections de X dans les X_i.

On désigne par E un espace de Fréchet sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et par $\|.\|$ la métrique sur E.

On se donne, sur chaque X_i, une mesure de Radon μ_i, vectorielle de norme 1, ces mesures vérifiant :

$$(i \geqslant j) \implies (\mu_j = f_{ij}(\mu_i)) \quad .$$

Pour tout i de I, μ_i prend ses valeurs dans E.

Pour qu'il existe une mesure de Radon μ sur la limite projective X, à valeurs dans E, vérifiant :

$$\forall\, i \in I , \qquad \mu_i = f_i(\mu) \quad ,$$

il faut et il suffit que, pour tout i de I, μ_i soit continue pour la topologie image réciproque de la topologie τ sur $\mathcal{E}(X)$ par l'application f_i^* de $\mathcal{E}(X_i)$ dans $\mathcal{E}(X)$, définie par :

$$\varphi \in \mathcal{E}(X_i) \longmapsto f_i^*(\varphi) = \varphi \circ f_i \quad ,$$

et que cette continuité soit uniforme par rapport à $i \in I$.

Remarque. - La topologie τ étant la topologie sur $\mathcal{E}(X)$ dont une base de voisinages de l'origine est constituée par les $\mathcal{V}_K$ (K compact),

$$\mathcal{V}_K = \{\varphi \in \mathcal{E}(X) \ : \ [\varphi] \leq 1 \ , \ \varphi = 0 \ \text{ sur } \ K\} \ ,$$

la condition :

$$(\mu_i \ \text{ continue pour la topologie image réciproque par } \ f_i^* \ \text{ de } \ \tau)$$

est équivalente à :

$(\forall\ \varepsilon > 0 \ , \quad \exists\ K$ compact de X :

$$(\varphi \in \mathcal{E}(X_i) \ , \ [\varphi] \leq 1 \ , \ \varphi \in \mathcal{V}_{f_i(K)}) \implies (\|\mu_i(\varphi)\| < \varepsilon)) \ ,$$

ce qui est encore équivalent à :

$(\forall\ \varepsilon > 0 \ , \quad \exists\ K$ compact de X : $\quad \forall\ i \in I \ , \quad \forall\ B_i$ borélien de X_i) :

$$(B_i \subset X_i \setminus f_i(K)) \implies (\|\mu_i(B_i)\| < \varepsilon) \ .$$

On obtient alors une condition analogue à celle du théorème de Prokhorov, dans le cas de mesures à valeurs réelles et positives.

Démonstration. - Les diagrammes sont schématisés comme suit :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f_j^*(\varphi)=\varphi\circ f_j"] & X_i \arrow[r, "f_{ij}", "(i\geq j)"'] & X_j \arrow[dr, "\varphi\in\mathcal{E}(X_j)"] & \\
\underset{\sim}{R} & & & \underset{\sim}{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}(X) & \mathcal{E}_1(X) \arrow[l, "\text{injection canonique}"'] & \mathcal{E}(X_i) \arrow[l, "f_i^*"'] \arrow[ll, bend left, "f_i^*"]
\end{tikzcd}$$

On note $\mathcal{E}_1(X)$ l'ensemble des fonctions f de X dans $\underset{\sim}{R}$, boréliennes, bornées, dénombrablement étagées, à étages contenus dans des compacts, telles qu'il existe un indice i de I , et une fonction φ_i de $\mathcal{E}(X_i)$, pour lesquels :

$$f = f_i^*(\varphi_i) \ .$$

Comme I est filtrant croissant, $\mathcal{E}_1(X)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(X)$.

Si f appartient à $\mathcal{E}_1(X)$, on considère le sous-ensemble $\{\mu_i(\varphi_i)\}$ de E , pour tous les indices i et les fonctions φ_i de $\mathcal{E}(X_i)$ vérifiant : $f = f_i^*(\varphi_i)$. Si φ_i vérifie : $f = f_i^*(\varphi_i)$, pour tout indice $k \geqslant i$, l'application

$$\varphi_k = f_{ki}^*(\varphi_i) = \varphi_i \circ f_{ki}$$

appartient à $\mathcal{E}(X_k)$, et vérifie : $f = f_k^*(\varphi_k)$. Si les $f_i : X \to X_i$ n'étaient pas surjectives, il pourrait exister plusieurs fonctions de $\mathcal{E}(X_i)$ dont l'image par f_i^* soit égale à f . Les hypothèses imposées ici à I et aux f_{ij} entraînent la surjectivité des f_i et, par suite, l'injectivité des f_i^* . Il en résulte que l'ensemble $\{\mu_i(\varphi_i)\}$ est réduit à un point, qu'on note $\mu_1(f)$.

On a ainsi défini une application μ_1 de $\mathcal{E}_1(X)$ dans E , dont on peut vérifier qu'elle est linéaire.

– S'il existe une mesure de Radon μ sur X vérifiant, pour tout i de I : $\mu_i = f_i(\mu)$, alors μ peut aussi être considérée comme une application linéaire de $\mathcal{E}(X)$ dans E , continue pour les topologies $\mathcal{U}$ et τ . Il est évident que μ prolonge μ_1 .

Par conséquent, les applications μ_i doivent être continues pour les images réciproques de τ par les f_i^* . La condition est donc bien nécessaire.

– Réciproquement, si l'on suppose que, pour tout i de I , μ_i est continue pour la topologie image réciproque par f_i^* de τ , on peut démontrer que μ_1 admet une extension μ à $\mathcal{E}(X)$, et que, de plus, μ est continue pour les topologies $\mathcal{U}$ et τ sur $\mathcal{E}(X)$; c'est-à-dire une mesure de Radon.

Si B est un borélien de X , contenu dans un compact K , $f_i(B)$ est un sous-ensemble de X_i , contenu dans le compact $f_i(K)$ de X_i . Comme B est $\mathcal{K}$-analytique dans K , son image continue $f_i(B)$ est analytique pour le pavage de $f_i(K)$, constitué par les compacts de $f_i(K)$ dans X_i . En effet, on utilise le résultat général : Si E est un espace topologique compact, et $\mathcal{K}$ le pavage de E constitué par les compacts, si F est un espace topologique séparé à base dénombrable, et $\mathfrak{F}$ le pavage de F constitué par les fermés, l'image par une application continue d'un ensemble de $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ appartient à $\mathcal{A}(\mathfrak{F})$. On peut en déduire que $f_i(B)$ est mesurable pour la mesure $\mu_i/f_i(K)$, restriction de μ_i à $f_i(K)$. Par conséquent, $f_i(B)$ est mesurable pour la mesure μ_i .

Comme μ_i est continue pour la topologie $(f_i^*)^{-1}(\tau)$, on a

$$\forall\, \eta > 0 \,, \quad \exists\, K \text{ compact de } X \text{, contenu dans } B : \quad \|\mu_i[f_i(B)] - \mu_i[f_i(K)]\| < \eta \,.$$

Comme $\mu_i[f_i(B)]$ ne dépend pas de i (à cause de la projectivité des mesures), on définit $\mu(B)$ par :

$$\mu(B) = \mu_i[f_i(B)] \quad .$$

Si B est un borélien quelconque de X, pour tout ε, réel positif, on sait qu'il existe un compact K_ε de X, vérifiant :

$$\forall\, i \in I \;, \quad \forall\, B_i \text{ borélien contenu dans } X_i \setminus f_i(K_\varepsilon) \;, \qquad \|\mu_i[f_i(B_i)]\| < \varepsilon \quad .$$

Par suite, on considère le borélien $B_\varepsilon = B \cap K_\varepsilon$. Le borélien B_ε est contenu dans le compact K_ε ; par suite, on peut définir $\mu(B_\varepsilon)$.

Le filtre sur E, défini par $\{\mu(B_\varepsilon)\}$ lorsque ε tend vers 0, est un filtre de Cauchy, il admet donc une limite, que l'on note $\mu(B)$.

On a donc défini une application μ de la tribu engendrée par les fermés de X dans E. Par limites, on vérifie que μ est une mesure sur la tribu borélienne, qu'elle est finie, et de norme 1. La mesure μ se prolonge en une application linéaire, que l'on note encore μ_0, de $\mathcal{E}(X)$ dans E.

Comme μ est une mesure borélienne de norme 1, l'application est continue de $\mathcal{E}(X)$, muni de la topologie $\mathcal{U}$ de la convergence uniforme, dans E.

De plus, chaque μ_i est supposée continue pour la topologie image réciproque de τ par f_i^*, par suite, pour tout ε réel positif, il existe un compact K de X, vérifiant : Pour tout ensemble A_i, μ_i-mesurable, et tel que $A_i \cap f_i(K) = \emptyset$, on a

$$\|\mu_i(A_i)\| < \varepsilon/2 \quad .$$

Si B est un borélien de X, alors, pour tout i, $f_i(B \cap K)$ est mesurable dans X_i ; on peut donc conclure que, pour tout réel positif (strictement) ε, il existe un compact H contenu dans $B \cap K$, tel que

$$\|\mu(H) - \mu(B)\| < \varepsilon \quad .$$

La mesure μ est intérieurement régulière, elle est donc une mesure de Radon.

PROPOSITION 2.3.6. - <u>On considère un système projectif $(\{X_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i\geqslant j})$ défini comme dans la proposition 2.3.5, et on conserve les mêmes notations.</u>

<u>On n'impose plus la complétion de E, mais on suppose E complètement réticulé.</u>

<u>Si les mesures μ_i sont des mesures de Radon positives, alors on obtient la même condition nécessaire et suffisante :</u>

Pour qu'il existe une mesure de Radon μ sur la limite projective X, à valeurs dans E, vérifiant :

$$\forall\, i \in I\,, \qquad \mu_i = f_i(\mu)\ ,$$

il faut et il suffit que, pour tout i, la mesure μ_i soit continue pour la topologie image réciproque de τ par f_i^*.

Démonstration. - Comme précédemment, il est évident que cette condition est nécessaire ; il suffit donc de démontrer qu'elle est suffisante.

Pour tout compact K de X, on définit $\mu(K)$ par : $\mu(K) = \mu_i[f_i(K)]$; cette valeur ne dépend pas de i, à cause de la condition de projectivité vérifiée par les μ_i.

Si B est un borélien de X, contenu dans un compact K, le sous-ensemble de E :

$$\{\mu_i[f_i(H)] : H \text{ compact contenu dans } B\}$$

est un sous-ensemble majoré par $\mu_i[f_i(K)]$, il admet donc une borne supérieure, et celle-ci ne dépend que de B ; on la note $\mu(B)$.

Si B est un borélien quelconque de X, pour tout réel ε positif, on définit le compact K_ε comme précédemment, et le borélien $B_\varepsilon = B \cap K_\varepsilon$. B_ε est un borélien contenu dans un compact, on peut donc définir $\mu(B_\varepsilon)$.

Le sous-ensemble de E :

$$\{\mu(B_\varepsilon) + \varepsilon y : \varepsilon \text{ réel positif, } y \text{ élément positif de } E \text{ vérifiant } \|y\| = 1\}$$

est un sous-ensemble de E minoré par 0 et non vide, il admet donc une borne inférieure qui ne dépend que de B, et que l'on note $\mu(B)$.

On vérifie alors que μ est une mesure positive sur X, c'est-à-dire une application dénombrablement additive de la tribu borélienne de X dans le cône des éléments positifs de E. De plus, μ est intérieurement régulière, elle est donc une mesure de Radon.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques. Chap. 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Bourbaki, 18).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. Chap. 1-4 (2e éd.), 5 et 6. - Paris, Hermann, 1956-1965 (Act. scient. et ind., 1175, 1244 et 1281 ; Bourbaki, 13, 21 et 25).

[3] CARTAN (Henri). - Cours de C_3 : Algèbre et géométrie, Année 1967/68. - Paris, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 1968 (multigr.).

[4] CHOQUET (Gustave). - Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 75-81.

[5] CHOQUET (Gustave). - Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 83-89.

[6] DE WILDE (Marc). - Une propriété de relèvement des espaces à réseaux absorbants, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 1968, Série A, p. 457-459.

[7] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). - Linear operators, Part I. - New York, London, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics, Interscience, 7).

[8] EHRESMANN (Charles). - Catégories et structures. - Paris, Dunod, 1965 (Travaux et Recherches mathématiques, 10).

[9] KURATOWSKI (Casimir). - Topologie. Volume I, 4e édition. - Warszawa, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958 (Monografie Matematyczne, 20).

[10] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[11] SAVEL'EV (L. Ja.). - Mesures vectorielles σ-additives [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 167, 1966, p. 758-759 ; [en anglais], Soviet Math., t. 7, 1966, p. 480-482.

[12] SCHWARTZ (Laurent). - Mesures de Radon sur des espaces topologiques sousliniens, Cours de l'année 1967/68.

[13] SIERPINSKI (Waclaw). - Leçons sur les nombres transfinis. - Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[14] SIERPINSKI (Waclaw). - Sur les familles inductives et projectives d'ensembles, Fund. Math., t. 13, 1929, p. 228-239.

[15] SIERPINSKI (Waclaw). - Algèbre des ensembles. - Warszawa, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 1951 (Monografie Matematyczne, 23).

[16] THOMAS (Erik). - L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle, Séminaire Choquet, 7e année, 1967/68 : Initiation à l'analyse, Section B, n° 10, 32 p.

(Texte reçu le 7 janvier 1969)

Mlle Michèle DEHEN
Ass. Fac. Sc. Paris
11 bis rue du Lion
93 - BONDY