Erik Thomas

L'intégration par rapport à une mesure de radon vectorielle

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, nº 2 (1967-1968), exp. nº B10, p. B1-B32

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A6_0>

25 avril et 2 mai 1968

L'INTÉGRATION PAR RAPPORT À UNE MESURE DE RADON VECTORIELLE

par Erik THOMAS

0. Introduction.

Le but de cet exposé est d'introduire l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ des fonctions intégrables par rapport à une mesure de Radon vectorielle μ , et de démontrer des théorèmes justifiant cette notion (1). On se borne ici à considérer des mesures à valeurs dans un espace localement convexe séparé, qui sera d'ailleurs un espace de Banach, sauf au paragraphe 7. L'outil essentiel est la semi-variation $\mu^\bullet$ de la mesure μ , une notion qui généralise l'intégrale supérieure essentielle de BOURBAKI [2] et la semi-variation de BARTLE, DUNFORD et SCHWARTZ [1], [3] (IV-10).

Notations et conventions. - Pour la théorie de l'intégration par rapport à une mesure scalaire, nous suivons BOURBAKI [2].

Cependant, nous écrirons "intégrable" au lieu de "essentiellement intégrable", "négligeable" au lieu de "localement négligeable" et $\mathcal{L}^p$ au lieu de $\overline{\mathcal{L}^p}$ (2). T étant un espace localement compact, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(T)$ désigne l'espace des fonctions réelles, continues, à support compact dans T , et $\mathcal{C}_0(T)$ désigne l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini. Sauf mention du contraire, on entendra par fonction une fonction réelle et par fonction positive une fonction à valeurs dans l'intervalle $[0 , +\infty]$. $\mathcal{J}^+$ désigne l'ensemble des fonctions positives semi-continues inférieurement. μ étant une mesure à valeurs dans l'espace localement convexe sur $\underset{\sim}{R}$, E , et x' étant une forme linéaire continue sur E , on notera $\mu_{x'}$ la mesure réelle $x' \circ \mu$ obtenue en composant μ avec x' .

Lorsque E est un espace normé, la norme d'un élément x de E (resp. x' de E') sera notée $|x|$ (resp. $|x'|$).

Rappelons qu'une mesure de Radon sur T à valeurs dans E est une application linéaire continue de $\mathcal{K}(T)$ dans E . Lorsque E est un espace normé, la continuité signifie qu'à tout compact $K \subset T$, on peut associer une constante M_K telle que $|\mu(\varphi)| \leqslant M_K \|\varphi\|_\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ à support dans K .

---

(1) Pour un résumé des résultats essentiels, voir [8], [9], [10].

(2) Suivant la suggestion de L. SCHWARTZ, nous appellerons au besoin strictement intégrables les fonctions intégrables au sens de BOURBAKI.

1. Définition de l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$.

DÉFINITION 1.1. - Etant données une mesure de Radon μ , à valeurs dans un espace normé et une fonction positive f , nous définirons $\mu^\bullet(f)$ comme suit :

- Lorsque f est semi-continue inférieurement

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu(\varphi)| \qquad \text{où } \varphi \in \mathcal{K}(T) \ .$$

- Lorsque f est à support compact

$$\mu^\bullet(f) = \inf_{f\leqslant g} \mu^\bullet(g) \qquad \text{où } g \in \mathfrak{J}^+ \ .$$

- Lorsque f est positive arbitraire

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{0\leqslant h\leqslant f} \mu^\bullet(h) \qquad \text{où } h \text{ est à support compact.}$$

L'application $\mu^\bullet : f \to \mu^\bullet(f)$ s'appelle la semi-variation de μ . A étant une partie de T , on notera $\mu^\bullet(A) = \mu^\bullet(\chi_A)$, χ_A désignant la fonction caractéristique de A . Lorsque $\mu^\bullet(A) = 0$, on dira que A est μ-négligeable et on utilisera l'expression " μ-presque-partout" (abrégée : μ p. p.) de manière correspondante.

Il est facile de voir que la définition ci-dessus est cohérente. Notamment,

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant f\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \mu^\bullet(\varphi) \qquad \text{pour } f \in \mathfrak{J}^+ \ . \tag{1.2}$$

Lorsque μ est une mesure positive, $\mu^\bullet$ n'est autre que l'intégrale supérieure essentielle de BOURBAKI [2], et lorsque μ est une mesure réelle, $\mu^\bullet$ est l'intégrale supérieure essentielle de la mesure positive $|\mu|$. En effet, on a alors pour $f \in \mathfrak{J}^+$:

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu(\varphi)| = \sup_{0\leqslant\psi\leqslant f} \ \sup_{|\varphi|\leqslant\psi} |\mu(\varphi)| = \sup_{0\leqslant\psi\leqslant f} |\mu|(\psi) = |\mu|^\bullet(f) \ ,$$

où φ et ψ sont des fonctions de $\mathcal{K}$.

PROPOSITION 1.3.

(a) $\mu^\bullet$ est croissante et $(f_i)_{i\in I}$ étant une famille filtrante croissante de fonctions positives semi-continues inférieurement de borne supérieure f , on a $\mu^\bullet(f) = \sup_i \mu^\bullet(f_i)$.

(b) $\mu^\bullet$ est positivement homogène et dénombrablement sous-additive.

(c) La relation $\mu^\bullet(f) = 0$ équivaut à $f(t) = 0$ μ p. p., et $\mu^\bullet(f) < +\infty$ entraîne $f(t) < +\infty$ μ p. p.

Les vérifications de ces propriétés ne présentent aucune difficulté. Pour le second point de (a), on peut, par exemple, se ramener au cas de mesures positives grâce au lemme suivant :

LEMME 1.4. - Pour $f \in \mathfrak{I}^+$, on a

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|^\bullet(f) \quad .$$

Démonstration.

$$\mu^\bullet(f) = \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu(\varphi)| = \sup_{|\varphi|\leqslant f}\ \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}(\varphi)| = \sup_{|x'|\leqslant 1}\ \sup_{|\varphi|\leqslant f} |\mu_{x'}(\varphi)| = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|^\bullet(f).$$

Soit alors $\mathfrak{F}^\bullet(\mu)$ l'ensemble des fonctions réelles f telles que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$. Il résulte des propriétés de $\mu^\bullet$ énoncées ci-dessus que $\mathfrak{F}^\bullet(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^T$ et que l'application $f \to \mu^\bullet(|f|)$ est une semi-norme sur $\mathfrak{F}^\bullet(\mu)$.

LEMME 1.5. - L'espace $\mathcal{K}(T)$ est contenu dans $\mathfrak{F}^\bullet(\mu)$, l'injection étant continue.

En effet, ω étant un ouvert relativement compact, il résulte de la continuité de μ que $\mu^\bullet(\omega) = \sup_{|\varphi|\leqslant \chi_\omega} |\mu(\varphi)|$ est fini. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{K}$ à support dans ω, on a

$$\mu^\bullet(|\varphi|) \leqslant \mu^\bullet(\omega)\|\varphi\|_\infty \quad .$$

DÉFINITION 1.6. - L'espace $\mathfrak{L}^1(\mu)$ des fonctions μ-intégrables est par définition l'adhérence de $\mathcal{K}(t)$ dans l'espace $\mathfrak{F}^\bullet(\mu)$. Autrement dit, $\mathfrak{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions réelles f avec la propriété suivante :

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\mu^\bullet(|f - \varphi|) < \varepsilon$.

Alors, si f est une fonction telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ telle que $\mu^\bullet(|f - g|) < \varepsilon$, f appartient aussi à $\mathfrak{L}^1(\mu)$. Notamment, toute fonction égale μ-presque-partout à une fonction de $\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}^1(\mu)$ appartient aussi à $\mathfrak{L}^1$. La relation $\mu^\bullet(|f - g|) = 0$ équivaut à $f(t) = g(t)$ μ-presque-partout, de sorte que l'espace séparé associé à $\mathfrak{L}^1(\mu)$, noté $L^1(\mu)$, est un espace de classes de fonctions égales μ-presque-partout.

PROPOSITION 1.7.

(a) $f \in \mathfrak{L}^1$ implique $|f|$, f^+, $f^- \in \mathfrak{L}^1$.

(b) $f \in \mathfrak{L}^1$, ψ, continue bornée, implique $\psi f \in \mathfrak{L}^1$.

(c) $f \in \mathfrak{L}^1$, $f \geqslant 0$ implique $\inf(\alpha, f) \in \mathfrak{L}^1$ pour tout nombre $\alpha \geqslant 0$.

Cela résulte des inégalités :

$$\mu^\bullet(\,|\,|f| - |\varphi|\,|\,) \leqslant \mu^\bullet(|f - \varphi|) \qquad \varphi \in \mathcal{K}$$

$$\mu^\bullet(|\psi f - \psi\varphi|) \leqslant \mu^\bullet(|f - \varphi|)\|\psi\|_\infty \qquad \text{et} \qquad \varphi\psi \in \mathcal{K}$$

$$\mu^\bullet(|\inf(\alpha\ ,\ f) - \inf(\alpha\ ,\ \varphi)|) \leqslant \mu^\bullet(|f - \varphi|) \qquad \text{où} \quad \varphi \in \mathcal{K}_+$$

valables en vertu de la croissance de $\mu^\bullet$.

THÉORÈME 1.8. - μ étant une mesure à valeurs dans un espace normé, l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet.

Démonstration. - Il suffit de montrer que $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ est complet, ou ce qui revient au même, que dans $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ toute série normalement convergente est convergente. Soit donc $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions réelles telles que $\sum\limits_n \mu^\bullet(|f_n|) < +\infty$. Soit $g = \sum\limits_n |f_n|$. $\mu^\bullet(g) \leqslant \sum\limits_n \mu^\bullet(|f_n|) < +\infty$ donc $g(t) < +\infty$ μ p. p. Soit f une fonction réelle telle que $f(t) = \sum\limits_n f_n(t)$ μ p. p. Alors $|f(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(t)| \leqslant \sum\limits_{i>n} |f_i(t)|$ μ p. p. de sorte que $\mu^\bullet(|f - \sum\limits_{i=1}^{n} f_i|) \leqslant \sum\limits_{i>n} \mu^\bullet(|f_i|)$, ce qui prouve que f appartient à $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ et que $f = \sum\limits_n f_n$.

Remarque. - Il resulte de la démonstration que de toute suite convergente vers f dans l'espace $\mathcal{F}^\bullet$, on peut extraire une sous-suite convergent vers f presque-partout. Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction de $\mathcal{L}^1$. Il résulte immédiatement de la définition de $\mu^\bullet$ qu'on a

$$|\mu(\varphi)| \leqslant \mu^\bullet(|\varphi|) \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{K} \quad . \tag{1.9}$$

La mesure μ est donc continue pour la topologie induite dans $\mathcal{K}$ par $\mathcal{L}^1(\mu)$. Dans la suite nous supposerons (sauf au paragraphe 7) que E est un espace normé complet.

DÉFINITION 1.10. - L'intégrale, par rapport à μ , d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est par définition la valeur en f du prolongement continu de μ à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

L'intégrale est donc un élément de l'espace E qui sera noté $\int f\, d\mu$ ou $\mu(f)$. On a évidemment l'inégalité

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leqslant \mu^\bullet(|f|) \qquad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad .$$

THÉORÈME 1.11. - Soient μ et ν deux mesures à valeurs dans des espaces de Banach et supposons que $\mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$. Alors, $\mathcal{L}^1(\nu)$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, l'injection étant continue. Notamment,

(a) S'il existe une mesure positive ν telle que $|\mu(\varphi)| \leqslant \nu(|\varphi|)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$, c'est-à-dire si μ est à variation localement bornée (majorable au sens de Bourbaki), on a $\mu^\bullet \leqslant \nu^\bullet$ et $\mathcal{L}^1(\nu) \overset{\subset}{\dashrightarrow} \mathcal{L}^1(\mu)$.

(b) Si u est une application linéaire continue de E dans un espace de Banach et si $\nu = u \circ \mu$, on a $\nu^\bullet \leqslant \|\mu\|\mu^\bullet$ d'où $\mathcal{L}^1(\mu) \overset{\subset}{\dashrightarrow} \mathcal{L}^1(\nu)$ et par conséquent $\int f\, d\nu = u \int f\, d\mu$ pour tout f appartenant à $\mathcal{L}^1(\mu)$. En particulier, si x' est une forme linéaire continue sur E, on a $\mathcal{L}^1(\mu) \overset{\subset}{\dashrightarrow} \mathcal{L}^1(\mu_{x'})$ $(\mu_{x'} = x' \circ \mu)$ et

(1.12) $$\langle f\, d\mu\, , x'\rangle = \int f\, d\mu_{x'} \;.$$

La démonstration de ces faits est évidente. Il suit de la dernière partie du théorème que toute fonction μ-intégrable est scalairement μ-intégrable (c'est-à-dire intégrable pour chaque mesure $\mu_{x'}$ (cf. introduction)) et que l'intégrale définie ci-dessus coïncide avec l'intégrale de f au sens de Bourbaki.

Dans la suite, f étant une fonction scalairement μ-intégrable, nous noterons encore, avec BOURBAKI, $\int f\, d\mu$ la forme linéaire sur E' définie par la formule 1.12 ci-dessus.

Il résulte du théorème 1.11 qu'en tant qu'espace vectoriel topologique, $\mathcal{L}^1(\mu)$ ne dépend pas de la norme de E, mais seulement de la topologie, deux normes équivalentes définissant des semi-variations équivalentes.

PROPOSITION. - Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

(1.13) $$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|^\bullet(|f|)$$

(1.14) $$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{\substack{|\varphi|\leqslant 1\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \left|\int \varphi f\, d\mu\right| \;.$$

Démonstration. - Comme $\mu^\bullet_{x'} \leqslant |x'|\mu^\bullet$ (1.11), on a $\sup_{|x'|\leqslant 1} \mu^\bullet_{x'}(|f|) \leqslant \mu^\bullet(|f|)$. Le membre de gauche de cette inégalité est donc, comme fonction de f, une semi-norme continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, mais d'après le lemme 1.4, cette semi-norme coïncide avec la semi-norme $f \to \mu^\bullet(|f|)$ sur ce sous-espace $\mathcal{K}$. Ce dernier étant dense, il y a coïncidence partout sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. La seconde relation résulte de la première, car on sait que

$$\mu^\bullet_{x'}(|f|) = |\mu_{x'}|(|f|) = \sup_{\substack{|\varphi|\leqslant 1\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \left|\int \varphi f\, d\mu_{x'}\right| \;.$$

de sorte que

$$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{|x'|\leq 1} \sup_{\substack{|\varphi|\leq 1\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \left|\int \varphi f \, d\mu_{x'}\right| = \sup_{\substack{|\varphi|\leq 1\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \sup_{|x'|\leq 1} \left|\langle \int \varphi f \, d\mu \, , x'\rangle\right|$$

$$= \sup_{\substack{|\varphi|\leq 1\\ \varphi\in\mathcal{K}}} \left|\int \varphi f \, d\mu\right| \quad .$$

EXEMPLES 1.14.

(a) Mesures à valeurs dans un espace de dimension finie : Soit E un espace normé de dimension finie sur $\underset{\sim}{R}$ et soit $(e_i)_{i=1-n}$ une base de E (avec $|e_i| = 1$) Une mesure de Radon μ à valeurs dans E s'écrit alors $\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(\varphi)e_i$, où $\mu_i = e'_i \circ \mu$, $(e'_i)_{i=1-n}$ étant la base duale. Alors

$$|\mu(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_i(\varphi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|(|\varphi|) \quad .$$

Par conséquent, μ est à variation localement bornée et ν étant la variation de μ (i. e. la plus petite mesure positive ν telle que $|\mu(\varphi)| \leq \nu(|\varphi|)$), on a $\nu \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$. D'autre part, comme $\mu_i = e'_i \circ \mu$, on a $\mu_i^\bullet \leq |e'_i|\mu^\bullet$ (1.11) de sorte que $\nu^\bullet \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\bullet \leq \frac{1}{c}\mu^\bullet$, avec $\frac{1}{c} = \sum_{i=1}^{n} |e'_i|$, et que finalement on ait les inégalités $c\nu^\bullet \leq \mu^\bullet \leq \nu^\bullet$. Il en résulte que $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\nu)$, $\mu^\bullet$ définissant une semi-norme équivalente à la semi-norme $f \to \int |f| \, d\nu = \nu^\bullet(|f|)$ habituelle sur $\mathcal{L}^1(\nu)$.

(b) Soit ν une mesure positive de support T , soit μ l'injection naturelle de $\mathcal{K}(T)$ dans $L^p(\nu)$. Alors pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^p(\nu)$ et pour $p = +\infty$ $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{C}_0(T)$.

En effet, on voit facilement que, pour $f \geq 0$, on a $\mu^\bullet(f) = \nu^\bullet(f^p)^{1/p}$ lorsque $1 \leq p < +\infty$ et $\mu^\bullet(f) = \sup_{t\in T} f(t)$, pour $p = +\infty$.

(c) Plus généralement, soit N une fonction à valeurs dans $\underset{\sim}{R}_+$, sous-additive positivement homogène et croissante sur $\mathcal{K}_+$. Le prolongement de N à $\mathcal{K}$ défini par $N(\varphi) = N(|\varphi|)$ est alors une semi-norme continue sur $\mathcal{K}$. Soit E l'espace de Banach associé à cette semi-norme. Soit μ l'application canonique de $\mathcal{K}$ dans E . Alors μ est une mesure vectorielle et pour $\varphi \in \mathcal{K}_+$, $\mu^\bullet(\varphi) = N(\varphi)$.

Nous donnerons d'autres exemples dans la suite (4.6, 6.7, 7.6).

2. Fonctions μ-mesurables.

DÉFINITION 2.1. - Etant données une mesure de Radon μ sur T à valeurs dans un espace normé et une application f de T dans un espace topologique, nous dirons que f est μ-mesurable lorsque, pour tout compact $K \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_1 \subset K$, avec $\mu^\bullet(K - K_1) < \varepsilon$, telle que la restriction de f à K_1 soit continue.

L'ensemble des fonctions numériques μ-mesurables est évidemment stable par les opérations algébriques usuelles ; toute fonction continue est μ-mesurable et il peut arriver que seules les fonctions continues le soient (dans l'exemple 1.14(b) avec $p = +\infty$, on a $\mu^\bullet(A) < 1$ pour $A = \emptyset$ seulement).

Si $\nu^\bullet \leqslant \mu^\bullet$ toute fonction μ-mesurable est aussi ν-mesurable. En particulier, toute fonction μ-mesurable est $\mu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in E'$, mais la réciproque de cela n'est pas en général exacte, comme le montre l'exemple mentionné. Au paragraphe 4, on définira les mesures pour lesquelles les fonctions scalairement μ-mesurables sont μ-mesurables. Il s'ensuit aussi que la notion de fonction μ-mesurable ne dépend pas de la norme de E, mais seulement de sa topologie.

On aura besoin du lemme suivant dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

LEMME 2.2. - On a les relations suivantes :

Pour O ensemble ouvert $\mu^\bullet(O) = \sup_{\substack{K \subset O \\ K \text{ compact}}} \mu^\bullet(K)$.

Pour A relativement compact $\mu^\bullet(A) = \inf_{\substack{A \subset O \\ O \text{ ouvert}}} \mu^\bullet(O)$.

Enfin pour un ensemble A quelconque $\mu^\bullet(A) = \sup_{K \text{ compact}} \mu^\bullet(A \cap K)$.

PROPOSITION 2.3. - Soient f une fonction μ-mesurable et g une fonction égale à f μ-presque-partout. Alors g est μ-mesurable.

Démonstration. - Soit $A = \{t : f(t) \neq g(t)\}$. Soit K un compact et ε un nombre > 0. $\mu^\bullet(A \cap K) = 0$, donc d'après le lemme ci-dessus, il existe ω ouvert, contenant $A \cap K$, telle que $\mu^\bullet(\omega) < \varepsilon/2$. Soit $K_1 \subset K$ telle que $\mu^\bullet(K - K_1) < \varepsilon/2$ et que f/K_1 soit continue. Alors si $K_2 = K_1 \cap \complement\omega$, on a $K - K_2 \subset (K - K_1) \cup \omega$ de sorte que $\mu^\bullet(K - K_2) < \varepsilon$ et que $g/K_2 = f/K_2$ est continue.

PROPOSITION 2.4. - Toute fonction μ-intégrable est μ-mesurable.

Démonstration. - Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathcal{K}$ telle que $f = \sum_n \varphi_n$ dans $\mathcal{L}^1$ et telle que $\sum_n n\mu^\bullet(|\varphi_n|) < +\infty$. Soit

$$h(t) = \sum_{n\in N} n|\varphi_n(t)| \quad ;$$

h étant semi-continue inférieurement, l'ensemble $O_a = \{t : h(t) > a\}$ est ouvert. Comme $\mu^\bullet(h) \leqslant \sum_{n\in N} n\mu^\bullet(|\varphi_n|) < +\infty$, et que $\chi_{O_a} \leqslant \frac{1}{a} h$, on a, $\varepsilon > 0$ étant donnée,

$$\mu^\bullet(O_a) \leqslant \frac{\mu^\bullet(h)}{a} \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } a \text{ assez grand .}$$

Pour t dans le complémentaire de O_a, on a

$$n \sum_{i\geqslant n} |\varphi_i(t)| \leqslant \sum_{i\geqslant n} i|\varphi_i(t)| \leqslant h(t) \leqslant a$$

de sorte que $\sum_{i\geqslant 1} |\varphi_i(t)|$ converge uniformément dans $\complement O_a$. Si g est la fonction telle que $g(t) = \sum_{n\in N} \varphi_n(t)$ partout où la série converge absolument et $g(t) = 0$ ailleurs, g est continue sur $\complement O_a$, quel que soit a, et a fortiori g est μ-mesurable. Par ailleurs $g = \sum \varphi_n$ dans l'espace $\mathcal{L}^1$ (voir 1.8) de sorte que $f(t) = g(t)$ μ-presque-partout. f est donc μ-mesurable d'après 2.3.

THÉORÈME 2.5. - Soit f une fonction μ-mesurable telle que $|f(t)| \leqslant g(t)$ μ-presque-partout, g étant une fonction μ-intégrable. Alors f est μ-intégrable.

La démonstration basée essentiellement sur le théorème d'Urysohn, fait intervenir les quatre lemmes suivants :

LEMME 2.6. - Soit f une fonction positive coïncidant μ-presque-partout avec une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $\lim_{\mu^\bullet(A)\to 0} \mu^\bullet(\chi_A f) = 0$.

En effet, on peut supposer $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (c'est-à-dire partout fini)

$$\begin{aligned}\mu^\bullet(\chi_A f) &\leqslant \mu^\bullet(\chi_A |f - \varphi|) + \mu^\bullet(\chi_A|\varphi|)\\ &\leqslant \mu^\bullet(|f - \varphi|) + \|\varphi\|_\infty \mu^\bullet(A) \quad .\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant donnée, on peut choisir $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\mu^\bullet(|f - \varphi|) < \varepsilon/2$ puis $\mu^\bullet(A) < \varepsilon/2\|\varphi\|_\infty$ entraîne que $\mu^\bullet(\chi_A f)$ soit inférieure à ε.

LEMME 2.7. - Soit f une fonction positive coïncidant μ-presque-partout avec une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $\lim_K \mu^\bullet(\chi_{\complement K} f) = 0$, la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des parties compactes de T.

En effet, on peut supposer $f \in \mathcal{L}^1$.

$$\mu^\bullet(\chi_{CK}\, f) \leqslant \mu^\bullet(|f - \varphi|) + \mu^\bullet(\chi_{CK}\, |\varphi|) .$$

$\varepsilon > 0$ étant donnée, soit $\varphi \in \mathcal{K}$ telle que $\mu^\bullet(|f - \varphi|) < \varepsilon$. Alors pour $K \supset \operatorname{supp} \varphi$, $\mu^\bullet(\chi_{CK}\, f) < \varepsilon$.

LEMME 2.8. - <u>Soit</u> g <u>une fonction de</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$. <u>Alors, il existe une fonction</u> $h \in \mathfrak{I}^+$ <u>telle que</u> $|g(t)| \leqslant h(t)$ μ p. p. <u>et telle que</u> h <u>coïncide</u> μ p. p. <u>avec une fonction de</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compactes telle que $\sum\limits_n \mu^\bullet(|\varphi_n|) < +\infty$ et que $g = \sum\limits_n \varphi_n$ dans $\mathcal{L}^1$. Alors $h = \sum\limits_n |\varphi_n|$ convient. (Voir 1.8.)

LEMME 2.9. - <u>Soient</u> $h \in \mathfrak{I}^+$, K <u>un compact, et</u> f <u>une fonction définie et continue sur</u> K <u>telle que</u> $0 \leqslant f(t) \leqslant h(t)$ <u>pour tout</u> $t \in K$. <u>Alors,</u> $\varepsilon > 0$ <u>étant donnée, il existe une fonction</u> $\varphi \in \mathcal{K}$ <u>telle que</u> $0 \leqslant \varphi \leqslant h$ <u>et telle que</u> $f(t) - \varepsilon \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ <u>pour tout</u> $t \in K$ (φ <u>est un prolongement continu de</u> f <u>à</u> ε <u>près, en dessous de</u> h).

<u>Démonstration</u>. - h est la borne supérieure de la famille filtrante croissante $(\varphi_i)_{i\in I}$ des fonctions de $\mathcal{K}_+$ inférieures à h . Soit ψ un prolongement continu positif arbitraire de f à T (K étant fermé dans le compactifié d'Alexandroff de T , on applique le théorème d'Urysohn au compactifié de T lequel est un espace normal). Soit $\psi_i = \inf(\psi , \varphi_i)$. Alors pour $t \in K$, $\psi(t)$ est la borne supérieure de la famille filtrante croissante $\{\psi_i(t)\}_{i\in I}$, et d'après le lemme de Dini, la convergence de ψ_i vers ψ est uniforme sur K . Il existe donc ψ_i tel que $\psi(t) - \varepsilon \leqslant \psi_i(t) \leqslant \psi(t) = f(t)$ pour tout $t \in K$. Alors $\varphi = \psi_i$ convient.

<u>Démonstration du théorème 2.5</u>. - Soit f une fonction μ-mesurable telle que $|f(t)| \leqslant g(t)$ μ p. p. où g est μ-intégrable. f^+ et f^- sont encore μ-mesurables donc on peut se ramener au cas où $f \geqslant 0$, et d'après la proposition 2.3 et la remarque après la définition 1.6, on peut supposer que l'on a $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ partout. Grâce au lemme 2.8, on peut de plus remplacer g par une fonction de $\mathfrak{I}^+$ coïncidant μ-presque-partout avec une fonction intégrable, ce que nous ferons. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 2.7, il existe un compact K tel que $\mu^\bullet(\chi_{CK}\, g) < \varepsilon$. Soit $K_1 \subset K$ un compact tel que f/K_1 soit continue et que $\mu^\bullet(\chi_{K-K_1}\, g) < \varepsilon$ (lemme 2.6). Soit φ une fonction de $\mathcal{K}$ telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant g$ et que $f(t) - \varepsilon/\mu^\bullet(K_1) \leqslant \varphi(t) \leqslant f(t)$ pour tout $t \in K_1$ (lemme 2.9). Alors

$$\mu^\bullet(|f - \varphi|) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}\ |f - \varphi|) + \mu^\bullet(\chi_{K-K_1}\ |f - \varphi|) + \mu^\bullet(\chi_{K_1}\ |f - \varphi|)$$
$$\leqslant 2\mu^\bullet(\chi_{\complement K}\ g) + 2\mu^\bullet(\chi_{K-K_1}\ g) + \mu^\bullet(\chi_{K_1}\ |f - \varphi|)$$
$$\leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon \quad ,$$

ce qui prouve que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Remarque. - On pourrait espérer que tout fonction μ-mesurable f telle que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$ appartienne à $\mathcal{L}^1$. Il n'en est rien en général (voir la remarque après 5.1), mais on montrera plus loin (6.6) que c'est exact lorsque E est par exemple faiblement séquentiellement complet.

Dans la suite de cet article, on examinera des mesures de Radon qui méritent plus amplement le nom "mesure", en ce qu'elles sont associées à des fonctions dénombrablement additives d'ensemble. On verra que ces mesures, appelées "prolongeables" se comportent à beaucoup d'égards comme des mesures scalaires, notamment parce que les fonctions boréliennes sont mesurables pour ces mesures. Le paragraphe suivant concerne d'abord les mesures bornées et leurs propriétés de compacité.

3. Mesures bornées.

Nous dirons qu'une mesure de Radon est bornée quand elle est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Une mesure de Radon à valeurs dans un espace normé est donc bornée quand il existe une constante M telle que

$$|\mu(\varphi)| \leqslant M\|\varphi\|_\infty \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{K} \quad .$$

Il revient au même que $\mu^\bullet(T)$ soit fini. Lorsque μ est bornée, $\mathcal{C}_0$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et le prolongement continu de μ à $\mathcal{C}_0$ coïncide avec l'intégrale. On regardera toujours une mesure bornée comme une application linéaire continue définie sur $\mathcal{C}_0$. Ainsi on dira qu'une mesure bornée est faiblement compacte quand elle transforme la boule unité de $\mathcal{C}_0$ en ensemble relativement faiblement compact.

THÉORÈME 3.1. - Soit μ une mesure bornée à valeurs dans un espace de Banach E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Toute fonction borélienne bornée appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

(b) Pour toute fonction borélienne bornée f on a $\int f\, d\mu \in E$ (3).

(b') Pour tout ouvert ω , on a $\int_\omega d\mu \in E$.

---

(3) L'intégrale est prise ici, a priori, au sens faible de Bourbaki.

(c) μ <u>est faiblement compact (i. e. μ transforme la boule unité de $\mathcal{C}_0$ en ensemble relativement faiblement compact</u>).

<u>Démonstration</u>. - Les implications (a) ==> (b) ==> (b') sont triviales. Il est bien connu que (c) équivaut à :

(d) <u>L'ensemble</u> $\{\mu_{x'}\}_{|x'|\leqslant 1}$ <u>est</u> $\sigma(M , M')$ <u>relativement compact dans l'espace</u> $M = \mathcal{C}_0'$ (<u>i. e. la transposée de</u> μ <u>est faiblement compacte</u>).

Montrons que (b') implique (d) et que (d) implique (a). Pour la première, nous employons le critère suivant de Grothendieck ([4], p. 147) : Soit $H \subset M = \mathcal{C}_0'$ un ensemble borné. Pour que H soit relativement compact pour la topologie $\sigma(M , M')$ il faut et il suffit que pour toute suite $(\omega_n)_{n\in N}$ d'ouverts deux à deux disjoints on ait $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(\omega_n) = 0$ uniformément par rapport à $\alpha \in H$ (4).

Il suffit donc ici de montrer que lorsque n tend vers l'infini $\int_{\omega_n} d\mu_{x'}$ tend vers zéro uniformément par rapport à x' avec $|x'| \leqslant 1$. Or si $\omega = \bigcup\limits_n \omega_n$, on a

$$\langle \int_\omega d\mu \ , \ x' \rangle = \sum_n \langle \int_{\omega_n} d\mu \ , \ x' \rangle$$

donc la série $\sum\limits_n \int_{\omega_n} d\mu$ converge faiblement dans E , mais la même chose étant vraie pour toute sous-série, la série converge même en norme, d'après le théorème d'Orlicz ([6], p. 281). Il en résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} |\int_{\omega_n} d\mu| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|x'|\leqslant 1} |\int_{\omega_n} d\mu_{x'}| = 0$ ce qui prouve donc que (b') implique (d) (5).

Montrons enfin que (d) implique (a). Rappelons que si $H \subset M$ est relativement compact pour $\sigma(M , M')$ (nous dirons faiblement relativement compact), il en est de même de l'ensemble des mesures positives $\{|\alpha|\}_{\alpha\in H}$. Soit alors $H \subset M_+$ un ensemble faiblement compact contenant les mesures $|\mu_{x'}|$ avec $|x'| \leqslant 1$. Soit f une fonction positive semi-continue inférieurement et bornée (nous noterons $\mathfrak{J}_b^+$ l'ensemble de ces fonctions). Pour tout $\alpha \in H$, on a $\int f\, d\alpha = \lim\limits_{0<\varphi<f} \int \varphi\, d\alpha$. La limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des fonctions $\varphi \in \mathcal{K}$ telles que $0 \leqslant \varphi \leqslant f$. Comme les formes linéaires $\alpha \to \int f\, d\alpha$ et $\alpha \to \int \varphi\, d\alpha$ sont continues sur M muni de la topologie $\sigma(M , M')$, et que H est compact pour cette topologie, la limite ci-dessus est uniforme sur H d'après le lemme de Dini, autrement dit $\lim\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant f} \sup\limits_{\alpha\in H} \int (f - \varphi)\, d\alpha = 0$, et à plus forte raison :

---

(4) Dans le même article de GROTHENDIECK, on trouve aussi la démonstration que (b') implique (d) (cf. theorem 6, p. 160). L'équivalence (b), (b'), (c) est bien connue.

(5) La même méthode permet d'établir un critère de compacité plus maniable (cf. [11]).

$$\lim_{0\leq\varphi\leq f} \mu^\bullet(f-\varphi) = \lim_{0\leq\varphi\leq f} \sup_{|x'|\leq 1} \int (f-\varphi)\, d|\mu_{x'}| = 0$$

de sorte que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (voir lemme 1.4).

Démontrons maintenant d'abord l'analogue du lemme 1.4 pour les fonctions boréliennes bornées :

LEMME. - Sous l'hypothèse (d) on a pour toute fonction borélienne bornée positive g ,

$$\mu^\bullet(g) = \sup_{|x'|\leq 1} |\mu_{x'}|(g) \quad .$$

Il suffit de montrer que $\mu^\bullet(g)$ est plus petite que le membre de droite. Il est connu que

$$\alpha(g) = \lim_{\substack{g\leq f\\ f\in\mathfrak{J}_b^+}} \alpha(f) \quad ,$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant décroissant de fonctions semi-continues inférieurement bornées supérieures à g , et grâce au lemme de Dini cette limite est uniforme par rapport à $\alpha \in H$. A fortiori, $\varepsilon > 0$ étant donnée, il existe $f \in \mathfrak{J}_b^+$ avec $f \geqslant g$ telle que

$$|\mu_{x'}|(f) \leqslant |\mu_{x'}|(g) + \varepsilon \qquad \text{pour tout } x' \text{ avec } |x'| \leqslant 1 \quad .$$

Alors, on a $\mu^\bullet(g) \leqslant \mu^\bullet(f) = \sup_{|x'|\leq 1} |\mu_{x'}|(f) \leqslant \sup_{|x'|\leq 1} |\mu_{x'}|(g) + \varepsilon$, et $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, cela démontre le lemme.

Soit g alors une fonction borélienne bornée positive et montrons que g appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. on a

$$\int g\, d\alpha = \lim_{\substack{g\leq f\\ f\in\mathfrak{J}_b^+}} \int f\, d\alpha$$

la limite étant uniforme par rapport à $\alpha \in H$ grâce au lemme de Dini. En appliquant le lemme ci-dessus à $f - g$ on obtient donc que

$$\lim_{\substack{f\geq g\\ f\in\mathfrak{J}_b^+}} \mu^\bullet(f-g) = \lim_{\substack{f\geq g\\ f\in\mathfrak{J}_b^+}} \sup_{|x'|\leq 1} |\mu_{x'}|(f-g) = 0 \quad .$$

Comme $\mathfrak{J}_b^+$ est contenu dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après la première partie de la démonstration on en déduit que g appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Enfin, toute fonction borélienne bornée étant différente de deux telles fonctions positives, (a) est démontré, ce qui achève la démonstration du théorème.

PROPOSITION 3.2. - Soit μ une mesure bornée faiblement compacte. Pour qu'une fonction f, à valeurs dans un espace topologique, soit μ-mesurable, il faut et il suffit que f soit $\mu_{x'}$-mesurable quel que soit $x' \in E'$, et il suffit déjà que ce soit le cas pour x' parcourant un sous-espace F de E' d'indice positif (6).

Démonstration. - Comme $|\mu_{x'}|^{\bullet} \leqslant |x'|\mu^{\bullet}$ la condition est nécessaire même sans hypothèse sur μ. Pour la réciproque, rappelons le résultat suivant : Soit $H \subset M = \mathcal{C}_0'$ un ensemble borné. Pour que H soit relativement compact pour la topologie $\sigma(M, M')$ il faut et il suffit qu'il existe $\lambda \in M_+$ telle que

$$\lim_{\lambda(A)\to\infty} |\alpha|(A) = 0 \qquad (A \text{ partie borélienne})$$

uniformément par rapport à $\alpha \in H$. Quand il en est ainsi, on peut choisir λ de la forme

$$\lambda = \sum_n c_n |\alpha_n| \qquad \text{où } \alpha_n \in H$$

et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de scalaires positives (voir par exemple [3] IV, 9.2 et tenir compte du fait que $M = \mathcal{C}_0'$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace des mesures sur la tribu borélienne de T).

Supposons alors f $\mu_{x'}$-mesurable pour tout $x' \in E'$. Alors il existe $\lambda = \sum_n c_n |\mu_{x'_n}|$ telle que

$$\lim_{\lambda(A)\to 0} \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|(A) = \lim_{\lambda(A)\to 0} \mu^{\bullet}(A) = 0 .$$

La fonction f est aussi λ-mesurable ([2], chapitre 5) donc, η étant donnée, il existe K compact telle que $\lambda(T - K) < \eta$ et que f/K soit continue. Pour η convenable, on aura $\mu^{\bullet}(T - K) < \varepsilon$, et f est donc a fortiori μ-mesurable. Lorsque f est $\mu_{x'}$-mesurable pour $x' \in F$ où F est un sous-espace d'indice $K > 0$, on procède de la même manière en utilisant la relation évidente :

$$K\mu^{\bullet}(\omega) \leqslant \sup_{\substack{|x'|\leqslant 1\\ x'\in F}} |\mu_{x'}|(\omega) \qquad \omega \text{ ouvert.}$$

Remarque. - On a obtenu un résultat plus précis qui s'énonce : A chaque $\varepsilon > 0$, il correspond un compact K tel que $\mu^{\bullet}(T - K) < \varepsilon$ et f/K continu.

---

(6) On dira qu'un sous-espace F de E' est d'indice positif lorsqu'il existe une constante $K > 0$ telle que $K|x| \leqslant \sup_{\substack{|x'|\leqslant 1\\ x'\in F}} |\langle x , x'\rangle|$. La plus grande constante K s'appelle l'indice (ou caractéristique) de F.

PROPOSITION 3.3. - *Soit* μ *une mesure bornée faiblement compacte. Pour qu'un ensemble* A *soit* μ*-négligeable, il faut et il suffit que* A *soit* $\mu_{x'}$*-négligeable pour chaque* $x' \in E'$, *et il suffit déjà que ce soit le cas pour* x' *parcourant un sous-espace d'indice positif.*

Démonstration. - La condition est nécessaire sans hypothèse sur μ , car $|\mu_{x'}|^{\bullet}(A) \leqslant |x'|\mu^{\bullet}(A)$. La condition est suffisante : En effet, d'après la proposition précédente χ_A est μ-mesurable et comme la fonction 1 appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, χ_A appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après le théorème 2.5. Lorsque A est $\mu_{x'}$-négligeable pour tout x' , on conclut d'après 1.13

$$\mu^{\bullet}(A) = \sup_{|x'|\leqslant 1} |\mu_{x'}|(A) \quad .$$

Dans le cas général, on conclut d'après la relation

$$K\mu^{\bullet}(|f|) \leqslant \sup_{\substack{|x'|\leqslant 1 \\ x'\in F}} |\mu_{x'}|(|f|) \qquad \forall\ f \in \mathcal{L}^1(\mu) \ ,$$

vraie d'abord évidemment pour $f \in \mathcal{K}$, puis pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ quelconque par continuité.

Dans la suite de cet exposé, on étudiera des mesures non nécessairement bornées, mais les mesures bornées interviendront comme auxiliaires. Soient μ une mesure de Radon et ω un ouvert. La mesure induite par μ dans ω est par définition la restriction de μ à $\mathcal{K}(\omega)$ (espace qu'on identifie à un sous-espace de $\mathcal{K}(T)$). Soit ν cette restriction. ν est une mesure de Radon sur ω et $\nu^{\bullet}(\omega) = \mu^{\bullet}(\omega)$. ν est donc bornée si, et seulement si, $\mu^{\bullet}(\omega) < +\infty$, en particulier lorsque ω est relativement compact. Soit f une fonction définie sur ω . On notera $\hat{f}$ la fonction égale à f dans ω et égale à 0 dans ω . Pour $\varphi \in \mathcal{K}(\omega)$, on a donc par définition $\nu(\varphi) = \mu(\hat{\varphi})$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.4. - *Soit* ω *un ouvert.* ν *la mesure induite dans* ω *par* μ . *Alors*

(a) *pour* $f \in \mathfrak{J}^+(\omega)$, $\hat{f} \in \mathfrak{J}^+(T)$ *et* $\nu^{\bullet}(f) = \mu^{\bullet}(\hat{f})$,

(b) *pour* $f \geqslant 0$ *à support compact dans* ω , $\nu^{\bullet}(f) = \mu^{\bullet}(\hat{f})$,

(c) *Si* f *est une fonction à support compact dans* ω *appartenant à* $\mathcal{L}^1(\nu)$, $\hat{f}$ *appartient à* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *et* $\int f\, d\nu = \int \hat{f}\, d\mu$.

La vérification de ce lemme ne présente aucune difficulté.

4. Mesures prolongeables.

Dans la suite de cet exposé, nous considérons presqu'exclusivement une classe de mesures de Radon, que nous allons définir maintenant, caractérisée par le fait qu'il y a assez de fonctions intégrables et mesurables.

DÉFINITION 4.1. - Nous dirons qu'une mesure de Radon est prolongeable lorsque l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ contient toute les fonctions boréliennes bornées à support compact.

THÉORÈME 4.2. - Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Toute fonction borélienne bornée à support compact appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ (i. e. μ est prolongeable).

(b) Pour toute fonction f borélienne bornée à support compact, on a $\int f\, d\mu \in E$ (7).

(b') Pour tout compact K, on a $\int_K d\mu \in E$.

(c) L'image par μ de toute partie bornée de $\mathcal{K}(T)$ est faiblement relativement compacte dans E.

Démonstration. - Pour la démonstration, nous introduisons deux autres conditions équivalentes :

(b") Pour tout ouvert relativement compact ω, on a $\int_\omega d\mu \in E$.

(d) Pour tout ouvert relativement compact ω, la mesure induite par μ dans ω est faiblement compacte sur $\mathcal{C}_0(\omega)$.

Les implications (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (b') sont triviales.

(b') implique (b") d'après la relation $\omega = \overline{\omega} - \partial\omega$, où $\overline{\omega}$ et la frontière de ω, $\partial\omega$, sont compactes. Alors $\int_\omega d\mu = \int_{\overline{\omega}} d\mu - \int_{\partial\omega} d\mu \in E$.

L'équivalence de (c) et (d) est également évidente, toute partie bornée d'un $\mathcal{C}_0(\omega)$ (ω ouvert relativement compact) étant continue dans une partie bornée de $\mathcal{K}(T)$ et réciproquement.

(b") implique (d) grâce au théorème 3.1. En effet, si ν est la mesure induite dans un ouvert relativement compact Ω, on a pour tout sous-ouvert ω de Ω $\int_\omega d\nu = \int_\omega d\mu \in E$ (7).

---

(7) L'intégrale est prise ici, a priori, au sens faible de Bourbaki.

Enfin que (d) implique (a) découle facilement du théorème 3.1 et du lemme 3.4. Cela achève la démonstration du théorème.

Il résulte du théorème 1.11 que toute mesure à variation localement bornée est prolongeable et le théorème précédent montre qu'une mesure arbitraire à valeurs dans un espace réflexif est prolongeable. Au paragraphe 6 nous caractérisons les espaces de Banach E avec la propriété que toute mesure à valeurs dans E soit prolongeable. Il est clair également que toute mesure discrète est prolongeable, car lorsque T est discret, l'ensemble des fonctions boréliennes bornées à support compact se confond avec $\mathcal{K}$. Une mesure bornée faiblement compacte est prolongeable mais une mesure bornée prolongeable n'est pas en général faiblement compacte (exemple : L'identité de c_0, discret, est prolongeable et non faiblement compacte). De façon précise une mesure bornée est faiblement compacte si, et seulement si, elle est prolongeable et la fonction 1 appartient à $\mathcal{L}^1$.

Remarque. - On peut obtenir de meilleurs résultats que 4.2. Par exemple, on peut montrer que si pour tout G_δ compact K, on a $\int_K d\mu \in E$, la mesure μ est prolongeable.

THÉORÈME 4.3. - Soit μ une mesure prolongeable. Pour qu'une application f soit μ-mesurable, il faut et il suffit que f soit $\mu_{x'}$-mesurable pour tout $x' \in E'$, et il suffit déjà que ce soit le cas pour x' parcourant un sous-espace d'indice positif de E'.

Démonstration. - La condition est évidemment nécéssaire. Elle est suffisante : Soit K un compact, ω un voisinage ouvert relativement compact de K, et ν la mesure induite par μ dans ω. ν est faiblement compacte sur $\mathcal{C}_0(\omega)$ donc il résulte de 3.2 que la restriction de f à ω est ν-mesurable. Donc, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $K_1 \subset K$ telle que f/K_1 soit continue et que $\nu^\bullet(K - K_1) < \varepsilon$. Or d'après le lemme 3.4, $\nu^\bullet(K - K_1) = \mu^\bullet(K - K_1)$ donc f est μ-mesurable.

COROLLAIRE. - Pour qu'une mesure de Radon μ soit prolongeable, il faut et il suffit que les fonctions boréliennes soient μ-mesurables.

En effet, la condition est suffisante d'après le théorème 2.5 et nécessaire d'après le théorème 4.3.

THÉORÈME 4.4. - Soit μ une mesure prolongeable. Pour qu'un ensemble A soit μ-négligeable, il faut et il suffit que A soit $\mu_{x'}$-négligeable pour tout $x' \in E'$ et il suffit déjà que ce soit le cas pour x' parcourant un sous-espace d'indice positif de E'.

<u>Démonstration</u>. – La condition est toujours nécessaire. Pour la réciproque, on se ramène encore aux mesures bornées faiblement compactes (proposition 3.3) à l'aide du lemme 2.2 : A est μ-négligeable si $A \cap K$ est μ-négligeable quel que soit le compact K.

Les théorèmes 4.3 et 4.4 caractérisent les fonctions μ-mesurables (resp. μ-négligeables) en termes de fonctions scalairement μ-mesurables (resp. scalairement μ-négligeables). Voici un théorème caractérisant les fonctions μ-intégrables en termes de fonctions scalairement μ-intégrables.

THÉORÈME 4.5. – <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> prolongeable. <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$, <u>il faut et il suffit que</u> f <u>soit</u> $\mu_{x'}$<u>-intégrable pour tout</u> $x' \in E'$ <u>et que pour tout ouvert</u> ω <u>on ait</u> $\int_\omega f\, d\mu \in E$ [8].

<u>Démonstration</u>. – La condition est nécessaire car si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et si μ est prolongeable $gf \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour toute fonction borélienne bornée g (théorèmes 2.5 et 4.3) donc $\int gf\, d\mu \in E$ pour toute fonction borélienne bornée et cette intégrale est aussi l'intégrale faible (voir (1.12)).

La condition est suffisante : Montrons d'abord que $\int \varphi f\, d\mu \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques d'ouverts, muni de la norme uniforme. L'application $g \to \int gf\, d\mu$ de $\mathcal{E}$ dans E est bornée, car elle est faiblement bornée : pour tout $x' \in E'$

$$\sup_{\substack{|g| \leqslant 1 \\ g \in \mathcal{E}}} |\langle \int gf\, d\mu\,,\, x'\rangle| \leqslant \int |f|\, d|\mu_{x'}| < +\infty \quad .$$

Donc cette application peut être prolongée par continuité à $\bar{\mathcal{E}}$, l'adhérence de ε dans l'espace des fonctions bornées sur T, et cette adhérence contient évidemment $\mathcal{C}_0$. Le prolongement continu n'est autre que l'intégrale, donc

$$\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\mu \in E \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{C}_0 \quad .$$

La mesure bornée ν est en outre faiblement compacte sur $\mathcal{C}_0$ car précisément $\int_\omega d\nu = \int_\omega f\, d\mu \in E$. $\nu_{x'} = f.\mu_{x'}$ donc f, étant $\mu_{x'}$-mesurable quel que soit x', est aussi $\nu_{x'}$-mesurable quel que soit x' et par conséquent ν-mesurable ; plus précisément à tout $\varepsilon > 0$ correspond un compact K telle que $\nu^\bullet(T - K) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K soit continue (voir la proposition 3.2 et la remarque qui la suit). Pour ω ouvert, on a

$$\nu^\bullet(\omega) = \sup_{|x'| \leqslant 1} |\nu_{x'}|(\omega) = \sup_{|x'| \leqslant 1} \int |\chi_\omega f|\, d|\mu_{x'}| \quad .$$

---

(8) L'intégrale est prise ici, à priori, au sens faible de Bourbaki.

Considérons l'espace $\mathfrak{M}$ des fonctions g telles que g soit $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit x' et telles que $N(g) = \sup_{|x'|\leq 1} \int |g|\, d|\mu_{x'}|$ soit fini. $\mathcal{L}^1(\mu)$ est contenu dans $\mathfrak{M}$ et comme

$$\nu^\bullet(T - K) = N(f - \chi_K f) < \varepsilon$$

et que $\chi_K f$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$, nous voyons que f est adhérent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ dans l'espace $\mathfrak{M}$. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que $\mathcal{L}^1(\mu)$ est fermé dans $\mathfrak{M}$. L'injection de $\mathcal{L}^1(\mu)$ dans $\mathfrak{M}$ est isométrique (1.13) et $\mathcal{L}^1(\mu)$ est complet (1.8) donc si f est adhérent à $\mathcal{L}^1(\mu)$, sa distance à cet espace est nulle, i. e. il existe $f' \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $N(f - f') = 0$, c'est-à-dire telle que $f(t) = f'(t)$ $\mu_{x'}$ p. p. pour tout $x' \in E'$. Il résulte alors du théorème 4.4 que $f(t) = f'(t)$ μ p. p. donc que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

C. Q. F. D.

EXEMPLE 4.6 : <u>Mesures discrètes</u>. - Soient I un ensemble, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace de Banach E . On peut considérer la mesure "de masse x_i au point i " définie par $\mu(\varphi) = \sum_{i\in I} \varphi(i)\, x_i$, $\varphi \in \mathcal{K}(I)$. Une telle mesure est évidemment prolongeable donc d'après le théorème 4.5 $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions f telles que pour toute partie $J \subset I$ la famille $(f(i)x_i)_{i\in J}$ soit faiblement sommable dans E . Il résulte du théorème d'Orlicz que la famille $(f(i)x_i)_{i\in I}$ est alors fortement sommable dans E ce qui inversement entraîne que les sous-familles sont sommables. $\mathcal{L}^1(\mu)$ est donc l'ensemble des fonctions f telles que $(f(i)x_i)_{i\in I}$ soit sommable dans E , et on a alors $\int_\omega f\, d\mu = \sum_{i\in\omega} f(i)x_i$.

On peut voir ainsi que dans le théorème 4.5, il ne suffit pas de supposer simplement que $\int f\, d\mu$ appartienne à E car dans certains espaces E on peut trouver une suite faiblement sommable dont les sous-suites ne sont pas toutes faiblement sommables. Par exemple, soient $E = c_0$, $e_n = (\delta_{n,p})_p$ le n-ième élément de la base canonique. Alors dans $\ell^\infty = c_0''$, $1 = \sum e_n$ pour la topologie $\sigma(\ell^\infty , \ell')$ donc si l'on pose $x_{2p} = e_p$, $x_{2p+1} = - e_p$, on aura $\sum_n x_n = 0 \in E$, $\sum_{n \text{ pair}} x_n \notin E$. Si μ est la mesure de masse x_n au point n la fonction 1 est scalairement μ-intégrable, son intégrale faible appartient à E mais cette fonction n'appartient pas à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Cependant, on peut bien améliorer le théorème 4.5. Par exemple, au lieu de supposer $\int_A f\, d\mu \in E$ pour tout fermé A (ce qui équivaut manifestement à l'hypothèse faite), il suffira d'avoir ceci pour tout fermé G_δ . Dans une autre direction on a une amélioration du théorème 4.5 en réduisant la partie utile du dual de E . Soit F un sous-espace de E' séparant E . Soit f une fonction $\mu_{x'}$-intégrable quel que soit $x' \in F$. Nous notons $F - \int f\, d\mu$ la forme linéaire

$x' \to \int f\, d\mu_{x'}$ sur F, et nous identifions E à un sous-espace de F^*. Alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.5 bis. - Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace de Banach E. Soit F un sous-espace de E' d'indice positif et ayant la propriété d'Orlicz (9). Pour qu'une fonction f appartienne à $\mathcal{L}^1(\mu)$ il faut et il suffit que f soit $\mu_{x'}$-intégrable pour chaque $x' \in F$ et que pour tout ouvert ω on ait $F - \int_\omega f\, d\mu \in E$.

Pour la démonstration de ce théorème on peut se ramener au cas où F est fermé, et appliquer ensuite sans modifications importantes la démonstration donnée pour le théorème 4.5.

5. Théorèmes de convergence.

THÉORÈME 5.1. - Soit μ une mesure de Radon. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement appartenant à $\mathcal{L}^1(\mu)$ et supposons que la borne supérieure f des f_i appartienne à $\mathcal{L}^1(\mu)$. Alors f_i tend vers f dans l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$, en particulier $\int f_i\, d\mu$ tend vers $\int f\, d\mu$.

Remarque. - On verra au numéro 6 que si par exemple l'espace E est réflexif ou faiblement sequentiellement complet, la fonction f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ dès que $\mu^\bullet(f) = \sup_i \mu^\bullet(f_i)$ est fini. Mais en général, il ne suffit pas de supposer $\mu^\bullet(f) < +\infty$, même lorsque μ est une mesure bornée compacte. Soit par exemple μ l'application compacte de c_0 dans c_0 définie par $\mu(\varphi) = h\varphi$ où $h(i) = \frac{1}{i}$ (ou $\frac{1}{i^2}$ si l'on veut avoir une mesure à variation bornée). Pour $f \geqslant 0$, $\mu^\bullet(f) = \sup_i h(i)\, f(i)$; $\mathcal{L}^1(\mu) = \{f : hf \in c_0\}$. Si $f(i) = \frac{1}{h(i)}$, $\mu^\bullet(f) = 1$, $f_n = \inf(f, n) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mais $\mu^\bullet(f - f_n) = 1$ quel que soit n.

LEMME 5.2. - Le dual de $\mathcal{L}^1(\mu)$ s'identifie à l'ensemble des mesures réelles α telles qu'il existe une constante M vérifiant $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$. La boule unité B du dual s'identifie à l'ensemble des mesures α telles que $\alpha^\bullet \leqslant \mu^\bullet$ et pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$\mu^\bullet(|f|) = \sup_{\alpha\in B^+} \int |f|\, d\alpha . \tag{5.3}$$

En effet, si $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$, on sait (1.11) que $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\alpha)$ et

(9) Nous dirons que F possède la propriété d'Orlicz lorsque toute suite d'éléments de E dont les sous-suites sont $\sigma(E, F)$ sommables dans E, est en fait fortement sommable dans E. (Voir aussi [11].)

$|\int f\, d\alpha| \leqslant \alpha^\bullet(|f|) \leqslant M\mu^\bullet(|f|)$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ de sorte que $f \to \int f\, d\alpha$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. Inversement soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. L'injection $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ étant continue, la restriction de L à $\mathcal{K}$ est une mesure de Radon, soit α , et comme par hypothèse

$$|\alpha(\varphi)| \leqslant M\mu^\bullet(|\varphi|) \qquad \text{pour } M \geqslant 0 \quad ,$$

On a $\alpha^\bullet \leqslant M\mu^\bullet$. Soit alors L_α la forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ déduite de α comme dans la première partie. L et L_α sont continues et coïncident sur $\mathcal{K}$, sous-espace dense de $\mathcal{L}^1$, donc $L = L_\alpha$. Il est clair que la boule unité B du dual est constituée des mesures α telles que $\alpha^\bullet \leqslant \mu^\bullet$ donc on a $\mu^\bullet(|f|) = \sup\limits_{\alpha\in B} |\int f\, d\alpha|$ mais $|\alpha|^\bullet = \alpha^\bullet$ donc si $\alpha \in B$, $|\alpha| \in B$ comme $|\int f\, d\alpha| \leqslant \int |f|\, d|\alpha| \leqslant \mu^\bullet(|f|)$ on a aussi $\mu^\bullet(|f|) = \sup\limits_{\alpha\in B^+} \int |f|\, d\alpha$ où B^+ est l'ensemble des $\alpha \geqslant 0$ appartenant à B .

Démontrons maintenant le théorème 5.1. On sait que B ,donc aussi B^+, est compact pour la topologie $\sigma(B , \mathcal{L}^1)$, et d'autre part on sait que f et f_i étant les fonctions de l'énoncé

$$\int f\, d\alpha = \sup_i \int f_i\, d\alpha = \lim_i \int f_i\, d\alpha \qquad \alpha \in B_+ \quad ,$$

la limite étant prise suivant l'ensemble filtrant croissant des f_i . Comme f et f_i appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ les applications $\alpha \to \int f\, d\alpha$ et $\alpha \to \int f_i\, d\alpha$ sont continues sur B_+ muni de la topologie $\sigma(B_+ , \mathcal{L}^1)$. Il s'ensuit d'après le lemme de Dini que la limite ci-dessus est uniforme par rapport à $\alpha \in B_+$ donc $\lim\limits_i \mu^\bullet(f - f_i) = \lim\limits_i \sup\limits_{\alpha\in B_+} \int (f - f_i)\, d\alpha = 0$.

C. Q. F. D.

Remarque. - Le lemme de Dini classique est en fait un cas particulier du théorème 5.1, obtenu en prenant pour μ l'application identique de $\mathcal{C}(K)$..

THÉORÈME 5.4 (EGOROFF). - *Soit μ une mesure prolongeable à valeurs dans un espace normé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions μ-mesurables à valeurs dans un espace métrique, convergeant μ-presque-partout vers une fonction f . Alors à tout compact $K \subset T$ et à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un compact $K_1 \subset K$ avec $\mu^\bullet(K - K_1) < \varepsilon$, tel que les restrictions des f_n à K_1 soient continues et que f_n converge vers f uniformément sur K_1 .*

Démonstration. - Soit K donnée et soit ω un voisinage ouvert relativement compact de K . Soit ν la mesure bornée induite par μ dans ω . Pour tout

$K_1 \subset K$, $\nu^\bullet(K - K_1) = \mu^\bullet(K - K_1)$ (cf. lemme 3.4) donc il suffit de montrer le théorème dans le cas d'une mesure bornée faiblement compacte. Dans ce cas, il existe une mesure positive λ telle que les f_n soient λ-mesurables et telle que $\lim_{\lambda(A)\to 0} \mu^\bullet(A) = 0$ (voir proposition 3.2). On est donc ramené au théorème d'Egoroff classique ([2], chapitre 4).

En particulier, la fonction limite f est aussi μ-mesurable (ce qui résulte aussi du théorème 4.3).

Dans l'énoncé du lemme suivant, nous dirons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ tend "en mesure sur tout compact" vers une fonction f lorsque pour tout compact $K \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$ la suite $\mu^\bullet\{t \in K : |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ tend vers zéro.

LEMME 5.5. - <u>Soit</u> $(f_n)_{n\in N}$ <u>une suite de fonctions appartenant à</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$, <u>et supposons que</u> f_n <u>tende "en mesure sur tout compact" vers une fonction</u> f . <u>Alors s'il existe</u> $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ <u>telle que</u> $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ μ p. p. <u>pour tout</u> n , <u>la fonction</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^1$ <u>et</u> $\mu^\bullet(|f - f_n|)$ <u>tend vers zéro</u>.

Montrons d'abord que $|f(t)| \leqslant g(t)$ μ p. p. Il suffit de montrer que l'inégalité a lieu presque-partout sur tout compact K . Soit $A_n = \{t : |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon\}$. Pour $t \in K - A_n$, $|f(t)| \leqslant \varepsilon + |f_n(t)| \leqslant \varepsilon + g(t)$ μ p. p. $\mu^\bullet(K \cap A_n)$ tend vers zéro donc $|f(t)| \leqslant \varepsilon + g(t)$ μ p. p. sur K et, ε étant arbitraire, $|f(t)| \leqslant g(t)$ μ p. p. sur K . Soit alors $\varepsilon > 0$ donnée, et cherchons N telle que $n \geqslant N$ implique $\mu^\bullet(|f - f_n|) \leqslant 5\varepsilon$. Soit K un compact tel que $\mu^\bullet(\chi_{\complement K}\, g) \leqslant \varepsilon$ (lemme 2.7). Soit $A_n = \{t : |f_n(t) - f(t)| \geqslant \varepsilon/\mu^\bullet(K)\}$

$$\mu^\bullet(|f - f_n|) \leqslant \mu^\bullet(\chi_{\complement K}\, |f - f_n|) + \mu^\bullet(\chi_{K\cap A_n}\, |f - f_n|) + \mu^\bullet(\chi_{K-A_n}\, |f - f_n|)$$

$$\leqslant 2\mu^\bullet(\chi_{\complement K}\, g) + 2\mu^\bullet(\chi_{K\cap A_n}\, g) + \varepsilon\, \frac{\mu^\bullet(K - A_n)}{\mu^\bullet(K)}$$

comme $\mu^\bullet(K \cap A_n)$ tend vers zéro, on peut, d'après le lemme 2.6, trouver N telle que $\mu^\bullet(\chi_{K\cap A_n}\, g) \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Pour ces n on a bien $\mu^\bullet(|f - f_n|) \leqslant 5\varepsilon$. Cela prouve aussi que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ donc le lemme est démontré.

THÉORÈME 5.6 (de convergence dominée). - <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> prolongeable <u>et soit</u> $(f_n)_{n\in N}$ <u>une suite de fonctions</u> μ<u>-intégrables et convergeant</u> μ<u>-presque-partout vers une fonction</u> f . <u>Alors s'il existe</u> $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ <u>telle que</u> $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ μ p. p. <u>pour tout</u> n , <u>la fonction</u> f <u>est</u> μ<u>-intégrable et</u> f_n <u>tend vers</u> f <u>dans</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$, <u>notamment</u> $\int f_n\, d\mu$ <u>tend vers</u> $\int f\, d\mu$ <u>dans</u> E .

<u>Démonstration</u>. - D'après le lemme ci-dessus, il suffit de prouver que pour une mesure prolongeable la convergence presque-partout entraîne la convergence "en

mesure sur tout compact". Cela résulte du théorème d'Egoroff (5.4). Soit K un compact et soit $A_n = \{t : |f_n(t) - g(t)| \geqslant \varepsilon\}$, montrons que pour n assez grand $\mu^\bullet(K \cap A_n) < \eta$, $\eta > 0$ étant donnée. Il existe un compact $K_1 \subset K$ tel que $\mu^\bullet(K - K_1) < \eta$ et tel que f_n tende vers f uni ormément sur K_1 . Soit N alors tel que $n \geqslant N$ implique $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in K_1$. Alors pour $n \geqslant N$, $A_n \cap K_1 = \emptyset$ donc $A_n \cap K \subset K - K_1$ de sorte que $\mu^\bullet(A_n \cap K) < \eta$.

L'énoncé suivant montre que les mesures prolongeables sont les seules pour lesquelles le théorème de convergence dominée est valable et d'autre part qu'on ne peut espérer avoir le théorème de convergence dominée pour une classe de fonctions plus vaste que $\mathcal{L}^1(\mu)$.

PROPOSITION 5.7.

(a) Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach E , avec la propriété que pour chaque suite $(\varphi_n)_{n \in N}$ de fonctions continues à support compact tendant vers zéro simplement et majorée en module par une fonction fixe de $\mathcal{K}$, la suite $\mu(\varphi_n)$ tende vers zéro dans E . Alors μ est prolongeable.

(b) Soit μ une mesure prolongeable et soit f une fonction scalairement μ-intégrable telle que la fonction d'ensemble borélien $A \to \int_A f\, d\mu$ soit dénombrablement additive dans E'' (muni de la norme). Alors f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$.

En effet, (a) découle du lemme suivant, qui a un intérêt en lui-même :

LEMME 5.8. - Soit $\mu : \mathcal{C}_0 \to E$ une mesure bornée. Pour que μ soit faiblement compact, il faut et il suffit que pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in N}$ d'éléments de $\mathcal{C}_0$, uniformément bornée et tendant vers zéro simplement, la suite $\mu(\varphi_n)$ tend vers zéro.

En effet par dualité ce lemme équivaut à un critère de compacité faible dans l'espace $M = \mathcal{C}_0'$, de Grothendieck ([4], p. 147), selon lequel un ensemble borné $H \subset M$ est faiblement relativement compact si, et seulement si, $\alpha(\varphi_n)$ tend vers zéro uniformément par rapport à $\alpha \in H$. Il suffit de prendre ici $H = \{\mu_{x'}\}_{|x'| \leq 1}$.

En appliquant ce lemme aux mesures induites par la mesure μ dans chaque ouvert relativement compact, on déduit immédiatement l'assertion (a) de 5.7 (voir le théorème 4.2, condition (d)).

Pour prouver (b), remarquons d'abord que si μ est prolongeable, on a bien $\int f\, d\mu \in E''$ pour toute fonction scalairement μ-intégrable (voir BOURBAKI [2], chapitre 6). Supposons que la fonction d'ensemble $A \to \int_A f\, d\mu$ soit dénombrablement additive. La fonction f étant $\mu_{x'}$-mesurable pour tout x' , f est

μ-mesurable (théorème 4.3). Soit K un compact. Alors $K = \sum_n K_n + N$ où f/K_n est continue et N est μ-négligeable. $\chi_{K_n} f$ étant borélienne bornée à support compact appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ donc $\int_{K_n} f\, d\mu \in E$. Dans E''

$$\int_K f\, d\mu = \int_{\sum_n K_n} f\, d\mu = \sum_n \int_{K_n} f\, d\mu$$

et E étant fermé dans E'' , on a $\int_K f\, d\mu \in E$. Plus généralement si A est un borélien contenu dans K , on aura $\int_A f\, d\mu = \sum_n \int_{A\cap K_n} f\, d\mu \in E$, et si A est contenu dans une réunion dénombrable de compacts $A = \sum A_n$, A_n relativement compact et $\int_A f\, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f\, d\mu \in E$. Plus généralement, pour toute fonction en escalier borélienne, g , nulle hors d'une réunion dénombrable de compacts, on aura $\int gf\, d\mu \in E$ et un argument de continuité simple montre que c'est encore vrai pour des fonctions boréliennes bornées quelconques nulles hors d'une réunion dénombrable de compacts, en particulier pour les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}_0$. Alors $\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\mu \in E$ et ν est une mesure de Radon bornée. ν est même faiblement compacte ; $\nu_{x'} = f.\mu_{x'}$ et l'hypothèse entraîne que les $\nu_{x'}$ avec $|x'| \leq 1$ sont uniformément σ-additive. Cela entraîne (voir [3], IV, 9.1) que l'ensemble des $\nu_{x'}$ avec $|x'| \leq 1$ est faiblement compact dans $M = \mathcal{C}'_0$ donc que ν est faiblement compacte. On a donc $\nu(\omega) = \int_\omega f\, d\mu \in E$ pour tout ouvert ω et cela entraîne que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après 4.5.

Le théorème suivant permet entre autre de faire le lien avec la théorie d'intégration d'après BARTLE, DUNFORD et SCHWARTZ [1] et [3] (IV, 10).

THÉORÈME 5.9. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> prolongeable, <u>à valeurs dans un espace de Banach. Soit</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de fonctions appartenant à</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$ <u>et convergeant</u> μ-<u>presque-partout vers une fonction</u> f . <u>Alors si la suite</u> $\int_\omega f_n\, d\mu$ <u>converge</u> <u>(faiblement) dans</u> E <u>quel que soit l'ouvert</u> $\omega \subset T$, <u>la fonction</u> f <u>appartient à</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$ <u>et</u> $\lim_n \int_\omega f_n\, d\mu = \int_\omega f\, d\mu$.

<u>Démonstration</u>. - Ce théorème est bien connu dans le cas de mesures scalaires. f est donc faiblement μ-intégrable et $\lim_n \int_\omega f\, d\mu = \int_\omega f\, d\mu$ dans E'^* pour la topologie $\sigma(E'^*, E')$. Comme la limite existe par hypothèse dans E , on a $\int_\omega f\, d\mu \in E$ donc f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après le théorème 4.5.

Nous mentionnons sans démonstration le théorème suivant :

THÉORÈME. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> prolongeable <u>à valeurs dans un espace de Banach</u> E . <u>Soit</u> $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de fonctions</u> μ-<u>intégrables et supposons que pour</u>

<u>chaque ouvert</u> ω <u>la suite</u> $\int_\omega f_n \, d\mu$ <u>converge dans</u> E . <u>Alors il existe</u> $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ <u>telle que</u> $\lim_n \int_\omega f_n \, d\mu = \int_\omega f \, d\mu$.

<u>Remarque</u>. - Dans le théorème 5.9 et le théorème ci-dessus on aura en fait $\lim_n \int gf_n \, d\mu = \int gf \, d\mu$ pour toute fonction borélienne bornée g (cf. [11]).

Faisons ici la comparaison avec la théorie d'intégration d'après BARTLE, DUNFORD et SCHWARTZ [1], [3] (IV, 10). Ces auteurs partent d'une fonction dénombrablement additive d'ensemble définie sur un σ-algèbre, donc la comparaison ne s'impose ici que dans le cas d'une mesure bornée. Soit μ une mesure de Radon bornée à valeurs dans un espace de Banach. Soit, pour A borélien, $m(A) = \int_A d\mu$. $m(A)$ appartient à E" . Si m est σ-additive, l'ensemble $\{\mu_{x'}\}_{|x'| \leqslant 1}$ est uniformément σ-additive donc faiblement compact, donc μ est faiblement compact, et m est alors à valeurs dans E . Dans ce cas $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout borélien A et $\mu^\bullet(A) = \sup_{|x'| \leqslant 1} |\mu_{x'}|(A)$ ce qui est précisément la semi-variation de A au sens de BARTLE, DUNFORD et SCHWARTZ. La notion d'ensemble négligeable est donc la même. Comme les fonctions en escalier boréliennes appartiennent à $\mathcal{L}^1(\mu)$ le théorème 5.9 montre que toute fonction intégrable pour m (limite presque-partout d'une suite de fonctions en escalier f_n telle que $\int_A f_n \, dm$ converge pour tout A) est μ-intégrable. Réciproquement, comme les fonctions en escalier boréliennes sont denses dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est limite dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ et aussi presque-partout d'une suite de fonctions en escalier boréliennes donc est aussi intégrable pour m .

La présente méthode de définition de $\mathcal{L}^1(\mu)$ pour une mesure de Radon suggère d'ailleurs l'approche suivant à la théorie de l'intégration par rapport à une mesure ensembliste m , définie sur un σ-algèbre ou σ-clan $\mathfrak{A}$. Pour une fonction positive f , mesurable par rapport à $\mathfrak{A}$, on définit

$$m^\bullet(f) = \sup_{|\varphi| \leqslant f} |m(\varphi)|$$

où φ est une fonction en escalier. Pour $f > 0$ arbitraire, on pose $m^\bullet(f) = \inf_{f \leqslant g} m^\bullet(g)$ où g est mesurable, et on complète l'espace des fonctions en escalier pour la semi-norme $\varphi \rightarrow m^\bullet(|\varphi|)$. Nous ne détaillons pas ce point de vue ici.

<u>Remarque</u>. - Comme dans la théorie d'intégration de Bartle, Dunford et Schwartz, on n'a pas mis de structure d'espace normée sur L^1 , leur énoncé du théorème de convergence dominée est moins précis que le nôtre, mais, une fois qu'on a défini L^1 avec sa norme, on obtient le résultat plus fort en écrivant le résultat plus faible pour la "mesure canonique" $A \rightarrow \chi_A$ à valeurs dans $\mathcal{L}^1$ (ou L^1) qui a même espace $\mathcal{L}^1$ que la mesure donnée.

6. Mesures à valeurs dans des espaces d'un type particulier.

PROPOSITION 6.1. - Soit E un espace de Banach. Les propriétés suivantes de E sont équivalentes :

(a) Toute mesure de Radon à valeurs dans E est prolongeable.

(b) Toute mesure définie dans un espace compact à valeurs dans E est faiblement compacte (i. e. toute application linéaire continue d'espace $\mathcal{C}(K)$ dans E est faiblement compacte).

(c) Toute mesure bornée à valeurs dans E est faiblement compacte (sur $\mathcal{C}_0$).

Démonstration. - (a) implique (b) d'après le théorème 4.2.

(b) implique (c) : Il suffit de prolonger la mesure bornée sur $\mathcal{C}_0(T)$ à l'espace $\mathcal{C}(T')$ (T' compactifié d'Alexandroff de T) en la composant avec la projection canonique de $\mathcal{C}(T')$ sur $\mathcal{C}_0(T)$.

(c) implique (a) d'après le théorème 4.2 (condition (d) de la démonstration).

Considérons en particulier la mesure discrète de masse x_n au point n de $\underset{\sim}{N}$. Cette mesure est bornée si, et seulement si, elle est faiblement bornée, i. e. si

$$\sum_n |\langle x_n , x'\rangle| < +\infty \qquad \forall\, x' \in E' .$$

Si E possède les propriétés de 6.1, cette mesure est donc faiblement compacte, ce qui entraîne que $\sum_n x_n$ (définie dans E'') appartient à E . Vu l'importance de cette propriété, nous lui donnons un nom.

DÉFINITION 6.2. - Nous dirons qu'un espace localement convexe E est faiblement Σ-complet lorsqu'il possède la propriété suivante :

(Σ) A toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de points de E telle que $\sum_n |\langle x_n , x'\rangle| < +\infty$ quel que soit $x' \in E'$, on peut associer $x \in E$ telle que

$$\langle x , x'\rangle = \sum_n \langle x_n , x'\rangle \qquad \text{pour tout } x' \in E' .$$

THÉORÈME 6.3. - Soit E un espace de Banach [10]. Pour qu'une mesure bornée arbitraire à valeurs dans E soit faiblement compacte, il faut et il suffit que E soit faiblement Σ-complet.

Autrement dit, la condition (Σ) équivaut encore aux propriétés (a), (b), (c) de la proposition 6.1.

---

[10] Nous nous sommes limités ici aux espaces de Banach mais ce résultat est également valable pour un espace localement convexe quasi-complet.

Démonstration. - La condition est nécessaire d'après les remarques précédent la définition 6.2. Inversement, soit E un espace de Banach faiblement Σ-complet et $\mu : \mathcal{C}_0(T) \to E$ une mesure bornée. D'après le théorème d'Eberlein μ est faiblement compacte si, et seulement si, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in N}$ d'éléments de $\mathcal{C}_0$ avec $|\varphi_n| \leqslant 1$, la suite $\mu(\varphi_n)$ possède une valeur d'adhérence faible. Or la suite est contenue dans un sous-espace $\mathcal{C}_0(T_1)$ où T_1 est un quotient métrisable de T (par exemple l'image de T par l'application $t \to \{\varphi_n(t)\}_{n\in \underset{\sim}{N}}$ à valeurs dans $\underset{\sim}{R}^{\underset{\sim}{N}}$, qui est bien localement compact). Il suffit donc de montrer que la restriction de μ à $\mathcal{C}_0(T_1)$ est faiblement compacte de sorte qu'on est ramené au cas où T est métrisable. D'après le théorème 3.1, il suffit de montrer que $\int_\omega d\mu$ appartient à E pour tout ouvert ω. Or T étant métrisable, χ_ω est la somme d'une suite de fonctions continues à support compact :

$$\chi_\omega(t) = \sum_n \varphi_n(t) \qquad \varphi_n \in \mathcal{K}_+ , \quad t \in T ,$$

de sorte que

$$\langle \int_\omega d\mu , x' \rangle = \int_\omega d\mu_{x'} = \sum_n \int \varphi_n \, d\mu_{x'} = \sum_n \langle \mu(\varphi_n) , x' \rangle$$

avec

$$\sum_n |\langle \mu(\varphi_n) , x' \rangle| \leqslant \int_\omega d|\mu_{x'}| < +\infty \quad .$$

E étant faiblement Σ-complet, on a bien $\int_\omega d\mu \in E$.

Soit maintenant E un espace de Banach faiblement Σ-complet et soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite arbitrarre dans E. Alors, si f est une fonction telle que $\sum_n |f(n)\langle x_n , x'\rangle| < +\infty$ pour tout x', la série $\sum_n f(n)\, x_n$ converge dans E.

Plus généralement :

THÉORÈME 6.4. - Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach faiblement Σ-complet E. Alors si f est une fonction scalairement μ-intégrable $\int f \, d\mu$ appartient à E.

Démonstration. - D'après les théorèmes 6.4 et 6.1, μ est prolongeable, donc si f est bornée à support compact, on a bien $\int f \, d\mu \in E$ (par le théorème du bipolaire ou en remarquant que f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après les théorèmes 2.5 et 4.3). Supposons ensuite f à support compact, et (ce qui ne restreint pas la généralité) $f \geqslant 0$. Alors si $f_n = \inf(f , n)$, $\int f_n \, d\mu \in E$ et

$$\langle \int f \, d\mu , x' \rangle = \sum_{n\geqslant 0} \langle \int (f_{n+1} - f_n) \, d\mu , x' \rangle \qquad \forall x' \in E' ,$$

avec $\sum_{n\geqslant 0} |\langle \int (f_{n+1} - f_n)\, d\mu\, , x'\rangle| \leqslant \int f\, d|\mu_{x'}| < +\infty$ de sorte que $\int f\, d\mu$ appartient à E . Enfin, si l'on ne fait plus de restriction sur f , le raisonnement précédent appliqué à φf montre que $\nu(\varphi) = \int \varphi f\, d\mu$ appartient à E pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. Pour chaque $x' \in E'$, on a

$$\sup_{|\varphi|\leqslant 1} |\langle \nu(\varphi)\, , x'\rangle| \leqslant \int |f|\, d|\mu_{x'}| < +\infty\, ,$$

donc ν est une mesure bornée à valeurs dans E (on la prolonge immédiatement à $\mathcal{C}_0$). En appliquant de nouveau le théorème 6.3 à la mesure ν , on voit que celle-ci est faiblement compacte, donc (théorème 3.1) que $\int d\nu = \int f\, d\mu$ appartient à E.

COROLLAIRE 6.5. - Sous les hypothèses du théorème 6.4, toute fonction scalairement μ-intégrable est μ-intégrable.

En effet, si f est scalairement μ-intégrable, il en est de même de $\chi_\omega f$ pour tout ouvert, donc $\int_\omega f\, d\mu \in E$. μ étant prolongeable (théorèmes 6.1, 6.3), f appartient à $\mathcal{L}^1(\mu)$ d'après le théorème 4.5.

COROLLAIRE 6.6. - Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans un espace de Banach faiblement Σ-complet. Alors $\mathcal{L}^1(\mu)$ est identique à l'ensemble des fonctions (scalairement) μ-mesurables f , telles que $\mu^\bullet(|f|) < +\infty$.

En effet, si f est $\mu_{x'}$-mesurable, l'inégalité

$$|\mu_{x'}|^\bullet(|f|) \leqslant |x'|\ \mu^\bullet(|f|) < +\infty$$

montre que f est alors $\mu_{x'}$-intégrable.

Comme exemple d'espace faiblement Σ-complet, on a évidemment les espaces faiblement séquentiellement complets (en particulier les espaces réflexifs) de sorte que les théorèmes 6.3, 6.1 précisent un résultat connu ([3], VI, 7.6).

On sait que lorsque μ est une mesure scalaire, l'espace $L^1(\mu)$ est faiblement séquentiellement complet et on démontre que plus généralement si μ est une mesure à valeurs dans un Banach faiblement Σ-complet, l'espace $L^1(\mu)$ est faiblement séquentiellement complet, et a fortiori faiblement Σ-complet. (En appliquant cela à la "mesure canonique" $\mathcal{K} \to L^1(\mu)$, on voit que pour les espaces, $L^1(\mu)$ faiblement Σ-complet équivaut à faiblement séquentiellement complet.)

L'espace $M = \mathcal{C}_0'$ (isomorphe à un espace $L^1(\mu)$, μ scalaire) est faiblement séquentiellement complet. C'est en utilisant cela que l'on peut, moyennant les notions de cet exposé, retrouver et préciser les résultats essentiels de MORSE et TRANSUE [5] sur les bimesures.

Tout dual séparable d'espace de Banach est faiblement Σ-complet. (Mieux même : pour que la série $\sum_n x'_n$ converge dans E', il suffit déjà que $\sum_n |\langle x'_n , x\rangle| < +\infty$ pour tout $x \in E$.) En effet, E' étant séparable, E possède dans E'' la propriété d'Orlicz (cf. [11]), mais ce résultat se trouve déjà dans un article de PHILLIPS ([7], p. 530), car il est évident qu'il est équivalent de dire que E est faiblement Σ-complet ou de dire que toute application linéaire continue d'espace c_0 dans E est compacte (11).

Dans la terminologie de Grothendieck le dual d'un espace de Fréchet jouissant de la propriété R.D.-P. est faiblement Σ-complet ([4], p. 157).

EXEMPLE 6.7 : Mesures à valeurs dans ℓ^1. - Soit $\mu : \mathcal{K} \to \ell^1(I)$ une mesure de Radon à valeurs dans $\ell^1(I)$. Notons e'_i la forme coordonnée $x \to x_i$ sur ℓ^1 et $\mu_i = e'_i \circ \mu = \mu_{e_i}$. On a donc $\mu(\varphi) = \{\mu_i(\varphi)\}_{i\in I}$ avec $\sum_{i\in I} |\mu_i(\varphi)| < +\infty$.

Inversement toute famille vaguement sommable de mesures de Radon réelles donne lieu ainsi à une mesure vectorielle. Si f est une fonction μ-intégrable

$$\langle e'_i , \int f\, d\mu\rangle = \int f\, d\mu_i \qquad \text{donc} \qquad \int f\, d\mu = \{\int f\, d\mu_i\}_{i\in I} .$$

Comme ℓ^1 est faiblement séquentiellement complet, la mesure μ est prolongeable donc d'après le théorème 4.3 et le théorème 4.4 une fonction est μ-mesurable (resp. μ-négligeable) si, et seulement si, il est μ_i-mesurable (resp. μ_i-négligeable) pour chaque i. Il résulte du théorème 4.5 bis que f est μ-intégrable. si, et seulement si, f est μ_i-intégrable pour chaque i et $\sum_{i\in I} |\int_\omega f\, d\mu_i|$ est fini quel que soit l'ouvert ω.

ℓ^1 étant faiblement séquentiellement complet, il revient au même que $\sum_{i\in I} |\int \varphi f\, d\mu_i|$ soit fini pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$. D'autre part, il résulte du corollaire 6.5 que $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'ensemble des fonctions scalairement μ-intégrables, mais cela peut être amélioré : Soit pour $J \subset I$, $\mu_J(\varphi) = \sum_{i\in J} \mu_i(\varphi)$. Alors f est μ-intégrable si, et seulement si, f est μ_J-intégrable pour chaque $J \subset I$. Cela résulte du fait que ℓ^1 est déjà séquentiellement complet pour la topologie $\sigma(\ell^1 , \chi)$, χ étant l'ensemble des fonctions caractéristique d'ensemble. Ainsi μ étant une mesure de Radon à valeurs dans ℓ^1 les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est μ-intégrable.

(b) f est μ_J-intégrable pour chaque $J \subset I$.

(c) f est μ_i-intégrable pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I} |\int_\omega f\, d\mu_i| < +\infty$ où

(c') $\sum_{i\in I} |\int \varphi f\, d\mu_i| < +\infty$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0$.

---

(11) Les applications linéaires compactes et faiblement compactes définies sur c_0 sont les mêmes.

Dans ce cas, on a $\langle \int f\, d\mu , x' \rangle = \int f\, d\mu_{x'}$ pour tout $x' \in \ell^\infty$, notamment

$$\int f\, d\mu_J = \sum_{i\in J} \int f\, d\mu \quad .$$

Ainsi pour qu'une fonction f vérifie la relation ci-dessus pour chaque J , il suffit déjà que les membres de gauche aient un sens, et pour que

$$\int_\omega f\, d\mu_I = \sum_{i\in I} \int_\omega f\, d\mu_i$$

pour tout ouvert ω , il suffit déjà que les membres de droite aient un sens. (La symétrie de ces deux conditions devient complète dans l'étude de bimesures dont ceci est un cas particulier.)

7. Mesures à valeurs dans un espace localement convexe.

Le but de ce paragraphe est d'indiquer brièvement comment nous étendons les définitions et propositions précédentes au cas de mesures à valeurs dans un espace localement convexe séparé E . Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E . Soit p une semi-norme continue sur E (nous notons $p(x) = |x|_p$). La semi-variation de μ par rapport à p est définie pour $f \in \mathcal{J}^+$ par

$$\mu_p^\bullet(f) = \sup_{|\varphi|\leq f} |\mu(\varphi)|_p$$

et on complète la définition comme dans le cas d'un espace normé.

Soit E_p l'espace de Banach associé à p (le complété de l'espace normé $E/p^{-1}(0)$). Soit $\pi_p : E \to E_p$ l'application canonique de E dans E_p , et posons $\mu_p = \pi_p \circ \mu$. Alors dans E_p , $|\mu_p(\varphi)| = |\mu(\varphi)|_p$ de sorte que $\mu_p^\bullet$ (définie ci-dessus) est précisément la semi-variation de μ_p . Soit $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$ l'ensemble de fonctions réelles f telles que $\mu_p^\bullet(|f|) < +\infty$ pour toute semi-norme continue p . Alors $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}^\bullet(\mu)$, et nous posons

DÉFINITION 7.1. - $\mathcal{L}^1(\mu)$ est l'adhérence de $\mathcal{K}(T)$ dans l'espace $\mathcal{F}^\bullet(\mu)$.

$\mathcal{L}^1(\mu)$ est donc un espace localement convexe, on a $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_p \mathcal{L}^1(\mu_p)$ et la topologie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est la moins fine rendant continues les injections $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu_p)$. De même, nous dirons qu'une fonction est μ-mesurable s'il est μ_p-mesurable pour tout p et qu'un ensemble est μ-négligeable s'il est μ_p-négligeable pour chaque p . Avec ces définitions, on a la proposition suivante qui remplace en pratique les définitions ci-dessus et évite d'avoir à considérer toutes les semi-normes continues :

PROPOSITION 7.2. - Soit E un espace localement convexe dont la topologie est la moins fine rendant continues les applications u_i à valeurs dans des espaces localement convexes E_i . Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E et soit $\mu_i = u_i \circ \mu$. Alors $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_i \mathcal{L}^1(\mu_i)$ et la topologie de $\mathcal{L}^1(\mu)$ est la moins fine rendant continues les injections $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1(\mu_i)$. Une fonction f est μ-mesurable (resp. négligeable) si, et seulement si, elle est μ_i-mesurable (resp. négligeable) pour chaque i .

Comme $|\mu(\varphi)|_p \leqslant \mu_p^\bullet(|\varphi|)$, μ est continue lorsque $\mathcal{K}$ est muni de la topologie induite par $\mathcal{L}^1(\mu)$. L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, notée $\mu(f)$ ou $\int f\, d\mu$ est par définition la valeur en f du prolongement continu de μ à $\mathcal{L}^1(\mu)$. C'est donc un élément du complété $\hat{E}$ de E . On a la proposition suivante :

PROPOSITION 7.3. - Soit u une application linéaire continue de E dans F . Soit μ une mesure de Radon à valeurs dans E et soit $\nu = u \circ \mu$. Alors $\mathcal{L}^1(\mu)$ est contenue dans $\mathcal{L}^1(\nu)$ et l'injection est continue. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$\int f\, d\nu = u \int f\, d\mu \tag{7.4}$$

En particulier, si u est l'application identique de E sur lui-même muni d'une topologie localement convexe moins fine, on voit qu'il y a en général plus de fonctions intégrables par rapport à la topologie plus faible. Ainsi lorsque E est muni de la topologie affaiblie, l'espace $\mathcal{L}^1$ obtenu est, d'après la proposition 7.2, précisément $\bigcap_{x' \in E'} \mathcal{L}^1(\mu_{x'})$, i. e. l'espace des fonctions scalairement μ-intégrables.

Lorsque u est l'injection de E dans un espace F , telle que E est un sous-espace de F , il est clair que $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\nu)$ à $\nu = u \circ \mu$. Par exemple, on peut regarder μ comme une mesure à valeurs dans $\hat{E}$ au lieu de E , sans que l'espace $\mathcal{L}^1$ soit affecté.

THÉORÈME 7.5. - Soit μ une mesure à valeurs dans un espace localement convexe E . Alors pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int f\, d\mu$ appartient au quasi-complété de E .

Démonstration. - On peut évidemment supposer E quasi-complet et montrer que $\int f\, d\mu$ appartient à E , et pour cela il suffit de montrer que $\int f\, d\mu$ est adhérent dans $\hat{E}$ à une partie bornée de E .

1er cas : f est bornée et à support compact, par exemple nulle en dehors de l'ouvert relativement compact ω , avec $|f| \leqslant 1$. Alors $|\langle \int \varphi\, d\mu , x' \rangle| \leqslant 1$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$ nulle hors de ω et vérifiant $|\varphi| \leqslant 1$ implique $\int_\omega d|\mu_{x'}| \leqslant 1$ donc $|\langle \int f\, d\mu , x' \rangle| \leqslant 1$. Alors d'après le théorème du bipolaire $\int f\, d\mu$ est adhérent à l'ensemble borné des $\mu(\varphi)$ avec $|\varphi| \leqslant 1$ et $\operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\omega}$, donc $\int f\, d\mu \in E$.

2e cas : f nulle hors d'un compact. Nous supposons en outre $f \geqslant 0$. Soit $f_n = \inf(f, n)$. Alors $\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$ pour la topologie $\sigma(\hat{E}, E')$. La suite $(\int f_n\, d\mu)_{n\in N}$ faiblement convergente dans $\hat{E}$ est bornée dans $\hat{E}$ donc dans E et son enveloppe convexe aussi. $\int f\, d\mu$ est adhérent à cette enveloppe convexe donc $\int f\, d\mu \in E$.

3e cas : $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est quelconque. D'après ce qui précède $\int \varphi f\, d\mu \in E$ pour tout $\varphi \in \mathcal{K}$. On a $\sup_{|\varphi|\leqslant 1} |\langle \int \varphi f\, d\mu, x'\rangle| = \int |f|\, d|\mu_{x'}| < +\infty$ donc l'ensemble $B = \{\int \varphi f\, d\mu\}_{|\varphi|\leqslant 1, \varphi\in\mathcal{K}}$ est borné dans E, et $\int f\, d\mu$ est adhérent à B d'après le théorème du bipolaire, ce qui achève la démonstration.

Nous dirons que la mesure μ est prolongeable lorsque $\mathcal{L}^1(\mu)$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées à support compact. Il revient donc au même que μ_p soit prolongeable pour tout p, ou avec les notations de la proposition 7.2 que μ_i soit prolongeable pour tout i.

Avec ces conventions, les énoncés 2.4, 2.5, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 ainsi que les théorèmes de convergence 5.1, 5.6 et 5.9 sont valables tels quels à condition de remplacer dans l'énoncé E par $\hat{E}$ (ou par le quasi-complété de E) (12). En outre tous les résultats du paragraphe 6, à l'exception du corollaire 6.6, sont valables lorsque E est un espace quasi-complet.

EXEMPLE 7.6. - Soient E et F des espaces de Banach et soit μ une mesure à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}_s(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence simple (il est équivalent de dire que μ est continue pour la topologie de la convergence simple ou pour la topologie de la convergence uniforme dans la boule unité, définie par la norme). Posons $\mu_x(\varphi) = \mu(\varphi)x$ pour tout $x \in E$. Alors μ_x est une mesure de Radon à valeurs dans F et d'après la proposition 7.2, on a $\mathcal{L}^1(\mu) = \bigcap_{x\in E} \mathcal{L}^1(\mu_x)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int f\, d\mu\, x = \int f\, d\mu_x$ (7.4), et l'opérateur $\int f\, d\mu$ ainsi défini est continu (appartient à $\mathcal{L}(E, F)$) parce que $\mathcal{L}_s(E, F)$ est quasi-complet (théorème 7.5). La mesure μ est prolongeable si, et seulement si, μ_x est prolongeable pour chaque x, ce qui est la cas par exemple lorsque F est faiblement Σ-complet. Lorsque $E = F$ est un espace de Hilbert et μ est une mesure spectrale, on a

$$|\mu_x(\varphi)| = \left(\int |\varphi|^2\, d\nu_x\right)^{1/2}$$

---

(12) Un sous-espace $F \subset E'$ sera "d'indice positif" lorsque la topologie de E est celle de la convergence uniforme dans les parties équicontinues de F.

où ν_x est la mesure positive définie par $\nu_x(\varphi) = (\mu(\varphi)x\ ,\ x)$. Il s'ensuit alors que $\mathcal{L}^1(\mu_x) = \mathcal{L}^2(\nu_x)$.

Pour étendre les notions du présent exposé au cas de mesures complexes à valeurs dans les espaces sur $\underset{\sim}{C}$ (applications linéaires continues de $\mathcal{K}_{\underset{\sim}{C}}(T)$ dans E), il y a en principe deux voies. Une est de remplacer $\underset{\sim}{R}$ par $\underset{\sim}{C}$ partout dans ce qui précède. On utilise alors la semi-variation complexe définie pour $f \in \mathfrak{J}^+$ par $\sup_{\substack{|\varphi| \leqslant f \\ \varphi \in \mathcal{K}_{\underset{\sim}{C}}}} |\mu(\varphi)|$; l'autre est de décomposer les fonctions en parties réelles et imaginaires. Les deux voies paraissent utiles lorsqu'on cherche plus généralement à intégrer des fonctions vectorielles par rapport à une mesure vectorielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTLE (R. G.), DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J.). - Weak compactness and vector measures, Canad. J. of Math., t. 7, 1955, p. 289-305.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chapitres 1-4, 2e édition, 5, 6. - Paris, Hermann, 1956, 1965 (Act. scient. et indus., 1175, 1244, 1281. Bourbaki, 13, 21, 25).

[3] DUNFORD (Nelson) and SCHWARTZ (Jacob T.). - Linear operators. Tome I : General theory. - New York, London, Interscience Publishers, 1958 (Pure and applied Mathematics. A Series of Texts and Monographs, 7).

[4] GROTHENDIECK (A.). - Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canad. J. of Math., t. 5, 1953, p. 129-173.

[5] MORSE (Marston) and TRANSUE (William). - C-Bimeasures Λ and their superior integrals Λ^* , Rend. Circ. mat. Palermo, Serie 2, t. 4, 1955, p. 270-300.

[6] PETTIS (B. J.). - On integration in vector spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 44, 1938, p. 277-304.

[7] PHILLIPS (R. S.). - On linear transformations, Trans. Amer. math. Soc., t. 48, 1940, p. 516-541.

[8] THOMAS (Erik). - L'espace $\mathcal{L}^1$ associé à une mesure de Radon vectorielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, série A, 1968, p. 1039-1042.

[9] THOMAS (Erik). - Théorèmes de convergence dans l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ associé à une mesure de Radon vectorielle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, série A, 1968, p. 1096-1098.

[10] THOMAS (Erik). - Sur les mesures vectorielles à valeurs dans des espaces d'un type particulier, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, série A, 1968, p. 1135-1137.

[11] THOMAS (Erik). - Sur le théorème d'Orlicz et un problème de Laurent Schwartz, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, série A, 1968, p. 7-10.