Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Louis Clerc
Yves Colin de Verdière

Compacité faible dans les espaces localement convexes ; applications aux espaces du type $C(K)$ et $L^1(\mu)$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 2 (1967-1968), exp. n° B2 et B3, p. B1-B24
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_2_A1_0>

COMPACITÉ FAIBLE DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES APPLICATIONS AUX ESPACES DU TYPE $C(K)$ ET $L^1(\mu)$

par Jean-Louis CLERC et Yves COLIN de VERDIÈRE

Notations. - On sera appelé à employer, sans les préciser, les notations suivantes :

E : espace vectoriel topologique localement convexe ;

E' : son dual topologique ;

E'' : son bidual (dual de E' fort) ;

E'^* : le dual algébrique de E' (complété faible de E) ;

Si $u \in L(E, F)$, u' est sa transposée, u'' sa bitransposée ;

K : un espace topologique compact ;

M : un espace topologique localement compact ;

$C(K)$: l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur K, muni de la norme de la convergence uniforme ;

$C_0(M)$: l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur M tendant vers 0 à l'infini, muni de la même norme ;

μ : mesure de Radon sur K, ou mesure de Radon sur M ;

$\mathfrak{M}^1(K)$ $(\mathfrak{M}^1(M))$: espace de Banach des mesures de Radon bornées sur K (sur M);

$\mathcal{L}^1(\mu)$: espace vectoriel des fonctions numériques μ-intégrables ;

$L^1(\mu)$: l'espace de Banach des classes de fonctions numériques intégrables, muni de la norme usuelle ;

$\mathcal{L}^\infty(\mu)$, $L^\infty(\mu)$: notations classiques.

I. Propriétés générales de faible compacité dans les espaces localement convexes (e. l. c.)

1. Le théorème de Šmul'jan.

DÉFINITION I.1. - Nous dirons qu'un espace topologique X a la propriété (S) de Šmul'jan si, de toute suite relativement compacte de X, on peut extraire une sous-suite convergente dans X.

Exemple : Tout espace topologique métrisable a la propriété (S).

PROPOSITION I.1. - Si K est un compact, F un espace topologique métrisable, l'espace $C_S(K ; F)$ des fonctions continues sur K à valeurs dans F, muni de la topologie de la convergence simple, a la propriété (S).

Démonstration.

(a) Si K est métrisable, il admet une partie dénombrable partout dense D, et sur toute partie relativement compacte de $C_S(K , F)$, la topologie de la convergence simple dans D est séparée et moins fine que la topologie induite, donc lui est identique. Une telle partie relativement compacte est donc métrisable, ce qui prouve la proposition.

(b) Si K n'est pas métrisable, considérons une suite (f_n) relativement compacte dans $C_S(K ; F)$, et la relation d'équivalence R sur K :

$$x \, R \, y \quad \text{si, et seulement si,} \quad \forall\, n , \quad f_n(x) = f_n(y) \quad .$$

L'espace topologique $\widetilde{K} = K/R$ est compact, et $C_S(\widetilde{K} ; F)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $C_S(K ; F)$. De plus, $\widetilde{K}$ est métrisable ; en effet, considérons sur $\widetilde{K}$ la topologie la moins fine rendant continues les applications $\widetilde{f}_n$ de $\widetilde{K}$ dans F, cette topologie est évidemment séparée, moins fine que la topologie quotient ; elle lui est donc identique, de plus F étant métrisable, elle est métrisable. On peut donc extraire de $\widetilde{f}_n$ une suite $\widetilde{f}_{n_k}$ simplement convergente vers $\widetilde{\varphi}$, continue sur $\widetilde{K}$. Cette suite f_{n_k} convergera simplement vers φ dans $C_S(K ; F)$.

PROPOSITION I.2. - Si X est une réunion dénombrable de compacts, et F métrisable, $C_S(X ; F)$ a la propriété (S).

Soit (f_n) une suite relativement compacte dans $C_S(X ; F)$, pour tout compact K de X ; la suite des restrictions de f_n à K est relativement compacte dans $C_S(K ; F)$; on peut donc en extraire une suite simplement convergente vers une fonction φ. On peut donc, par un procédé diagonal, extraire de (f_n) une suite simplement convergente en tout point de X ; cette suite étant de Cauchy, convergera évidemment vers une fonction continue.

THÉORÈME I.1 (de Šmul'jan). - Si E est un e. l. c. métrisable, l'espace E muni de la topologie $\sigma(E , E')$ a la propriété de Šmul'jan, c'est-à-dire que de toute suite (x_n) faiblement relativement compacte dans E, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) faiblement convergente dans E.

En effet on peut considérer E faible comme un sous-espace topologique de $C_S(E', \mathbb{R})$, où E' est le dual topologique de E muni de la topologie faible. De plus, E est fermé dans cet espace, et E' est réunion d'une suite de compacts faibles (prendre les polaires d'une base dénombrable de voisinages de 0 dans E). On en déduit le théorème de Šmul'jan par application de la proposition précédente.

2. Le théorème d'Eberlein.

DÉFINITION I.2. - On dit qu'un espace topologique X a la propriété d'Eberlein $(\mathcal{E})$, si toute partie A de X, dont toute suite extraite admet une valeur d'adhérence dans X, est relativement compacte dans X.

Exemples : Tout espace topologique métrisable, tout espace uniforme complet, a la propriété d'Eberlein.

PROPOSITION I.3. - Si K est un compact, F un espace topologique métrisable, l'espace $C_S(K ; F)$ a la propriété d'Eberlein.

Démonstration. - Soit A une partie de $C_S(K ; F)$ dont toute suite extraite admet une valeur d'adhérence ; A est précompacte et relativement compacte dans F^K ; il suffit donc de montrer que si g est une fonction de K dans F adhérente à A pour la topologie de la convergence simple dans K, elle est continue. Raisonnant par l'absurde, soit x_0 un point où g n'est pas continue et $\varepsilon > 0$, tel que pour tout voisinage V de x_0, il existe x dans V avec $d(g(x), g(x_0)) \geqslant \varepsilon$.

On peut alors construire une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions de A et une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de points de K vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $$d(f_n(x_i), g(x_i)) \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1,$$

(2) $$d(g(x_n), g(x_0)) \geqslant \varepsilon,$$

(3) $$d(f_i(x_n), f_i(x_0)) \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

La possibilité d'une telle construction est immédiate. Supposons en effet la construction faite jusqu'à (f_{n-1}, x_{n-1}), l'expression de (1) signifie que l'on prend f_n dans un voisinage donné de g pour la convergence simple dans K. Une fois f_n choisie, (3) est vérifiée pour tous les points d'un voisinage V de x_0 dans lequel on peut trouver x_n vérifiant (2). Soient alors f une fonction continue adhérente à l'ensemble des (f_n), et x une valeur d'adhérence de la suite (x_n).

(1) implique que, pour tout i , $f(x_i) = g(x_i)$;

(3) implique que, pour $i \geqslant 1$, on a $f_i(x) = f_i(x_0)$.

Donc $g(x_0) = f(x_0) = f(x)$.

Or $g(x_0)$ n'est pas valeur d'adhérence des $g(x_i)$, alors que $f(x)$ est valeur d'adhérence des $f(x_i)$. Il y a donc contradiction.

THÉORÈME I.2 (EBERLEIN). - Si E est un espace localement convexe complet, l'espace E , muni de la topologie faible $\sigma(E , E')$, possède la propriété d'Eberlein.

Démonstration. - Soit A une partie de E dont toute suite extraite admet une valeur d'adhérence faible dans E . A est relativement compacte dans E'^* (dual algébrique de E' qui s'identifie au complété faible de E). Il suffit donc de montrer qu'une fonction numérique X sur E' , adhérente à A pour la topologie de la convergence simple, est dans E . Soit K une partie équicontinue faiblement compacte de E' ; la restriction de X à K est adhérente pour la topologie de la convergence simple dans K à l'ensemble des restrictions de A à K , lequel est relativement compact dans $C_S(K ; \underset{\sim}{R})$, d'après la proposition précédente. Donc la restriction de X à K est continue. Or on sait (théorème de Grothendieck) qu'une forme linéaire sur E' , dont la restriction à toute partie équicontinue de E' est continue, est un élément du complété de E , c'est-à-dire ici de E , car on a supposé E complet.

Les théorèmes précédents ont d'importantes applications, car ils permettent de ramener certains problèmes de convergence à des problèmes de convergence de suites. Par exemple, le théorème suivant et le théorème de Krein que nous étudierons ensuite.

THÉORÈME I.3. - Soient K un espace compact, $C(K)$ l'espace de Banach des fonctions numériques continues sur K muni de la norme de la convergence uniforme ; pour qu'une partie A de $C(K)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée et relativement compacte dans l'espace $C(K)$ muni de la topologie de la convergence simple.

Condition nécessaire : Elle est évidente, car la topologie de la convergence simple est moins fine que la topologie faible.

Condition suffisante : Soit (f_n) une suite contenue dans A ; la proposition I.1 nous dit qu'on peut en extraire une suite (f_{n_k}) simplement convergente vers une fonction φ . Cette fonction φ est alors valeur d'adhérence faible de la suite (f_n) , car, pour toute mesure μ sur K , $\mu(f_{n_k})$ tend vers $\mu(\varphi)$ (théorème de Lebesgue).

3. Le théorème de Krein.

Nous aurons besoin d'un lemme qui resservira plusieurs fois dans la suite.

LEMME I.1. - Soient E un e. l. c. séparé, F un e. l. c. complet, et u une application linéaire continue de E dans F . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) u transforme les bornés de E en parties faiblement relativement compactes de F ;

(b) La transposée u' de u transforme les parties équicontinues de F' en parties $\sigma(E' , E'')$ relativement compactes de E' ;

(c) La bitransposée u'' de u applique E'' dans F .

Démonstration. - Rappelons que E'' est la réunion des adhérences dans E'^* muni de $\sigma(E'^* , E')$ des parties bornées de E .

(a) $\Longrightarrow$ (c) : Si B est une partie bornée de E , l'adhérence faible de $u(B)$ dans F'' est contenue dans F , donc $u(\overline{B}) \subset F$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : En effet $\overline{B}$ est $\sigma(E'' , E')$ compacte, donc $u(\overline{B}) \subset u''(\overline{B})$ est relativement compacte pour $\sigma(F , F')$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) : En effet u'' est continue pour $\sigma(E'' , E')$ et $\sigma(F , F')$, donc u' est continue pour $\sigma(F' , F)$ et $\sigma(E' , E'')$, et transforme les parties faiblement compactes (donc en particulier les parties équicontinues) de F' en parties $\sigma(E' , E'')$ relativement compactes de E' .

(b) $\Longrightarrow$ (c) : (b) implique que u'' est continue quand on munit E'' de la topologie de Mackey $\tau(E'' , E')$, et F'' de la topologie de la convergence uniforme sur les équicontinus de F' . Pour ces topologies, on a les propriétés suivantes :

E est dense dans E'' ,

F est un sous-espace fermé de F'' (car F complet).

Donc u'' , qui applique E dans F , applique son adhérence E'' dans F .

THÉORÈME I.4 (KREIN). - Si E est un espace localement convexe complet, l'enveloppe disquée B (i. e. convexe équilibrée) de toute partie faiblement compacte A de E est faiblement relativement compacte dans E .

Démonstration. - Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par B. Munissons F de la norme jauge de B. L'application canonique $u : F \to E$ est évidemment continue (car B est bornée dans E), et le théorème dit exactement que u est faiblement compacte. Comme F est normé, les applications faiblement compactes sont exactement les applications vérifiant l'hypothèse (a) du lemme I.1. Il suffit donc de montrer que u' transforme toute partie équicontinue de E' en une partie $\sigma(F', F'')$ compacte de F'.

Soit H le sous-espace vectoriel du Banach F', formé des y' de F', dont la restriction à A est continue pour la topologie $\sigma(E, E')$. H est évidemment un sous-espace fermé, donc complet, de F'. De plus, si $y' \in H$,

$$\sup_{x\in A} |\langle y', x\rangle| = \sup_{x\in B} |\langle y', x\rangle| = \|y'\|_{F'} .$$

Donc H s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de $C(A)$. Les parties $\sigma(F', F'')$ compactes de H sont donc les parties de H faiblement compactes de $C(A)$, que l'on a caractérisées dans le théorème I.3. Or u' applique évidemment E' dans H. Soit B' une partie équicontinue de E' ; $u'(B')$ est une partie relativement compacte de $C_S(A)$, et $u'(B')$ est bornée dans $C(A)$, donc $u'(B')$ est une partie $\sigma(F', F'')$ compacte de F', ce qu'il fallait démontrer.

II. Etude de deux classes d'espaces localement convexes

Notations. - Si E et F sont deux e. l. c., nous désignerons par $\beta(E ; F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F transformant les parties bornées de E en parties faiblement relativement compactes de F. Toute application de E dans F faiblement compacte au sens habituel est dans $\beta(E ; F)$. Si E est un Banach, les applications de $\beta(E ; F)$ sont les applications faiblement compactes de E dans F.

Nous allons nous intéresser aux espaces E possédant des propriétés du type des deux suivantes :

- Si u et v sont dans $\beta(E ; E)$, $v \circ u$ transforme les bornés de E en parties précompactes de E ;
- Si u est dans $\beta(E ; F)$, u transforme les suites de Cauchy faibles de E en suites de Cauchy fortes de F.

Nous utiliserons le théorème suivant :

THÉORÈME II.1. - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c.</u>, $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties bornées de</u> E ; <u>nous désignerons par</u> $\mathfrak{T}$ <u>l'ensemble des parties équicontinues disquées</u> $\sigma(E', E'')$ <u>compactes de</u> E' ; <u>les hypothèses suivantes sur</u> $(E, \mathfrak{S})$ <u>sont équivalentes</u> :

(a) <u>Pour tout e. l. c.</u> F <u>complet, toute</u> u <u>de</u> $\beta(E ; F)$, <u>et toute</u> A <u>de</u> $\mathfrak{S}$, $u(A)$ <u>est une partie relativement compacte de</u> F ;

(b) <u>Les</u> $A \in \mathfrak{S}$ <u>sont précompactes pour la</u> $\mathfrak{T}$-<u>convergence</u> ;

(c) <u>Les</u> $B \in \mathfrak{T}$ <u>sont précompactes pour la</u> $\mathfrak{S}$-<u>convergence</u>.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : Soit $\hat{E}_{\mathfrak{T}}$ le complété de E muni de la $\mathfrak{T}$-convergence. L'application canonique u de E dans $\hat{E}_{\mathfrak{T}}$ est continue (les B de $\mathfrak{T}$ sont des parties équicontinues de E'), et u est dans $\beta(E, \hat{E}_{\mathfrak{T}})$, car u' , qui est l'application identique de E' dans E' , transforme les parties équicontinues de E' considéré comme dual de $\hat{E}_{\mathfrak{T}}$ (c'est-à-dire contenues dans un B de $\mathfrak{T}$) en parties $\sigma(E', E'')$ relativement compactes du dual E' de E (application du lemme I.1). Donc $u(A)$ est une partie relativement compacte de $\hat{E}_{\mathfrak{T}}$, donc A est précompacte dans $E_{\mathfrak{T}}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soit $u \in \beta(E ; F)$, montrons que u est continue si on munit E de la topologie de la $\mathfrak{T}$-convergence. C'est évident, car u' transforme les parties équicontinues disquées faiblement fermées de F' en parties B de $\mathfrak{T}$ (lemme I.1). Donc, comme A , élément de $\mathfrak{S}$, est précompacte dans $E_{\mathfrak{T}}$, $u(A)$ est précompacte dans F ; et comme F est complet, $u(A)$ est relativement compacte.

L'équivalence de (b) et (c) résulte du théorème d'Ascoli sous la forme suivante :

LEMME II.1. - <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux espaces uniformes</u>, $\mathfrak{S}$ (<u>resp.</u> τ) <u>un ensemble de parties précompactes de</u> X (<u>resp.</u> Y), <u>et</u> $b(x, y)$ <u>une application séparément uniformément continue de</u> $X \times Y$ <u>dans un espace uniforme</u> Z , <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) <u>Pour toute</u> A <u>de</u> $\mathfrak{S}$, <u>l'ensemble des applications</u> $y \longmapsto b(x, y)$ <u>pour</u> $x \in A$ <u>est précompact pour la topologie de la</u> $\mathfrak{T}$-<u>convergence sur</u> $C(Y, Z)$;

(b) <u>Même propriété en permutant</u> A <u>et</u> B , $\mathfrak{S}$ <u>et</u> $\mathfrak{T}$, x <u>et</u> y , X <u>et</u> Y .

On applique le lemme à :

$X = E$ muni de la topologie faible,

$Y = E'$ muni de $\sigma(E, E')$,

$b(x, x') = \langle x, x' \rangle$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ étant des familles de parties bornées de E et E' , donc faiblement précompactes.

Donnons maintenant deux définitions.

DÉFINITION II.1. - <u>On dira qu'un e. l. c.</u> E <u>a la propriété de Dunford-Pettis</u> (<u>notée</u> (DP)), <u>si</u> E <u>vérifie les conditions équivalentes du théorème</u> II.1 <u>où</u>

$\mathfrak{S}$ <u>est l'ensemble des parties disquées faiblement compactes de</u> E .

DÉFINITION II.2. - <u>On dira qu'un e. l. c.</u> E <u>a la propriété de Dunford-Pettis stricte (notée</u> (DPS)), <u>si</u> E <u>vérifie les conditions du théorème</u> II.1 <u>où</u>

$\mathfrak{S}$ <u>est l'ensemble des suites de Cauchy faibles de</u> E .

Nous verrons plus loin que les espaces du type $C(K)$ et du type $L^1(\mu)$ ont les propriétés (DP) et (DPS).

De plus, il résulte immédiatement du théorème II.1 et des définitions, la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. - <u>Si</u> E <u>est un e. l. c. complet ayant la propriété</u> (DP), <u>et si</u> u <u>et</u> v <u>sont dans</u> $\beta(E\ ;\ E)$, $v \circ u$ <u>transforme les bornés de</u> E <u>en parties relativement compactes de</u> E .

En particulier, nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION II.2. - <u>Si</u> E <u>est un espace de Banach et a la propriété</u> (DP), <u>le produit de deux endomorphismes faiblement compacts de</u> E <u>est un endomorphisme compact de</u> E .

D'où on déduit, en prenant pour u et v l'application identique de E dans E , la proposition suivante :

PROPOSITION II.3. - <u>Un espace de Banach réflexif ne peut avoir la propriété</u> (DP) <u>que s'il est de dimension finie</u>.

PROPOSITION II.4. - <u>Si</u> E <u>a la propriété</u> (DPS), <u>et</u> F <u>est un e. l. c. complet, toute application</u> $u \in \beta(E\ ;\ F)$ <u>transforme les suites de Cauchy faibles de</u> E <u>en suites convergentes dans</u> F .

PROPOSITION II.5. - <u>Si</u> E <u>est un Fréchet et a la propriété</u> (DPS), <u>il a la propriété</u> (DP).

Soient F un e. l. c. complet, et $u \in \beta(E\ ;\ F)$; soient A une partie faiblement compacte de E , $y_n = u(x_n)$ une suite extraite de $u(A)$; d'après le théorème de Šmul'jan, on peut extraire une sous-suite (x_{n_k}) faiblement convergente de

(x_n) , $u(x_{n_k})$ est alors une suite convergente, et $u(x_n)$ admet sa limite pour valeur d'adhérence. On en déduit que $u(A)$ est précompacte, donc relativement compacte (F est complet).

PROPOSITION II.6. - Si E est un e. l. c. complet dont toute suite de Cauchy faible est faiblement convergente, et si E vérifie (DP), E vérifie (DPS).

Soient, en effet, F et u comme précédemment, (x_n) une suite de Cauchy faible convergeant faiblement vers x ; d'après le théorème de Krein, l'enveloppe disquée fermée A de $\{x_n\}$ est faiblement compacte, donc $u(A)$ est compacte, et $u(x_n)$ convergente (car sur $u(A)$ les topologies faibles et fortes sont identiques).

PROPOSITION II.7. - Si E est un Banach, et si E' fort a la propriété (DP), E a la propriété (DP).

En effet, d'après l'énoncé (b) du théorème II.1, appliqué à E' fort, les parties disquées $\sigma(E' , E'')$ compactes de E' (qui sont les parties de $\mathfrak{T}$ avec les notations du théorème II.1) sont précompactes pour la topologie de la $\mathfrak{T}'$-convergence ($\mathfrak{T}'$ désigne l'ensemble des parties équicontinues disquées $\sigma(E'' , E''')$ compactes de E''), qui est plus fine que la topologie de la $\mathfrak{S}$-convergence (notations du théorème II.1).

THÉORÈME II.2. - Si E est un espace de Banach, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) E a la propriété (DP) ;

(b) Pour tout e. l. c. F complet, et toute application bilinéaire continue u de $E \times F$ dans un e. l. c. G , si (x_i) est une suite faiblement convergente vers x_0 dans E , et (y_i) une suite faiblement convergente vers y_0 dans F , $u(x_i , y_i)$ converge faiblement vers $u(x_0 , y_0)$ dans G .

(a) $\Longrightarrow$ (b) : La conclusion signifie que, pour tout z' de G' ,

$$\langle u(x_i , y_i) , z'\rangle \text{ tend vers } \langle u(x_0 , y_0) , z'\rangle ,$$

de sorte que l'on est ramené au cas où G est le corps de base. Mais alors on sait qu'il existe une application linéaire continue v de F dans E' fort telle que

$$u(x , y) = \langle x , vy\rangle .$$

La suite $x'_i = vy_i$ converge vers $x'_0 = vy_0$ au sens de $\sigma(E' , E'')$. Or le théorème de Krein, appliqué à la suite (x_i) et à la suite (y_i) , montre que l'enveloppe disquée fermée de (x_i) (resp. de x'_i) est $\sigma(E , E')$ compacte (resp. $\sigma(E' , E'')$ compacte). Le (b) du théorème II.1 permet de conclure que la suite (x_i) converge uniformément sur l'ensemble des (x'_i) .

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Si E n'avait pas la propriété (DP), il existerait une suite (x_i) dans E , faiblement convergente vers 0 , et une partie $\sigma(E' , E'')$, compacte A' de E' , telles que (x_i) ne converge pas uniformément sur A' . On pourrait trouver ε et $x'_i \in A'$ tels que $|\langle x_i , x'_i \rangle| \geqslant \varepsilon$, et, en utilisant le théorème de Šmul'jan, on pourrait extraire de x'_i une suite faiblement convergente vers x'_0 : l'hypothèse (b) serait alors contredite par le triplet $(E , E' , \langle . , . \rangle)$.

III. Cas des espaces L^1 et $C(K)$

THÉORÈME III.1. - $L^1(\mu)$ et $C(K)$ ont les propriétés (DP) et (DPS).

(1) L^1 a la propriété (DPS),
(2) L^1 a la propriété (DP),
(3) L^∞ a la propriété (DP),
(4) $C(K)$ a la propriété (DP),
(5) $C(K)$ a la propriété (DPS).

On a (1) $\Longleftarrow$ (2) $\Longleftarrow$ (3) $\Longleftarrow$ (4) $\Longleftarrow$ (5) .

(1) $\Longleftarrow$ (2) , en vertu de la proposition II.6, et du fait que dans L^1 , toute suite de Cauchy faible est faiblement convergente ;
(2) $\Longleftarrow$ (3) , en vertu de la proposition II.7, et du fait que $(L^1)' = L^\infty$;
(3) $\Longleftarrow$ (4) , en effet, L^∞ est une C^*-algèbre de Banach, donc il existe un compact K tel que $L^\infty \approx C(K)$;
(4) $\Longleftarrow$ (5) , en vertu de la proposition II.5.

Nous allons démontrer que $C_0(M)$ (M localement compact) a la propriété (DPS). Le théorème III.1 en résultera.

Donc, soit (f_i) une suite de Cauchy faible dans $C_0(M)$; on sait que :

1° $\sup\limits_i \|f_i\|_\infty < +\infty$,

2° Il existe g borélienne bornée, et $f_i(x) \to g(x)$ en chaque point.

[Pour montrer le 2°, on utilise la mesure de Dirac ε_x ; ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, d'après le théorème de Lebesgue.]

Soit H une partie faiblement relativement compacte dans $\mathfrak{M}^1(M)$; nous devons démontrer que $\langle (f_i) , \mu \rangle$ converge uniformément en μ $(\mu \in H)$, quand $i \to \infty$

(condition (b) du théorème II.1). Or, d'après le théorème de Lebesgue, cette limite ne peut être que $\langle g , \mu \rangle$. Raisonnons par l'absurde ; on pourrait extraire une sous-suite (f_n) et une suite (μ_ρ) dans H , pour laquelle la convergence ne soit pas déjà uniforme. Mais on sait qu'alors les mesures sont absolument continues par rapport à $\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\mu_m}{\|\mu_m\|}$; appliquons alors le théorème de Lebesgue. Tenant compte du théorème d'Egoroff (toute suite, qui converge presque-partout, converge en mesure sur tout compact), on voit que le théorème sera démontré lorsqu'on aura prouvé le lemme suivant :

LEMME III.1. - Soit (f_i) une suite uniformément bornée dans L^∞ , convergeant vers une fonction $g \in L^\infty$, en mesure sur tout compact ; alors elle converge vers g au sens de $\tau(L^\infty , L^1)$, i. e. $\int f_i \, h \, d\mu$ tend vers $\int gh \, d\mu$ uniformément quand h parcourt une partie faiblement compacte H de L^1 .

Démonstration. - Soient H faiblement relativement compact, et $\varepsilon > 0$. D'après le critère de Dunford-Pettis, il existe un compact K , et $\eta > 0$, tels que

$$\forall\, h \in H , \qquad \int_{CK} |h| \, d|\mu| \leqslant \varepsilon \quad ,$$

$$\forall\, B \ \ \mu\text{-mesurable,} \quad |\mu|(B) \leqslant \eta , \qquad \int_B |h| \, d\mu \leqslant \varepsilon \quad .$$

Mais alors, d'après l'hypothèse sur la suite (f_n) , il existe N tel que

$$\forall\, n \geqslant N , \qquad \mu\{x \in K \mid |f_n(x) - g(x)| > \varepsilon\} \leqslant \eta \quad .$$

D'où, en posant

$$K \setminus K_n = \{x \in K \mid |f_n(x) - g(x)| > \varepsilon\} \quad ,$$

$$\left|\int f_n \, h \, d\mu - \int gh \, d\mu\right| \leqslant \int_{CK} + \int_{K \setminus K_n} + \int_{K_n} \quad ,$$

$$\int_{CK} |f_n \, h - gh| \, d\mu \leqslant 2 \sup_i \|f_i\|_{L^\infty} \varepsilon \quad ,$$

d'après le choix de K ,

$$\int_{K \setminus K_n} |f_n \, h - gh| \, d\mu \leqslant 2 \sup_i \|f_i\|_{L^\infty} \varepsilon \quad ,$$

car $\mu(K \setminus K_n) \leqslant \eta$,

$$\int_{K_n} |f_n \, h - gh| \, d\mu \leqslant \sup_{h \in H} \|h\|_{L^1(\mu)} \varepsilon \quad ,$$

d'après la définition de K_n .

Remarque. - On peut remplacer la suite par un filtre quelconque admettant $g \in L^\infty$ comme limite en mesure sur tout compact.

COROLLAIRE. - Soit u une application linéaire faiblement continue [1] de $L^\infty(\mu)$ dans un e. l. c. séparé F. Alors u est faiblement compacte, et transforme toute suite de $L^\infty(\mu)$, qui est bornée et qui converge en mesure sur tout compact vers $g \in L^\infty(\mu)$, en une suite fortement convergente vers $u(g)$.

En effet, la boule unité de L^∞ est faiblement compacte ; par suite son image par u est faiblement compacte. Mais alors u' transforme les parties équicontinues de F' en parties faiblement relativement compactes de L^1, ce qui signifie que u est encore continue, lorsqu'on munit $E = L^\infty$ de la topologie $\tau(L^\infty, L^1)$, et F de la topologie initiale. Le lemme précédent permet alors de conclure.

IV. Critères de faible compacité dans $\mathfrak{M}^1(M)$

L'intérêt d'étudier la faible compacité dans $\mathfrak{M}^1(M)$ provient de la remarque suivante :

Remarque. - Soit $u : \mathcal{C}_0(M) \to E$, où E désigne un Banach. Dire que u est faiblement compacte revient à dire que l'ensemble $\{u'(y'),\ y'$ dans la boule unité de $E'\}$ est une partie $\sigma(\mathfrak{M}^1(M), (\mathfrak{M}^1(M))')$ relativement compacte.

THÉORÈME IV.1. - Soit H une partie faiblement relativement compacte de $\mathfrak{M}^1(M)$. Alors :

(a) Il existe une mesure, positive, bornée, μ, sur M, telle que

$$H \subset L^1(\mu) .$$

(b) H, en tant que partie de $L^1(\mu)$, est faiblement relativement compacte.

Soit μ une mesure positive bornée sur M. L'application, qui à $g \in L^1(\mu)$ fait correspondre la mesure $g\mu$, est une application linéaire continue, dont l'image est exactement (théorème de Lebesgue-Nikodym) l'ensemble des mesures absolument continues par rapport à μ ; on désigne encore par $L^1(\mu)$ cette image. On sait que c'est aussi la bande engendrée par μ, au sens de Bourbaki [1].

---

[1] Par topologie faible de L^∞, on entend la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Démonstration. - Rappelons d'abord un résultat de KAKUTANI [4] : Tout espace $\mathfrak{M}^1(M)$ est isomorphe, en tant qu'espace de Banach ordonné, à un $L^1(\nu)$, où ν est une mesure positive sur un espace localement compact T. H, considérée comme partie faiblement relativement compacte de $L^1(\nu)$, satisfait aux critères de Dunford-Pettis. Pour tout n, on peut ainsi trouver un compact K_n, tel que $K_n \supset K_{n-1}$,

$$\forall\, h \in H , \qquad \int_{\complement K_n} |h|\, d\nu \leqslant \frac{1}{n} .$$

Soit maintenant $\Omega = \bigcup_1^\infty K_n$; tout élément de H est alors presque partout nul hors de Ω. Considérons alors la fonction

$$f = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\, \nu(K_n)^{-1}\, \underset{\sim}{1}_{K_n} .$$

C'est une fonction positive, intégrable et strictement positive sur Ω. Par suite

$$\forall\, h \in H , \qquad \sup_{n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}} (\inf(nf , |h|)) = |h| ,$$

et donc (voir BOURBAKI [1], chap. II, § 1, n° 5, corollaire de la proposition 6) H est contenue dans la bande engendrée par f.

Par isomorphisme inverse, on a ainsi trouvé une mesure λ, telle que H soit contenue dans la bande engendrée par λ. Ou encore, d'après le commentaire ci-dessus, H est contenue dans $L^1(\lambda)$.

Nous avons ainsi prouvé (a) ; le (b) résulte de ce que $L^1(\lambda)$ est fermé dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Enfin la réciproque est évidente.

THÉORÈME IV.2. - Soit H une partie bornée de $\mathfrak{M}^1(M)$; les propositions suivantes sont équivalentes :

1° H est faiblement relativement compacte ;

2° Pour toute suite (f_i) de fonctions (mesurables pour toute $\mu \in H$), uniformément bornée, convergeant en chaque point vers une fonction g, on a

$$\lim_i \int f_i\, d\mu = \int g\, d\mu \quad \text{uniformément quand } \mu \text{ parcourt } H ;$$

3° Pour toute suite (f_i) de fonctions faiblement convergente vers 0 dans $\mathcal{C}_0(M)$, on a

$$\lim \int f_i\, d\mu = 0 \quad \text{uniformément quand } \mu \text{ parcourt } H ;$$

4° Pour toute suite (O_i) d'ouverts disjoints deux à deux, on a

$$\lim_i \mu(O_i) = 0 \quad \text{uniformément quand } \mu \text{ parcourt } H ;$$

5° <u>Les deux conditions suivantes sont vérifiées</u> :

(a) <u>Pour tout compact</u> K <u>et pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un ouvert</u> U , <u>contenant</u> K , <u>et tel que</u>

$$\forall \mu \in H , \qquad |\mu|(U \cap \complement K) \leqslant \varepsilon ,$$

(b) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un compact</u> K <u>tel que</u>

$$\forall \mu \in H , \qquad |\mu|(\complement K) \leqslant \varepsilon .$$

1° $\Longrightarrow$ 2° : Cela résulte du théorème III.1, et du lemme III.1.

2° $\Longrightarrow$ 3° : Cela est clair, d'après la caractérisation des suites faiblement convergentes dans $\mathcal{C}_0(M)$.

3° $\Longrightarrow$ 4° : Si le 4° n'était pas vrai, on pourrait trouver $\varepsilon > 0$, une suite de mesures $\mu_i \in H$, et une suite d'ouverts (O_i) , tels que

$$\forall i , \qquad |\mu_i(O_i)| > \varepsilon ;$$

on pourrait alors trouver f à support compact contenu dans O_i , telle que $|f_i| \leqslant 1$ et $|\int f_i \, d\mu_i| > \varepsilon$, ce qui contredit le 3°.

4° $\Longrightarrow$ 5° : Si le 5° (a) n'était pas vrai, on pourrait construire par récurrence une suite (V_n) de voisinages de K , une suite (μ_n) extraite de H , et une suite (O_n) d'ouverts relativement compacts, tels que

$$\overline{O_n} \subset V_{n-1} \cap \complement V_n , \qquad |\mu_n(O_n)| > \frac{\varepsilon}{2} ,$$

ce qui contredirait le 4°.

Supposons la construction faite jusqu'au rang n ; il existe alors une $\mu_{n+1} \in H$, telle que $|\mu_{n+1}(V_n \cap \complement K)| > \varepsilon$, donc un compact $K_{n+1} \subset V_n \cap \complement K$ tel que $|\mu_{n+1}(K_{n+1})| > \frac{\varepsilon}{2}$, donc un ouvert relativement compact O_{n+1} tel que

$$K_{n+1} \subset O_{n+1} \subset \overline{O_{n+1}} \subset V_n \cap \complement K \qquad \text{et} \qquad |\mu_{n+1}(\overline{O_{n+1}})| > \frac{\varepsilon}{2} .$$

Il suffit alors de prendre un voisinage ouvert de K , soit V_{n+1} , contenu dans V_n et ne rencontrant pas $\overline{O_{n+1}}$.

De même pour le 5° (b).

Enfin 5° $\Longrightarrow$ 1° : En vertu du théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute suite (μ_n) extraite de H admet une valeur d'adhérence faible. Or la suite (μ_n) est contenue dans un espace $L^1(\mu)$; on se ramène donc à un espace L^1 ; utilisons alors le critère de Dunford-Pettis : il nous suffit de montrer que

$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\quad \exists\ \eta > 0\ ,\qquad \forall\ A$ mesurable , $\mu(A) < \eta\ ,\qquad \forall\ f \in H\ ,\ \int_A |f|\ d\mu \leqslant \varepsilon$,

la deuxième condition étant exactement le 5° (b). Supposons donc que ce soit faux, on pourrait alors trouver une suite (U_n) de parties ouvertes de M , et une suite (f_n) extraite de H , telles que

$$\mu(U_n) \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \int_{U_n} |f_n|\ d\mu > \varepsilon \ .$$

Posons alors $V_n = \bigcup_{i \geqslant n} U_i$. Les V_n forment une suite décroissante d'ouverts dont les mesures tendent vers 0 , et telle que

$$\int_{V_n} |f_n|\ d\mu > \varepsilon \ .$$

Or le 5° (a) implique, par passage au complémentaire, que pour tout ouvert V et tout $\alpha > 0$, il existe un compact $K \subset V$ tel que

$$\forall\ f \in H\ , \qquad \int_{V \cap \complement K} |f|\ d\mu \leqslant \alpha \ .$$

Soit, par suite, K_n un compact contenu dans V_n tel que

$$\int_{V_n \cap \complement K_n} |f|\ d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \ ,$$

soit $K'_n = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} K_i$; on a $K'_n \subset K_n \subset V_n$, et

$$\int_{K'_n} |f_n|\ d\mu \geqslant \int_{V_n} - \int_{V_n \cap \complement K'_n} \ .$$

Mais on peut minorer la deuxième intégrale en remarquant que

$$V_n \cap \complement K'_n = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (V_n \cap \complement K_i) \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (V_i \cap \complement K_i) \ ,$$

d'où

$$\int_{V_n \cap \complement K'_n} |f_n|\ d\mu \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

donc

$$\int_{K'_n} |f_n|\ d\mu \geqslant \varepsilon - \frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Mais les K'_n forment une suite de compacts non vides, dont les mesures décroissent vers 0 . Soit K leur intersection non vide. On a $\mu(K) = 0$, et par ailleurs on peut trouver un ouvert $U \supset K$ tel que

$$\forall\ f \in H\ , \qquad \int_{U \setminus K} |f|\ d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Mais comme K est de mesure nulle, il vient

$$\forall f \in H , \qquad \int_U |f| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} .$$

D'autre part il existe un n tel que $K'_n \subset U$. D'où

$$\int_U |f_n| \, d\mu \geqslant \int_{K'_n} |f_n| \, d\mu \geqslant \frac{\varepsilon}{2} .$$

THÉORÈME IV.3. - Soit M localement compact. Désignons par β_0 l'espace vectoriel des fonctions sur M engendré par les fonctions caractéristiques de fermés qui sont des G_δ . Pour qu'une partie bornée de $\mathfrak{M}^1(M)$ soit faiblement relativement compacte, il suffit (et il faut évidemment) qu'elle soit relativement compacte pour la topologie $\sigma(\mathfrak{M}^1(M) , \beta_0)$.

On sait que le dual de $\mathfrak{M}^1(M)$ contient en particulier le sous-espace des fonctions bornées sur M , mesurables pour toute mesure μ de $\mathfrak{M}^1(M)$. Nous le noterons $\mathcal{B}_u$ et, muni de sa norme naturelle, il est complet. Il contient β_0 comme sous-espace.

Démonstration. - Commençons par le cas où M est compact métrisable.

Soient H bornée, et $\sigma(\mathfrak{M}^1(M) , \beta_0)$ relativement compacte. En vertu du théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que, de toute suite extraite de H , on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Or H est bornée, donc équicontinue en tant qu'ensemble de formes linéaires sur $(\mathfrak{M}^1(M))$; par suite, les topologies $\sigma(\mathfrak{M}^1 ; \overline{\beta_0})$ et $\sigma(\mathfrak{M}^1 , \beta_0)$ coïncident sur H . Mais $\overline{\beta_0}$, adhérence forte de β_0 dans $(\mathfrak{M}^1(M))$, ou dans $\mathcal{B}_u$, ce qui revient au même, puisque $\mathcal{B}_u$ est un sous-espace fermé de $(\mathfrak{M}^1(M))$, contient $C(M)$, ainsi qu'il est facile de le voir en utilisant l'uniforme continuité des fonctions continues sur un compact. Par suite, sur H , les topologies $\sigma(\mathfrak{M}^1 , \beta_0)$, la topologie vague, et $\sigma(\mathfrak{M}^1(M) ; \overline{\beta_0})$, coïncident. M étant supposé métrisable, $C(M)$ est séparable, et la boule unité de $\mathfrak{M}^1(M)$ (ou une partie bornée) est vaguement métrisable. Comme H est vaguement compacte et bornée, on peut extraire de la suite (μ_j) une sous-suite notée encore (μ_j) , vaguement convergente, donc aussi $\sigma(\mathfrak{M}^1 , \overline{\beta_0})$ convergente. On achève la démonstration à l'aide du lemme suivant :

LEMME IV.1. - Soit M un espace compact quelconque. Soit (μ_j) une suite bornée dans $\mathfrak{M}^1(M)$. Pour que la suite (μ_j) converge faiblement, il faut et il suffit que, pour tout ouvert $O \subset M$, la suite $\mu_j(O)$ soit convergente.

Pour le démontrer, nous utilisons le critère 4° du théorème IV.2. Soit (O_i) une suite d'ouverts deux à deux disjoints ; nous devons démontrer que $\lim_i \mu_j(O_i) = 0$ uniformément en j. Soit $\tilde{\mu}_j$ l'élément de ℓ^1 défini par $\tilde{\mu}_j(i) = \mu_j(O_i)$. Pour toute partie N_1 de N,

$$\langle \tilde{\mu}_j , 1_{N_1} \rangle = \sum_{i \in N_1} \tilde{\mu}_j(i) = \mu_j\Big(\bigcup_{i \in N_1} O_i\Big) .$$

Par suite $\langle \tilde{\mu}_j , 1_{N_1} \rangle$ converge $(j \to \infty)$. Or les fonctions caractéristiques de parties de N forment un sous-ensemble total dans ℓ^∞, et par suite, $(\tilde{\mu}_j)$ est une suite de Cauchy faible de $\ell^1(N)$, donc faiblement convergente. Ce qui entraîne $\lim_i \tilde{\mu}_j(i) = 0$ uniformément en j, en utilisant par exemple le critère de Dunford-Pettis.

Le cas où M est un compact quelconque se ramène au cas où M est métrisable, grâce au lemme suivant :

LEMME IV.2. - *Soit* M *un compact. Pour qu'une partie* A *bornée de* $\mathfrak{M}^1(M)$ *soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que, pour tout espace quotient séparé métrisable* $\tilde{M}$ *de* M, *l'image canonique de* A *dans* $\mathfrak{M}^1(M)$ *soit une partie faiblement relativement compacte de cet espace.*

D'après le théorème de Krein, il suffit de démontrer le résultat lorsque A est convexe, cerclée et vaguement fermée. Nous utiliserons deux lemmes classiques de la théorie des e. l. c.

LEMME IV.3. - *Si* E *est un e. l. c.,* A *une partie équicontinue, convexe, cerclée et faiblement fermée de son dual, il existe une application linéaire continue* u *de* E *dans un espace de Banach* F, *telle que la transposée* u' *applique biunivoquement la boule unité de* F' *sur* A.

Il suffit de considérer la semi-norme sur E, jauge de $\mathring{A}$, polaire de A, et d'appeler F le quotient complété de E muni de cette semi-norme. L'application naturelle de E dans F satisfait à la condition voulue.

LEMME IV.4. - *Soient* K *un compact,* F *un Banach (ou seulement un espace localement compact séparé (e. l. c. s.) quasi-complet), et* u *une application linéaire continue de* $C(K)$ *dans* F. *Pour que* u *soit faiblement compacte, il faut et il suffit que, pour tout quotient métrisable* $\tilde{K}$ *de* K, u *restreinte à* $C(\tilde{K})$ *soit faiblement compacte.*

La condition nécessaire est évidente ; pour la condition suffisante, il suffit d'établir que toute suite extraite de l'image de la boule-unité de $C(K)$ a une valeur d'adhérence faible (d'après EBERLEIN). Donc, soit (f_i) une telle suite ; considérons sur K la relation d'équivalence $x \sim y$ si $\forall\, i$, $f_i(x) = f_i(y)$. Soit $\widetilde{K}$ le quotient de K par cette relation d'équivalence, muni de la topologie quotient. La topologie la moins fine, rendant continues les applications $\widetilde{f}_i$, est séparée, métrisable, moins fine que la topologie quotient. Par suite, $\widetilde{K}$ est séparé, donc compact, et aussi métrisable. Mais alors, d'après l'hypothèse, u restreint à $C(\widetilde{K})$ est faiblement compacte, et par suite $(u(f_i))$ possède au moins une valeur d'adhérence faible.

Enfin, le cas où M est localement compact se règle par compactification de l'espace. Si $\hat{M}$ est le compactifié de M , $\mathfrak{M}(M)$ est isomorphe à l'hyperplan des mesures sur $\hat{M}$ qui ne chargent pas le point à l'infini.

V. Nouvelle caractérisation des applications faiblement compactes : La propriété de Dieudonné

THÉORÈME V.1. - *Soient* E *un e. l. c.,* E'' *son bidual, et* H *un sous-espace vectoriel, tel que* $E \subset H \subset E''$. *Les propositions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Toute partie équicontinue disquée* $\sigma(E' , H)$ *compacte est* $\sigma(E' , E'')$ *compacte* ;

(2) *Si* F *est un e. l. c. s. complet, et si* u *est une application linéaire faiblement continue de* E *dans* F *telle que* u'' *applique* H *dans* F , *alors* u'' *applique* E'' *dans* F .

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $u''(H) \subset F$ signifie que u' est continue de F' faible dans E' muni de $\sigma(E' , H)$. Donc u' transforme les parties équicontinues de F' en parties $\sigma(E' , H)$ compactes, donc $\sigma(E' , E'')$ compactes ; par suite, u est faiblement compacte, et donc applique E'' dans F .

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Soient A' équicontinue, disquée, et $\sigma(E' , H)$ compacte de E' . Par application du lemme IV.3, on peut trouver un Banach F , et une application linéaire continue u de E dans F , telle que A' soit l'image par u' de la boule unité de F' . Comme u' transforme la boule unité de F' en partie $\sigma(E' , H)$ relativement compacte, la restriction de u'' à H est continue, quand on munit H de $\tau(H , E')$ et F'' de sa topologie naturelle. Mais E est faiblement dense dans H pour $\tau(H , E')$, donc u'' applique en fait H dans F .

D'après l'hypothèse, u'' applique alors E'' dans F, et par suite, A' est bien $\sigma(E', E'')$ compacte.

Nous allons nous intéresser au cas où H est le sous-espace de Baire de classe 1, c'est-à-dire le sous-espace formé des limites faibles dans E'' des suites de Cauchy faibles de E. On dira que E a la propriété de Dieudonné (en abrégé (D)), si les propositions équivalentes du théorème précédent sont vérifiées. On voit que si E possède (D), si F est un e. l. c. complet, toute application linéaire continue de E dans F, qui transforme suites de Cauchy faibles en suites convergentes, transforme parties bornées en parties faiblement relativement compactes.

THÉORÈME V.2. - $C(K)$ *possède* (D). *Plus exactement, si* F *est un e. l. c. complet, et* u *une application linéaire continue de* $C(K)$ *dans* F, *les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) u *est faiblement compacte* ;

(2) *Pour toute partie* A *fermée* G_δ *de* K, *on a* $u''(\underset{\sim}{1}_A) \in F$;

(3) u *transforme toute suite croissante de fonctions continues positives majorées par* 1, *en suite faiblement convergente de* F.

(1) $\Longrightarrow$ (3) : En effet, une suite croissante majorée est une suite de Cauchy faible dans $C(K)$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : En effet, (2) faible est équivalent à $u''(\underset{\sim}{1}_G) \in F$, où G désigne un ouvert réunion dénombrable de compacts. Soit (K_n) cette suite, qu'on peut toujours supposer croissante. D'après le théorème d'Urysohn, on peut trouver une fonction continue φ_n, comprise entre 0 et 1, valant 1 sur K et 0 dans $\complement G$. Posons alors $f_n = \sup(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. La suite (f_n) est formée de fonctions continues positives, bornées par 1, et est croissante. D'où le résultat.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : D'après le théorème IV.3, il nous suffit de montrer que toute partie équicontinue disquée $\sigma(E', H)$ compacte est $\sigma(E', E'')$ relativement compacte, lorsque H désigne le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques de fermés qui sont des G_δ. Or c'est exactement le résultat du théorème IV.2.

VI. Applications à des propriétés d'intégration et de mesure vectorielles

1. Propriété d'Orlicz.

Soient M un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ, et E un e. l. c. s. ; une application Φ de M dans E est dite scalairement μ-intégrable si, pour tout y' de E', la fonction numérique $y' \circ \Phi$ est μ-intégrable ; la forme linéaire sur E', $y' \longmapsto \int y' \circ \Phi \, d\mu$, ainsi définie par Φ, est appelée intégrale faible de Φ, et notée $\int \Phi \, d\mu$. Si f est dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et Φ scalairement μ-intégrable, $f\Phi$ est scalairement μ-intégrable, et $\int f\Phi \, d\mu = \widetilde{\Phi}(f)$ ne dépend que de la classe de f dans $L^\infty(\mu)$; on en déduit l'application linéaire $\Phi^* : L^\infty(\mu) \to E'^*$ telle que, si f est dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et $\widetilde{f}$ sa classe dans $L^\infty(\mu)$, on ait

$$\Phi^*(\widetilde{f}) = \widetilde{\Phi}(f) = \int f\Phi \, d\mu \quad .$$

E étant un sous-espace vectoriel de E'^*, il est naturel de se demander dans quels cas $\Phi^*(L^\infty(\mu))$ est contenu dans E.

Il va résulter des théorèmes vus plus haut que l'on a le critère suivant :

THÉORÈME VI.1. - Soient M et μ comme plus haut, E un e. l. c. s. complet, Φ une application scalairement μ-intégrable de M dans E ; supposons de plus que, pour tout fermé de Baire A (c'est-à-dire tout fermé qui est un G_δ) de M, on ait $\int \varphi_A \Phi \, d\mu \in E$. Alors :

(1) $\forall f \in L^\infty(\mu)$, $\Phi^*(f) \in E$;

(2) Φ^* est une application faiblement compacte de $L^\infty(\mu)$ dans E ;

(3) Si (g_i) est un filtre $\mathfrak{F}$ borné de fonctions de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ convergeant en mesure sur tout compact de M vers une fonction g, $\widetilde{\Phi}(g_i)$ tend vers $\widetilde{\Phi}(g)$ au sens de la topologie initiale de E suivant $\mathfrak{F}$.

Démonstration. - Soit β_0 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ engendré par les fonctions caractéristiques de fermés de Baire de M, muni de la norme induite par $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. L'application $f \longmapsto \int f\Phi \, d\mu$ de β_0 dans E est continue ; en effet, si B désigne la boule unité de β_0, et y' un élément de E', on a

$$|\langle \int f\Phi \, d\mu \, , y' \rangle| = |\int f \langle \Phi \, , y' \rangle \, d\mu| \leqslant \|y' \circ \Phi\|_{\mathcal{L}^1(\mu)} \quad .$$

L'image de la boule unité B est faiblement bornée dans E, donc bornée ; la restriction de $\widetilde{\Phi}$ à β_0 est donc continue de β_0 dans E. Soit u cette restriction ; u se prolonge par continuité en une application $\tilde{u}$ de l'adhérence forte de β_0 dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ à valeurs dans E. De plus, $\tilde{u}$ et $\tilde{\Phi}$ sont faiblement continues de $\overline{\beta_0}$ dans E'^*, et coïncident sur β_0, donc $\tilde{u}$ coïncide avec $\tilde{\Phi}$ sur $\overline{\beta_0}$. Mais $\overline{\beta_0}$ contient $C_0(M)$, par restriction de $\tilde{\Phi}$ à $C_0(M)$, on a donc une application $v : C_0(M) \to E$. De plus v'' et $\tilde{\Phi}$ sont faiblement continues sur $[\mathfrak{M}^1(M)]'$ à valeurs dans E'^*, et coïncident sur $C_0(M)$, donc sont égales, et $v''(\beta_0) \subset E$; donc v est faiblement compacte, et v'' transforme les fonctions boréliennes bornées en éléments de E ; si $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, il existe une fonction borélienne bornée $\tilde{f}$ ayant même classe que f dans $L^\infty(\mu)$.

On a ainsi démontré (1) ; le (2) est immédiat, car la boule unité de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est l'adhérence faible dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ de la boule unité de $C_0(M)$, dont l'image dans E est faiblement relativement compacte.

Démontrons le (3). Si B' est une partie équicontinue de E', $u'(B')$ est une partie faiblement relativement compacte de $\mathfrak{M}^1(M)$, c'est-à-dire que

$$\{y' \circ \Phi \mid y' \in B'\}$$

est une partie faiblement relativement compacte de $L^1(\mu)$, donc $\int y' \circ \Phi g_i \, d\mu$ converge uniformément vers $\int y' \circ \Phi g \, d\mu$ suivant le filtre $\mathfrak{F}$. Cela signifie que $\int \Phi g_i \, d\mu$ tend dans E vers $\int \Phi g \, d\mu$ (lemme III.1).

Nous en déduisons le corollaire suivant :

THÉORÈME VI.2 (ORLICZ). - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c. s. complet, et</u> (x_n) <u>une suite d'éléments de</u> E <u>dont toute sous-famille soit faiblement sommable dans</u> E ; <u>alors, pour toute suite bornée</u> (λ_n) <u>de scalaires, la suite</u> $(\lambda_n x_n)$ <u>est sommable dans</u> E, <u>et en particulier la suite</u> (x_n) <u>est sommable.</u>

<u>Démonstration</u>. - Il suffit d'appliquer le théorème VI.1 à l'espace localement compact $\underset{\sim}{N}$ muni de la mesure discrète chargeant chaque point de la masse $+1$. On applique (3) aux fonctions g_I, pour I partie finie de $\underset{\sim}{N}$, définies par

$$\begin{cases} g_I(n) = \lambda_n, & \text{si } n \in I, \\ g_I(n) = 0, & \text{si } n \notin I ; \end{cases}$$

et on considère le filtre dont les éléments sont les ensembles, pour J partie finie de $\underset{\sim}{N}$,

$$A_J = \{g_I \mid I \supset J\} .$$

Suivant ce filtre, g_I tend vers $g : n \longmapsto \lambda_n$ en mesure sur tout compact, et donc $\sum_{n\in I} \lambda_n x_n$ tend vers $\sum_1^\infty \lambda_n x_n$.

2. Mesures vectorielles.

DÉFINITION VI.1. - Soient X un ensemble muni d'une tribu $\mathfrak{A}$, et E un e. l. c. s. ; on appellera mesure abstraite sur $(X, \mathfrak{A})$ à valeurs dans E, toute application dénombrablement additive de $\mathfrak{A}$ dans E. On notera $M(X, \mathfrak{A}, E)$ l'espace vectoriel de ces mesures.

On peut, a priori, distinguer des mesures abstraites à valeurs dans E muni de topologies distinctes, mais il résulte du théorème VI.2 la proposition suivante :

PROPOSITION VI.1. - Si E est un e. l. c. s. complet, toute mesure abstraite à valeurs dans E muni de la topologie faible est aussi une mesure à valeurs dans E muni de sa topologie initiale.

Démonstration. - En effet, si A_n est une suite d'éléments disjoints de $\mathfrak{A}$, et μ une mesure abstraite à valeurs dans E faible, toute sous-famille de $\mu(A_n)$ $(n \in I)$ est faiblement sommable de somme $\mu(\bigcup_{n\in I} A_n)$, donc $(\mu(A_n))_{n\geq 1}$ est sommable.

De plus nous avons, dans le cas scalaire, le théorème de Riesz.

THÉORÈME VI.3. - Soient K un compact, $\mathfrak{A}$ sa tribu de Baire ; l'application qui, à toute mesure de Radon μ sur K, associe la mesure scalaire abstraite $\tilde{\mu}$ sur $(K, \mathfrak{A})$ telle que $\tilde{\mu}(A) = \mu(\omega_A)$, est une bijection de $\mathfrak{M}(K)$ sur $M(K, \mathfrak{A}, \mathbb{C})$.

Exemple de mesure abstraite vectorielle : Soient K un compact, E un e. l. c. s. complet, et u une application linéaire faiblement compacte de $C(K)$ dans E ; on a vu que, si A est un ensemble de $\mathfrak{A}$, $u''(\omega_A)$ est dans E. De plus, il résulte des théorèmes vus plus haut que $A \longmapsto u''(\omega_A)$ est une application dénombrablement additive (car elle l'est faiblement). Nous allons voir qu'en fait tout élément de $M(K, \mathfrak{A}, E)$ peut s'obtenir ainsi, et de manière unique.

THÉORÈME VI.4. - Si K est un compact, $\mathfrak{A}$ sa tribu de Baire, et E un e. l. c. s. complet, l'application qu'on vient de définir de $\beta(C(K), E)$ dans $M(K, \mathfrak{A}, E)$ est une bijection.

Nous le démontrerons seulement dans le cas où E est un espace de Banach :

Soit μ un élément de $M(K, \mathfrak{A}, E)$; à toute y' de E', associons la mesure de Radon déduite de la mesure abstraite $y' \circ \mu$; cette application $v : E' \to \mathfrak{M}(K)$ $(y' \longmapsto v_{y'})$ est linéaire ; elle est continue, d'après le théorème du graphe fermé. [Si $y'_n \to 0$ dans E' et $v_{y'_n} \to \lambda$ dans $\mathfrak{M}(K)$, $v_{y'_n}(A)$ tend vers $\lambda(A)$ $(A \in \mathfrak{A})$ et $v_{y'_n}(A) = \langle \mu(A) , y'_n \rangle$ tend vers 0, donc $\lambda(A) = 0$ et $\lambda = 0$.] Soit v' sa transposée : $v' : (\mathfrak{M}(K))' \to E''$. De plus, si $A \in \mathfrak{A}$,

$$\langle v'(\varphi_A) , y' \rangle = \langle \varphi_A , v_{y'} \rangle = \langle \mu(A) , y' \rangle \quad .$$

Donc $v'(\varphi_A) = \mu(A) \in E$. Soient F le sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}'(K))'$ engendré par les φ_A, et $\overline{F}$ son adhérence dans $(\mathfrak{M}(K))'$; on a $v'(\overline{F}) \subset E$. Comme $\overline{F}$ contient $C(K)$, on en déduit par restriction de v' une application $u : C(K) \to E$. De plus u'' et v' sont égales sur $C(K)$ et faiblement continues, donc égales et $v'(F) \subset E$; donc, comme $F \supset \beta_0$, u est faiblement compacte (théorème V.2), et on a bien pour $A \in \mathfrak{A}$,

$$u''(\varphi_A) = v'(\varphi_A) = \mu(A) \quad .$$

Pour de telles mesures vectorielles, on a un théorème analogue au <u>théorème de Lebesgue</u> :

THÉORÈME VI.5. - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c. s. complet, et</u> K <u>un compact,</u> u <u>une application linéaire faiblement compacte de</u> $C(K)$ <u>dans</u> E, <u>et</u> (g_n) <u>une suite bornée de fonctions boréliennes simplement convergente vers une fonction</u> g ; <u>alors</u> $u''(g_n)$ <u>tend dans</u> E <u>vers</u> $u''(g)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit B' une partie équicontinue de E' ; $u'(B')$ est une partie faiblement relativement compacte de $\mathfrak{M}(K)$, elle est donc contenue dans un espace $L^1(\mu)$, et si on appelle $h_{y'}$ une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$ représentant $u'(y')$ (voir le théorème IV.1), on a

$$\langle u''(g_n) , y' \rangle = \int h_{y'} \, g_n \, d\mu \quad ,$$

et $\int h_{y'} \, g_n \, d\mu$ converge uniformément vers $\int h_{y'} \, g \, d\mu$ quand $y' \in B'$. Donc $u''(g_n)$ tend dans E vers $u''(g)$ (cf. lemme III.1).

Pour d'autres applications, voir par exemple le cours de GROTHENDIECK [2] (chap. V, § 3 et § 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. Chapitres 1 à 4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques. Curso de extensão universitária da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São Paulo. 3a edição. - São Paulo, Sociedade de Matemática, 1964.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, Canad. J. of Math., t. 5, 1953, p. 129-173.

[4] KAKUTANI (Shizuo). - Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 523-537.

(Texte reçu le 21 janvier 1969)