

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

ERIC VAN DER OORD

Opérateurs de Calderón-Zygmund dans \mathbb{R}^n . I

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A5, p. A1-A9

http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A6_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND DANS $\underline{\mathbb{R}}^n$. I.

par Eric VAN DER OORD

1. Introduction. Rappels et compléments sur les exposés A.2 et A.4.

Dans l'exposé A.2, on a introduit l'espace vectoriel G_E^{-p} des fonctions définies dans $\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}$, à valeurs complexes, homogènes de degré $-p$, dont les restrictions à la sphère unité Σ de $\underline{\mathbb{R}}^n$ appartiennent à un espace vectoriel E de fonctions sur Σ . En fait, on se borne aux cas où $E = \mathcal{L}^2(\Sigma)$, $E = \mathcal{L}^\infty(\Sigma)$, $E = C^K(\Sigma)$ ($K \in \underline{\mathbb{N}}$ ou $K = +\infty$).

Dans ces cas, $E \subset \mathcal{L}^1(\Sigma)$, ce qui permet de poser

$$G_E^{\circ-p} = \{f \in G_E^{-p} \mid \int_{\Sigma} f \, d\sigma = 0\}$$

où σ est, comme d'habitude, la mesure associée à la métrique euclidienne sur Σ .

Enfin, pour $h \in G_E^{-p}$, on pose, pour $0 < \varepsilon \leq \eta < +\infty$, $h_{\varepsilon\eta}(Z) = h(Z)\chi_{[\varepsilon, \eta]}(|Z|)$, où χ_A désigne la fonction caractéristique de A .

On a vu que si $k \in G_E^{\circ-n}$, on peut lui associer une distribution tempérée en valeur principale, par la formule :

$$\varphi \in \mathcal{S}(\underline{\mathbb{R}}^n) \langle Vph, \varphi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow +\infty}} \langle h_{\varepsilon\eta}, \varphi \rangle,$$

et on a le résultat suivant :

THEOREME. - Soient $h \in G_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^{\circ-n}$ et $\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi)$ la valeur au point ξ de la transformée de Fourier de $h_{\varepsilon\eta}$. Alors, il existe une constante C , indépendante de $\varepsilon, \eta, h, \xi$ telle que $|\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi)| \leq C \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$; $\hat{h}_{\varepsilon\eta}$ converge uniformément sur tout compact de $\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}$ vers une fonction $\hat{h} \in G_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)}^{\circ 0}$ qui, en tant que distribution tempérée, est égale à la transformée de Fourier de Vph . De plus :

Si $h \in G_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)}^{\circ-n}$, $\hat{h} \in G_{C(\Sigma)}^{\circ 0}$.

Si $h \in G_{C^\infty(\Sigma)}^{\circ-n}$, $\hat{h} \in G_{C^\infty(\Sigma)}^{\circ 0}$ et $h \mapsto \hat{h}$ est une bijection de $G_{C^\infty(\Sigma)}^{\circ-n}$ sur $G_{C^\infty(\Sigma)}^{\circ 0}$.

Plus précisément, pour $\xi \neq 0$, on pose $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$. Alors, pour $h \in \overset{\circ}{G}_E^{-n}$, on a

$$\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi) = \int_{\Sigma} F_{\varepsilon,\eta}(\theta, \xi) h(\theta) d\sigma(\theta),$$

$$\hat{h}(\xi) = \hat{h}(\xi') = \int_{\Sigma} G(\theta, \xi') h(\theta) d\theta,$$

où (cf. exposé A.2, pages 4 et 7) :

(a) $G(\theta, \xi')$ est un noyau sur Σ qui ne dépend que du produit scalaire (θ, ξ') , tel que :

$$(1) \quad \int_{\Sigma} |G(\cdot, \xi')|^2 d\sigma = \text{Cte} < +\infty.$$

Cela entraîne que $\underline{G} : f \mapsto \int_{\Sigma} G(\theta, \cdot) f(\theta) d\sigma(\theta)$ est un opérateur compact de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, et un opérateur continu de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ dans $\mathcal{L}^\infty(\Sigma)$,

$$(2) \quad \int_{\Sigma} |G(\theta, \xi'_1) - G(\theta, \xi'_2)| d\theta = \varphi(|\xi'_1 - \xi'_2|) \quad \text{avec } \varphi \in C(\underline{\mathbb{R}}^+).$$

Il en résulte que \underline{G} est un opérateur continu de $C(\Sigma)$ qui transforme les parties bornées de $C(\Sigma)$ en parties équicontinues, donc \underline{G} est encore compact dans $C(\Sigma)$.

$$(b) \quad \text{On a } \sup_{\xi, \varepsilon, \eta} \|F_{\varepsilon\eta}(\cdot, \xi)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} < +\infty,$$

$F_{\varepsilon\eta}(\theta, \xi)$ converge simplement vers $G(\theta, \xi')$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$;

$F_{\varepsilon\eta}(\cdot, \xi) - G(\cdot, \xi')$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ uniformément par rapport à ξ sur tout compact de $\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$.

En conséquence, $\hat{h}_{\varepsilon\eta}(\xi) \xrightarrow[\eta \rightarrow \infty]{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{h}(\xi)$ uniformément sur tout compact de $\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}$.

(c) L'invariance de G par rotation montre que si ω est une rotation quelconque de centre 0, on a :

$$(0) \quad \underline{G}f(\omega\xi') - \underline{G}f(\xi') = \int_{\Sigma} [G(\cdot, \omega\xi') - G(\cdot, \xi')] f(\cdot) d\sigma \\ = \int_{\Sigma} G(\theta, \xi') [f(\omega\theta) - f(\theta)] d\sigma(\theta),$$

ce qui entraîne que si $f \in C^K(\Sigma)$, $\underline{G}f \in C^K(\Sigma)$. On peut montrer que pour $K < +\infty$, \underline{G} est un opérateur compact de $C^K(\Sigma)$, donc non inversible, cependant on a montré (exposé A.2, page 11) que \underline{G} est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $C^\infty(\Sigma)$ sur $C^\infty(\Sigma)$. En fait, la formule (0) montre que \underline{G} est continu de $C^\infty(\Sigma)$ dans $C^\infty(\Sigma)$, donc d'après le théorème de Banach, un automorphisme d'espace de Fréchet.

Un dernier résultat concerne la continuité de \underline{G}^{-1} . Il résulte de la démonstration du théorème 3 de l'exposé A.2 que \underline{G}^{-1} se prolonge en un opérateur continu de $C^n(\Sigma)$ dans $C(\Sigma)$. (En fait, on ne l'a démontré que pour les fonctions de moyenne nulle sur Σ ; mais $G(\cdot, \xi')$ est de moyenne non nulle sur Σ , donc \underline{G} est un automorphisme de l'espace vectoriel des fonctions constantes sur Σ , d'où le résultat, qui servira par la suite.)

Dans l'exposé A.4, on a démontré les résultats suivants :

- (α) Si $h \in \overset{0}{G}^{-n}$, alors, pour tout $f \in \mathcal{L}^2$ la fonction $\underline{h}_{\varepsilon\eta} f = \underline{h}_{\varepsilon\eta} * f$ converge dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ vers une fonction $\underline{h}f$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\eta \rightarrow +\infty$.
- (β) Pour $f \in \mathcal{S}$, on a
- $$\underline{h}f(X) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(X,\xi)} \hat{h}(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi .$$
- (γ) $f \mapsto \underline{h}f$ est un opérateur continu de \mathcal{L}^2 dont la norme est
- $$\|\hat{h}\|_{\infty} \leq \text{Constante} \|h\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)} .$$

La fonction $\hat{h} \in \overset{00}{G}(\Sigma)$ a été appelée le symbole de l'opérateur \underline{h} , dont le noyau est h .

Dans cet exposé, nous allons généraliser ces résultats à une classe plus large de noyaux.

2. Noyaux de classe C_b^{∞}

Pour chaque K entier ≥ 0 et β réel ≥ 0 , on désignera par G_{β}^{-K} l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $h(x, \cdot) \in G_{\beta}^{-K}$;
- (ii) Pour chaque indice de dérivation $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la fonction $(x, z) \mapsto \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha}} h(x, z)$ est de classe C_b^{β} sur $\mathbb{R}^n \times \Sigma$ (c'est-à-dire de classe $C^{[\beta]}$ avec toutes ses dérivées d'ordre $\leq [\beta]$ bornées et ses dérivées d'ordre $[\beta]$ uniformément höldériennes d'ordre $\beta - [\beta]$ sur $\mathbb{R}^n \times \Sigma_n$). En d'autres termes, on a :

$$G_{\beta}^{-K} = \{h(x, z) \mid (x \mapsto h(x, \cdot)) \in C_b^{\beta}[\mathbb{R}^n, G_{\beta}^{-K}(\Sigma)]\} .$$

On notera $\overset{\circ}{G}_\beta^{-K}$ l'ensemble $\{f \in G_\beta^{-K} \mid \forall \alpha \in \underline{\mathbb{R}}^n, f(x, \cdot) \in \overset{\circ}{G}_{C^\infty(\Sigma)}^{-K}\}$.

Pour $f \in G_\beta^{-K}$, $f_{\varepsilon\eta}(x, z) = f(x, z) \chi_{[\varepsilon, \eta]}(|z|)$.

Pour $f \in \overset{\circ}{G}_\beta^{-K}$, $\hat{f}(X, t) = [f(X, \cdot)](t)$.

Notre but est de donner un sens à la formule :

$$\underline{h}f(X) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow \infty}} \int_{\underline{\mathbb{R}}^n} h_{\varepsilon\eta}(X, Z) f(X - Z) dZ, \quad h \in \overset{\circ}{G}_\beta^{-n}, \quad f \in \mathcal{L}^2.$$

et de montrer

- 1° que \underline{h} est un opérateur de \mathcal{L}^2 dans \mathcal{L}^2 ;
- 2° comment les propriétés de \underline{h} se rattachent à celles du "symbole" \hat{h} ;
- 3° enfin que \underline{h} est un opérateur "neutre", en ce sens qu'il envoie $H^m \cap C^\alpha$ dans $H^m \cap C^\alpha$ pour $m < \alpha < \beta$ (cette dernière étude sera faite dans l'exposé A.6).

Ces trois propriétés sont conséquence des trois suivantes :

- 1° Si $f \in \overset{\circ}{G}_\beta^{-n}$, $x \mapsto f(x, \cdot)$ est une application continue et bornée de $\underline{\mathbb{R}}^n$ dans $\overset{\circ}{G}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^{-n}$;
- 2° La C^∞ -dérivabilité de $f \in \overset{\circ}{G}_\beta^{-n}$ par rapport à la deuxième variable ;
- 3° La classe C^β de $f \in \overset{\circ}{G}_\beta^{-n}$ par rapport à la première variable.

3. Opérateurs de $\mathcal{L}^2(\underline{\mathbb{R}}^n)$ associés aux fonctions de $\overset{\circ}{G}_\beta^{-n}$

THEOREME 1. - Soit $h : \underline{\mathbb{R}}^n \times (\underline{\mathbb{R}}^n - \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que l'application $x \mapsto h(x, \cdot)$ soit continue et bornée de $\underline{\mathbb{R}}^n$ dans $\overset{\circ}{G}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^{-n}$, lorsqu'on munit ce dernier espace de la norme $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$. Alors,

1° pour $f \in \mathcal{L}^2$, la fonction $\underline{h}_\varepsilon f(X) = \int_{\underline{\mathbb{R}}^n} h_\varepsilon(X, Z) f(X - Z) dZ$ appartient à \mathcal{L}^2 ;

2° lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +\infty$, $\underline{h}_\varepsilon f$ converge dans \mathcal{L}^2 vers une fonction $\underline{h}f$, \underline{h} est un opérateur continu de \mathcal{L}^2 , et il existe une constante A telle que :

$$\|\underline{h}\| \leq A \sup_{x \in \underline{\mathbb{R}}^n} \|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}.$$

Démonstration. - L'existence de A mise à part, les propriétés énoncées sont évidentes si h est de la forme :

$$h(X, Z) = \sum_{K=1}^n a_K(X) \varphi_K(Z); \quad \forall K, \quad a_K \in C_b(\underline{\mathbb{R}}^n), \quad \varphi_K \in \overset{\circ}{G}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^{-n}.$$

L'idée de la démonstration est de passer à une série :

(α) $h(x, \cdot) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m(x) \varphi_m(\cdot)$; $a_m \in C_b(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_m \in \overset{0}{G}^{-n}(\Sigma)$, la convergence de la série ayant lieu en un sens à préciser. Opérons d'abord formellement :

$$(\beta) \quad \underline{h}_\varepsilon f(x) = \sum_m a_m(x) [\varphi_{m,\varepsilon} \star f](x) , \quad f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) .$$

(γ) $|\underline{h}_\varepsilon f(x)|^2 \leq (\sum_m |a_m^2(x)|) \cdot (\sum_m |\varphi_{m,\varepsilon} \star f(x)|^2)$. Une première condition, (1), sera que l'on ait

$$(1) \quad \sum |a_m(x)|^2 \leq \text{cte} \|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^2 \leq \text{cte} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|h(x, \cdot)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}^2 = c^2 .$$

$$(\delta) \text{ Alors : } \|\underline{h}_\varepsilon f\|_2^2 \leq c^2 \sum_m \|\varphi_{m,\varepsilon} \star f\|_2^2 = c^2 \sum_m \|\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon} \cdot \hat{f}\|_2^2 \cdot (2\pi)^{-n} .$$

$$(\varepsilon) \quad \sum_m \|\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon} \hat{f}\|_2^2 = \sum_m \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon}(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int \sum_m |\varphi_{m,\varepsilon}(\xi)|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\sup_\xi \sum_m |\varphi_{m,\varepsilon}(\xi)|^2 \right) \cdot \|f\|_2^2 ,$$

d'où $\|\underline{h}_\varepsilon f\|_2^2 \leq c^2 \left\| \sum_m \widehat{\varphi}_{m,\varepsilon} \right\|_\infty \|f\|_2^2$, puisque $(2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$.

La deuxième condition, (2), sera donc que $\sum_m |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon}|^2$ soit une fonction essentiellement bornée, indépendamment de ε .

$$(2) \quad \sup_{\xi, \varepsilon, \eta} \left\| \sum_m |\widehat{\varphi}_{m,\varepsilon, \eta}(\xi)|^2 \right\| < +\infty .$$

Remarquons que l'on remplit la condition (1) en prenant pour φ_n des fonctions (par exemple C^∞) dont les traces sur Σ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\{f \in \mathcal{L}^2(\Sigma) \mid \int f d\sigma = 0\}$. Dans ce cas, (α) a le sens d'une convergence dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ pour chaque x . Nous allons montrer que, pour un tel choix des (φ_m) , la condition (2) est vérifiée.

Cela provient du lemme suivant :

LEMME. - Soit $H_0 = \{f \in \mathcal{L}^2(\Sigma) \mid \int_\Sigma f d\sigma = 0\}$ (H_0 peut être considéré comme l'espace des restrictions à Σ des fonctions de $\overset{0}{G}^{-n}(\Sigma)$), $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H_0 . Alors,

1° $\sum_n |\widehat{\varphi}_{n,\varepsilon,\eta}|^2(\xi)$ est une fonction uniformément bornée sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

2° $\sum_m |\widehat{\varphi}_m|^2(\xi)$ est une fonction constante.

On a en effet

$$\hat{\phi}_n(\xi) = \int_{\Sigma} G(\xi', \theta) \varphi_n(\theta) d\theta, \quad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|},$$

$$\hat{\phi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi) = \int_{\Sigma} F_{\varepsilon\eta}(\theta, \xi) \varphi_n(\theta) d\theta.$$

Soit p la projection orthogonale de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ sur H_0 , on a

$$\sum \hat{\phi}_n(\xi)^2 = \|p(G(\xi', \cdot))\|_{H_0}^2 = \text{Cte},$$

$$\sum \hat{\phi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi) = \|p(F_{\varepsilon\eta}(\cdot, \xi))\|_{H_0}^2 \leq \text{Cte}.$$

En outre, d'après ce qu'on a vu dans l'introduction (alinéa 6) :

$$\sum |\hat{\phi}_n(\xi) - \hat{\phi}_{n,\varepsilon,\eta}(\xi)|^2 = \|p[F_{\varepsilon\eta}(\cdot, \xi) - G(\cdot, \xi')]\|_{H_0}^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty} 0$$

uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Soit donc $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H_0 (*). Alors, les conditions (1) et (2) sont vérifiées. L'égalité (α) traduit une convergence dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ pour chaque x . Pour étudier (β), posons pour un instant :

$$(\beta') \quad \underline{h}_{\varepsilon} f(t, \mathbf{x}) = \sum_m a_m(t) (\varphi_{m,\varepsilon} \star f)(\mathbf{x}).$$

Comme la convolution est une application continue de $\mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2$ dans $C_b(\mathbb{R}^n)$ (munie de la norme de la convergence uniforme), la série (β') converge, pour chaque t , dans $C_b(\mathbb{R}^n)$. Il résulte de la continuité de $t \mapsto h(t, \cdot)$ que la convergence est uniforme sur tout compact par rapport à t . Donc (β) traduit une convergence de fonctions continues et bornées uniforme sur tout compact.

Les lignes (γ), (δ), (ε), prouvent alors que $\underline{h}_{\varepsilon} f \in \mathcal{L}^2$, et que les opérateurs $\underline{h}_{\varepsilon}$ forment une famille équicontinue.

Le même raisonnement prouve que la série $\sum_m a_m(X) (\varphi_m f)(X)$ converge dans \mathcal{L}^2 vers une fonction $\underline{h}f$, et à nouveau les mêmes majorations donnent

$$\|\underline{h}f - \underline{h}_{\varepsilon} f\|_2^2 \leq c^2 \|f\|_2^2 \sum_n |\hat{\phi}_m - \hat{\phi}_{m\varepsilon}|^2 \| \cdot \|_{\infty, A},$$

où la dernière expression représente une norme uniforme sur le support A de \hat{f} .

(*) H_0 étant toujours identifié à $G^{\circ-n} \mathcal{L}^2(\Sigma)$.

Le dernier résultat du lemme montre que $\underline{h}_\varepsilon f$ converge dans \mathcal{L}^2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, dès que \hat{f} a un support compact ne contenant pas l'origine. Or, l'ensemble de ces fonctions est dense dans \mathcal{L}^2 , et les $\underline{h}_\varepsilon$ forment une famille équicontinue, le théorème est complètement démontré.

COROLLAIRE. - Si, de plus, l'application de $\underline{\mathbb{R}}^n$ dans $\mathcal{L}^2(\Sigma)$, $x \mapsto h(x, \cdot)|_\Sigma$ est de classe C_b^m , $m \in \underline{\mathbb{N}}$, alors \underline{h} opère continûment de H^m dans H^m et, pour $\forall \alpha \in \underline{\mathbb{N}}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, il existe des fonctions $h_\alpha^\gamma(X, Z)$, $\gamma \leq \alpha$, telles que :

$$x \mapsto h_\alpha^\gamma(X, \cdot)|_\Sigma$$

$$\underline{\mathbb{R}}^n \rightarrow H_0$$

soit de classe $|\gamma|$ et que $D^\alpha(\underline{h}f) = \sum_{\gamma \leq \alpha} h_\alpha^\gamma(D^\gamma f)$ ($|\alpha| \leq m$).

Démonstration. - Prenons $f \in H^m \cap C^m$ dans la ligne (β) de la démonstration du théorème 1, on peut dériver chaque terme

$$a_n(X)(\omega_{n\varepsilon} * f)(X)$$

suivant la formule de Liebnitz, puis poursuivre les calculs en groupant les termes en $D^\gamma f$. On trouve :

$$D^\alpha(\underline{h}_\varepsilon f) = \sum_{\gamma \leq \alpha} (\underline{h}_\varepsilon)^\gamma_\alpha (D^\gamma f), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m,$$

avec, bien entendu, $h_\alpha^\gamma = \frac{\partial^{|\alpha-\gamma|}}{\partial X^{\alpha-\gamma}} h(X, Z) \cdot \frac{\alpha!}{\gamma! (\alpha-\gamma)!}$. Si ensuite, on fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, les $(\underline{h}_\varepsilon)^\gamma_\alpha f$ convergent dans \mathcal{L}^2 pour tout α , $|\alpha| \leq m$, tout $\gamma \leq \alpha$, et le théorème résulte du fait que H^m est complet (la limite des dérivées égale au sens des distributions la dérivée des limites).

Remarque. - On n'a fait que justifier une dérivation sous le signe "d'intégration en valeur principale".

DEFINITION. - On appelle opérateur intégral singulier de type C_β^∞ un opérateur linéaire borné de \mathcal{L}^2 dans \mathcal{L}^2 , de la forme $Hf = a.f + \underline{h}f$, où a est un opérateur de multiplication par une fonction $a(x) \in C_\beta^\beta$, et \underline{h} l'opérateur associé à une fonction de $G_\beta^{\circ-n}$. On appelle $CZ_\beta^0(\underline{\mathbb{R}}^n)$ l'espace vectoriel qu'ils forment.

DEFINITION. - On appelle symbole de l'opérateur intégral singulier de type $C_\beta^\infty H$ la fonction

$$\sigma_H(X, \xi) = a(X) + \hat{h}(X, \xi).$$

4. Propriétés du symbole.

THÉOREME 2.

(a) L'application $H_0 \mapsto \sigma_H$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de CZ_β^0 sur G_β^0 .

(b) Pour tous $H \in CZ_\beta^0$, $f \in \mathcal{S}$, on peut écrire :

$$Hf(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \sigma_H(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi .$$

(c) Pour tous $H \in CZ_\beta^0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $f \in \mathcal{S}$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda(x,\xi)} H(fe^{i\lambda(\cdot,\xi)})(x) = \sigma_H(x, \xi) f(x) .$$

(d) Il existe une constante A (ne dépendant que de n) telle que, pour tout $H \in CZ_\beta^0$ et $f \in \mathcal{L}^2$,

$$\|Hf\|_2 \leq A.M_H \cdot \|f\|_2 ,$$

où $M_H = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n, |z|=1 \\ |\alpha| \leq n}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \sigma_H(x, z) \right| .$

Démonstration.

(a) et (d) : On a vu que $\underline{G} : h \mapsto \hat{h}$ est un isomorphisme de Fréchet de G_β^{-n} sur G_β^0 , et que \underline{G}^{-1} s'étend en une application continue de G_β^0 dans G_β^{-n} . Ces propriétés s'étendent canoniquement aux espaces :

$$G_\beta^{-n} = C_b^\beta(\mathbb{R}^n, G_\beta^{-n}) \xrightarrow{\underline{G}} G_\beta^0 = C_b^\beta(\mathbb{R}^n, G_\beta^0) ,$$

$$CZ_\beta^0 \simeq C_b^\beta(\mathbb{R}^n, G_\beta^{-n}) \xrightarrow{\text{passage au symbole}} \{\text{symboles}\} = C_b^\beta(\mathbb{R}^n, G_\beta^0) .$$

En effet, $G_\beta^K = G_\beta^K \oplus C^\beta(\mathbb{R}^n)$, d'après la formule

$$f(X, Z) = a(X) + h(X, Z) , \quad a(X) = \int_{\Sigma} f(X, \cdot) d\sigma \in C^\beta(\mathbb{R}^n) , \quad h \in G_\beta^K .$$

Pour (b) et (c), on peut supposer $a(x) \equiv 0$; alors (b) n'est que l'écriture de \hat{h} comme transformée de Fourier au sens des distributions, et (c) résulte du

calcul suivant :

$$\psi(\mathbf{x}, \xi) = e^{-i\lambda \langle \mathbf{x}, \xi \rangle} H(fe^{i\lambda(\cdot, \xi)})(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u - \lambda\xi, \mathbf{x})} \sigma_H(\mathbf{x}, u) \hat{f}(u - \lambda\xi) du ,$$

en posant $u - \lambda\xi = t$,

$$\psi(\mathbf{x}, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\mathbf{x}, t)} \sigma_H(\mathbf{x}, t + \lambda\xi) \hat{f}(t) dt ,$$

or, $\sigma_H(\mathbf{x}, \cdot)$ étant homogène de degré 0 et C^∞ ,

$$\sigma_H(\mathbf{x}, t + \lambda\xi) = \sigma(\mathbf{x}, \xi) + \frac{1}{\lambda} \varphi(\mathbf{x}, t) ,$$

où φ est une fonction à croissance lente en t , ce qui achève la démonstration.
