Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Philippe Courrège

Transformation de Fourier pour les fonctions homogènes de degré $-n$ sur R^n

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A2, p. A1-A15

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A3_0>

2 novembre 1967

TRANSFORMATION DE FOURIER
POUR LES FONCTIONS HOMOGÈNES DE DEGRÉ $-n$ SUR R^n

par Philippe COURRÈGE

1. Notations ; fonctions positivement homogènes sur R^n et fonctions sur la sphère unité Σ_n.

Dans l'espace R^n $(n \geqslant 1)$, on notera $\Sigma = \Sigma_n$ la sphère unité,

$$\Sigma_n = \{z \mid z \in R^n \quad \text{et} \quad |z| = 1\} \quad (^1) ,$$

et $\sigma = \sigma_n$ la mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace compact Σ, invariante par le groupe orthogonal de R^n et donnant lieu à la formule "d'intégration en coordonnées polaires",

$$(1.1) \qquad \int_{R^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty r^{n-1}\, dr \int_{\Sigma_n} f(r\theta)\, \sigma_n(d\theta) ,$$

pour $f \in \mathcal{L}^1(R^n)$ (2), ou f mesurable $\geqslant 0$ (3).

Désignant par s un nombre réel, on notera $G^s = G^s(R^n)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes h sur l'ouvert $R^n \setminus \{0\}$ de R^n $(n \geqslant 1)$, localement sommable et positivement homogènes de degré s : $h \in G^s$ équivaut ainsi à,

(1.2) h est mesurable (4) et $\int_{\varepsilon \leqslant |x| < \eta} |h(x)|\, dx < +\infty$ pour $0 < \varepsilon < \eta < +\infty$, et

(1.3) $h(tx) = t^s\, h(x)$ pour $t > 0$ et $x \in R^n \setminus \{0\}$.

Il résulte de (1.1) que, si $h \in G^s$, sa restriction h_Σ à Σ appartient à $\mathcal{L}^1(\Sigma) = \mathcal{L}^1(\Sigma, \sigma)$ (5), et inversement, que, pour tout $\Omega \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, on définit une

---

(1) $|z|^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \quad (z = (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in R^n)$.

(2) Toutes les fonctions considérées ici seront à valeurs complexes.

(3) La mesure σ, caractérisée par ces propriétés, coïncide avec la "mesure superficielle" euclidienne sur la "surface" Σ.

(4) Relativement à la mesure de Lebesgue.

(5) Ce sont les espaces $\mathcal{L}^p$ $(p = 1, 2, \infty)$ qui figurent et non les espaces L^p: il s'agit de fonctions et non de classes de fonctions.

fonction $h \in G^s$ en posant,

(1.4) $$h(x) = |x|^s \, \Omega(\frac{x}{|x|}) \qquad (x \in R^n \setminus \{0\}) .$$

On notera $G^s_{\mathfrak{L}^2(\Sigma)}$ (resp. $G^s_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)}$) le sous-espace de H^s formé des fonctions $h \in H^s$ telles que,

$$h_\Sigma \in \mathfrak{L}^2(\Sigma) = \mathfrak{L}^2(\Sigma , \sigma) \qquad (\text{resp. } h_\Sigma \text{ est bornée}) \; (^5) \; (^6).$$

Il résulte de (1.1) que, pour $s > -n$ (en particulier pour $s = 0$), toute fonction de $G^s(R^n)$ se prolonge en une fonction de $\mathfrak{L}^1_{Loc}(R^n)$; donc définit une distribution sur R^n .

2. Les résultats à établir sont contenus dans les énoncés suivants :

THÉORÈME 1. - *Soit k une fonction de* $G^{-n}(R^n)$.

(A) *On suppose que* $k \in G^{-n}_{\mathfrak{L}^2(\Sigma)}$ ([7]), *et que,*

(2.1) $$\int_\Sigma k(\theta) \, \sigma(d\theta) = 0 .$$

Alors, la limite,

(2.2) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\eta \uparrow +\infty} \int_{\varepsilon \leq |x| < \eta} e^{-i(x,\xi)} \, k(x) \, dx = \hat{k}(\xi) \quad (^8)$$

existe (dans $\underset{\sim}{C}$) *pour tout* $\xi \in R^n \setminus \{0\}$; *la fonction* $\hat{k}$ *définie par (2.2) appartient à* $G^0_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)}$, *et on a*

(2.3) $$\int_\Sigma \hat{k}(\theta) \, \sigma(d\theta) = 0 .$$

En outre, il existe une constante $C > 0$ *telle que,*

(2.4) $$\left|\int_{\varepsilon \leq |x| < \eta} e^{-i(x,\xi)} \, k(x) \, dx\right| \leq C \qquad \textit{pour tout } \varepsilon , \eta \textit{ et } \xi ,$$

avec $0 < \varepsilon < \eta < +\infty$ *et* $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

(B) *Si, de plus,* $k \in G^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)}$, *la fonction* $\hat{k}$ *est continue sur* $R^n \setminus \{0\}$.

---

(6) Σ étant compact, on a $\mathfrak{L}^\infty(\Sigma) \subset \mathfrak{L}^2(\Sigma) \subset \mathfrak{L}^1(\Sigma)$.

(7) Voir la remarque à la fin du § 4 ci-dessous.

(8) $(x , \xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \xi_i \quad (x \in R^n , \; y \in R^n)$.

On notera dans la suite $\overset{\circ}{G}{}^{s}_{\mathcal{L}^p(\Sigma)}$ $(p = 2 \text{ ou } p = \infty)$ le sous-espace de $G^{s}_{\mathcal{L}^p(\Sigma)}$ formé des fonctions k telles que $\int_\Sigma k(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0$.

La fonction bornée $\hat{k}$ définie par la relation (2.2) est effectivement la transformée de Fourier d'une distribution tempérée (c'est-à-dire d'un élément de $\mathcal{S}'$) :

THÉORÈME 2. - Soit k une fonction de $G^{-n}(R^n)$.

(A) Pour que la limite,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} k(x)\, f(x)\, dx = \langle Vpk\ ,\ f\rangle \quad (2.5)$$ (9)

existe pour tout $f \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit que,

$$\int_\Sigma k(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0\ ; \quad (2.6)$$

et alors, la forme linéaire $Vpk : f \to \langle Vpk\ ,\ f\rangle$ ainsi définie sur $\mathcal{S}$ est une distribution tempérée.

(B) Pour tout $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$, la transformée de Fourier $\widehat{Vpk}$ de la distribution tempérée Vpk (10) coïncide avec la fonction bornée $\hat{k}$ définie par la relation (2.2) : autrement dit,

$$\langle Vpk\ ,\ f\rangle = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \hat{k}(\xi)\, \hat{f}(-\xi)\, d\xi \qquad (f \in \mathcal{S})\ . \quad (2.7)$$

La distribution Vpk définie par la relation (2.5) sera appelée la distribution en valeur principale associée à k (ou seulement valeur principale de k ; voir SCHWARTZ [6], pages 38 à 48).

Enfin, le théorème 3 ci-dessous précise la manière dont la régularité de k hors de l'origine commande celle de $\hat{k}$, tandis que le théorème 4 donne une forme explicite à la transformation $k_\Sigma \to \hat{k}_\Sigma$:

THÉORÈME 3. - L'application $k \to \hat{k}$ est une bijection de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ sur $\overset{\circ}{G}{}^{0}_{\mathcal{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$.

---

(9) L'intégrale au premier membre est absolument convergente ainsi que le montre (1.1) grâce à l'homogénéité de k et à la décroissance à l'infini de $f \in \mathcal{S}$.

(10) Avec la convention adoptée par HÖRMANDER [4] :

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-i(x,\xi)}\, f(x)\, dx \qquad \text{pour } f \in \mathcal{L}^1(R^n)\ .$$

THÉORÈME 4. - Pour $\theta \in \Sigma$, $\theta' \in \Sigma$, on pose,

(2.8) $G(\theta , \theta') = \log \frac{1}{|(\theta , \theta')|} - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\theta , \theta')$ si $(\theta , \theta') \neq 0$ (11) ,

et

(2.9) $$G(\theta , \theta') = 0 \quad \text{si} \quad (\theta , \theta') = 0 .$$

Alors,

(A) G est un noyau symétrique de carré sommable sur Σ tel que,

(2.10) $$\sup_{\theta\in\Sigma} \int_{\Sigma} |G(\theta , \theta')|^p \sigma(d\theta') < +\infty \qquad (1 \leq p < +\infty) ,$$

et on a,

(2.11) $$\hat{k}(\theta) = \int_{\Sigma} G(\theta , \theta') k(\theta') \sigma(d\theta') ,$$

pour tout $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ et tout $\theta \in \Sigma$ (12).

(B) Pour tout $\theta_0 \in \Sigma$,

(2.12) $$\lim_{\theta\to\theta_0} \int_{\Sigma} |G(\theta , \theta') - G(\theta_0 , \theta')| \sigma(d\theta') = 0 \quad (13) .$$

On verra dans l'exposé n° 3 de ce séminaire [8] comment la décomposition spèctrale (14) de l'opérateur symétrique compact $\underset{\sim}{G}$ de $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ dans lui-même associé au noyau G (15) est étroitement liée à la théorie des harmoniques sphériques et permet d'établir le théorème 3 ci-dessus sans appel à la théorie des distributions ainsi qu'on le fait ci-dessous au § 7.

3. Un lemme sur lequel reposent les théorèmes 1 et 4.

LEMME. - (A) Soit φ la fonction sur $[0 , +\infty)$ définie par $\varphi(\rho) = 1$ pour

---

(11) $\operatorname{Sgn} \gamma = 1$ si $\gamma > 0$ et $\operatorname{Sgn} \gamma = -1$ si $\gamma < 0$.

(12) Cette propriété a été annoncée par GIRAUD dans [3] en 1936.

(13) Seul le cas où $n \geq 2$ est en cause ici : dans le cas $n = 1$, toutes les fonctions $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-1}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ sont de la forme $k(x) = \frac{a}{x}$ où $a \in \underset{\sim}{C}$, avec comme transformée de Fourier $\hat{k}(\xi) = - i\pi a \frac{\xi}{|\xi|}$ (calculée au moyen de (2.8) et (2.11) qui restent valables).

(14) Voir RIESZ et NAGY [5], n° 93, page 229.

(15) Voir l'exposé n° 1 de ce séminaire.

$\rho \leqslant 1$ <u>et</u> $\varphi(\rho) = 0$ <u>pour</u> $\rho > 1$.

<u>Alors, il existe une contante</u> $C \geqslant 0$ <u>telle que, pour tout</u> α , β , γ <u>avec</u> $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$, $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$ <u>et</u> $\gamma \neq 0$, <u>on ait,</u>

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{e^{-i\rho\gamma} - \varphi(\rho)}{\rho}\, d\rho\right| \leqslant \log \frac{1}{|\gamma|} + C \ . \tag{3.1}$$

<u>En fait, on peut prendre</u>

$$C = \sup_{R \geqslant 1} \left|\int_1^R \frac{e^{-i\rho}}{\rho}\, d\rho\right| + 1 \ .$$

(B) <u>Pour tout</u> γ <u>tel que</u> $-1 \leqslant \gamma \leqslant 1$ <u>et</u> $\gamma \neq 0$, <u>on a,</u>

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \lim_{\beta \uparrow +\infty} \left\{\int_\alpha^\beta \frac{e^{-i\rho\gamma}}{\rho}\, d\rho - \int_\alpha^\beta \frac{\cos \rho}{\rho}\, d\rho\right\} = \log \frac{1}{|\gamma|} - i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \gamma \ . \tag{3.2}$$

En effet ([16]), en ce qui concerne (A), on note que

$$C_1 = \sup_{R \geqslant 1} \left|\int_1^R \frac{e^{-i\rho}}{\rho}\, d\rho\right| = \sup_{R \geqslant 1} \left|\int_1^R \frac{e^{i\rho}}{\rho}\, d\rho\right| < +\infty \ ,$$

et on suppose d'abord que $0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta$. On a alors,

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{e^{-i\rho\gamma} - \varphi(\rho)}{\rho}\, d\rho = \int_\alpha^1 \frac{e^{-i\rho\gamma} - 1}{\rho}\, d\rho + \int_1^\beta \frac{e^{-i\rho\gamma}}{\rho}\, d\rho = I_1 + I_2 \ .$$

L'inégalité, $|e^{it} - 1| \leqslant t$ entraîne, d'une part, que $|I_1| \leqslant |\gamma| \leqslant 1$. D'autre part, le changement de variable $\rho = \frac{1}{|\gamma|} r$ donne, avec $\omega = \operatorname{sgn} \gamma$,

$$I_2 = \int_{|\gamma|}^{|\gamma|\beta} \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, dr \ ;$$

et, par conséquent,

$$|I_2| \leqslant \int_{|\gamma|}^1 \frac{dr}{r} = \log \frac{1}{|\gamma|} \qquad \text{si} \quad |\gamma|\beta \leqslant 1 \ ,$$

et

$$|I_2| \leqslant \log \frac{1}{|\gamma|} + C_1 \ , \qquad \text{si} \quad |\gamma|\beta \geqslant 1 \ ;$$

d'où (3.1) pour $0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta$.

([16]) Voir ZYGMUND [9], pages 480 et 482.

Lorsque $\beta \leqslant 1$, on a,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-i\rho\gamma} - 1}{\rho} d\rho \ ;$$

d'où $|I| \leqslant 1$, comme ci-dessus pour $|I_1|$. Enfin, lorsque $1 \leqslant \alpha$, on a,

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-i\rho\gamma}}{\rho} d\rho \ ;$$

donc, comme ci-dessus pour I_2 ,

$$I = \int_{|\gamma|\alpha}^{1} \frac{e^{-i\varepsilon r}}{r} dr + \int_{1}^{|\gamma|\beta} \frac{e^{-i\omega r}}{r} dr = I_3 + I_4 \ ;$$

d'où le résultat, puisque $|I_4| \leqslant C_1$ et

$$|I_3| \leqslant \int_{|\gamma|\alpha}^{1} \frac{dr}{r} \leqslant \log \frac{1}{|\gamma|\alpha} \leqslant \log \frac{1}{|\gamma|}$$

en vertu de ce que $\alpha \geqslant 1$.

En ce qui concerne (B), en vertu de la convergence des intégrales $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-i\rho\gamma}}{\rho}$ et $\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \rho}{\rho} d\rho$ $(\alpha > 0 \ , \ \gamma \neq 0)$, on est ramené à l'étude de $\lim_{\alpha \downarrow 0} J(\alpha , \gamma)$, où $J(\alpha , \gamma) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-i\gamma\rho}}{\rho} d\rho - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos \rho}{\rho} d\rho$. Or, faisant dans la première intégrale le changement de variable $\rho = \frac{1}{|\gamma|} r$, on obtient,

$$J(\alpha , \gamma) = \int_{|\gamma|\alpha}^{\infty} \frac{e^{-ir \operatorname{sgn}\gamma}}{r} dr - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos r}{r} dr$$

$$= \int_{|\gamma|\alpha}^{\alpha} \frac{\cos r - 1}{r} dr + \int_{|\gamma|\alpha}^{\alpha} \frac{dr}{r} - i \operatorname{sgn} \gamma \int_{|\gamma|\alpha}^{\infty} \frac{\sin r}{r} dr \ .$$

D'où le résultat annoncé, car, lorsque α tend vers zéro, la première intégrale tend vers 0 et la troisième vers $- i\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \gamma$, tandis que la seconde reste égale à $\log \frac{1}{|\gamma|}$.

C. Q. F. D.

4. Démonstration des théorèmes 1 et 4 (17).

Désignant par k une fonction de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^2(\Sigma)}$, et utilisant la formule (1.1) d'intégration en coordonnées polaires, on obtient,

(17) Voir ZYGMUND [9], pages 481 à 483.

$$\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \int_{\varepsilon\leq|x|<\eta} e^{-i(x,\xi)}\ k(x)\ dx = \int_{\varepsilon}^{\eta} r^{n-1}\ dr \int_{\Sigma} e^{-ir(\theta,\xi)}\ k(r\theta)\ \sigma(d\theta)\ ;$$

$$= \int_{\Sigma} k(\theta)\ \sigma(d\theta) \int_{\varepsilon|\xi|}^{\eta|\xi|} \frac{e^{-i\rho(\theta,\xi')}}{\rho}\ d\rho\ , \qquad \text{avec} \quad \xi' = \frac{\xi}{|\xi|} \quad (\xi \neq 0)\ ,$$

en tenant compte de l'homogénéité de k (relation (1.3)) et en faisant le changement de variable $r = \frac{1}{|\xi|}\rho$. Tenant compte alors de (2.1), on peut écrire,

$$(4.1) \quad \hat{k}_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \int_{\Sigma} k(\theta)\ \sigma(d\theta)\ \left\{\int_{\varepsilon|\xi|}^{\eta|\xi|} \frac{e^{-i\rho(\theta,\xi')} - \varphi(\rho)}{\rho}\ d\rho + \int_{\varepsilon|\xi|}^{\eta|\xi|} \frac{\varphi(\rho) - \cos\rho}{\rho}\ d\rho\right\},$$

où la fonction φ est définie comme dans le lemme du § 3 ci-dessus. Cela étant, d'une part, en vertu de la propriété (A) du même lemme, le module de la quantité $F_{\varepsilon,\eta}(\theta , \xi)$, entre accolades dans (4.1), est majorée par,

$$M(\theta\ ,\ \xi) = \log \frac{1}{|(\theta\ ,\ \xi')|} + C + C'\ ,$$

où

$$C' = \sup_{0<\alpha\leq\beta<+\infty} \left|\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\rho) - \cos\rho}{\rho}\ d\rho\right| < +\infty\ .$$

En outre, la fonction $M(.\ ,\ \xi)$ appartenant à $\mathcal{L}^2(\Sigma)$ (voir l'appendice à la fin de l'exposé) ainsi que k_Σ par hypothèse [18], la fonction $k_\Sigma F_{\varepsilon,\eta}(.\ ,\ \xi)$ est majorée, en module, par la fonction $|k_\Sigma| M(.\ ,\ \xi)$ qui est sommable sur Σ , et on a,

$$\left|\int_{\Sigma} k(\theta)\ F_{\varepsilon,\eta}(\theta\ ,\ \xi)\ \sigma(d\theta)\right| \leq \|k_\Sigma\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}\ \|M(.\ ,\ \xi)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}\ ,$$

où le terme $\|M(.\ ,\ \xi)\|_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$ est une constante d'après le corollaire de l'appendice, puisque $M(\theta\ ,\ \xi)$ ne dépend que du produit scalaire $(\theta\ ,\ \xi')$. D'où la majoration (2.4) du théorème 1.

D'autre part, en vertu de la propriété (B) du lemme,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{\eta\uparrow+\infty}\ F_{\varepsilon,\eta}(\theta\ ,\ \xi) = \log \frac{1}{|(\theta\ ,\ \xi')|} - i\frac{\pi}{2}\ \mathrm{sgn}(\theta\ ,\ \xi')$$

$$= G(\theta\ ,\ \xi')\ , \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \Sigma \quad \text{tel que} \quad (\theta\ ,\ \xi') \neq 0\ ,$$

c'est-à-dire σ-presque-partout sur Σ . Le théorème de convergence dominée de

---

[18] Voir la remarque à la fin de ce numéro.

Lebesgue montre donc que,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\eta\uparrow+\infty}\hat{k}_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \int_\Sigma G(\xi' , \theta)\, k(\theta)\, \sigma(d\theta) ,$$

pour tout $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ (avec $\xi' = \frac{\xi}{|\xi|}$).

Les relations (2.2) et (2.4) (théorème 1) et la relation (2.11) (théorème 4) sont ainsi établies, compte tenu de la relation (2.10) qui résulte du corollaire de l'appendice et de ce que $G(\theta , \theta')$ ne dépend que du produit scalaire (θ , θ') ; et la relation (2.3) est alors conséquence de cette dernière propriété et de (2.11) par application du théorème de Fubini.

Enfin, lorsque $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)}$, la continuité de $\hat{k}$ sur $R^n \setminus \{0\}$ résulte de la propriété (B) du noyau G (théorème 4). Pour établir cette propriété, on peut procéder comme suit : Pour chaque $f \in \mathfrak{L}^1(\Sigma)$ et chaque transformation orthogonale α de R^n, on pose $f_\alpha(\theta) = f(\alpha\theta)$ $(\theta \in \Sigma)$; et on a, en désignant par ε l'application identique de R^n sur lui-même,

(4.2)
$$\lim_{\alpha\to\varepsilon} \|f_\alpha - f\|_{\mathfrak{L}^1(\Sigma)} = 0 .$$

(Cette relation est immédiate lorsque $f \in C(\Sigma)$, et s'étend à une fonction $f \in \mathfrak{L}^1(\Sigma)$ en considérant une suite (g^n) de fonctions de $C(\Sigma)$ telle que $\|f - g^n\|_{\mathfrak{L}^1(\Sigma)} \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout n, et en remarquant que,

$$\|f_\alpha - g^n_\alpha\|_{\mathfrak{L}^1(\Sigma)} = \|f - g^n\|_{\mathfrak{L}^1(\Sigma)} ,$$

en vertu de l'invariance de σ par la transformation orthogonale α.)

La relation (4.2) entraîne alors (2.12) en remarquant que,

$$\begin{aligned} G(\theta , \theta') - G(\theta_0 , \theta') &= G(\alpha\theta_0 , \theta') - G(\theta_0 , \theta') \\ &= G(\theta_0 , \alpha\theta') - G(\theta_0 , \theta') , \end{aligned}$$

pour toute transformation orthogonale α de R^n telle que $\alpha\theta_0 = \theta$.

C. Q. F. D.

Remarque. - Pour chaque $\xi \neq 0$, la fonction $M(. , \xi)$ appartient à $\mathfrak{L}^q(\Sigma)$ pour tout $q \geqslant 1$. Il en résulte que la conclusion du théorème 1 subsiste si on suppose seulement que $k_\Sigma \in \mathfrak{L}^p(\Sigma)$ pour un nombre $p > 1$. On peut même encore affaiblir cette hypothèse (voir ZYGMUND [7], théorème 11, page 482).

5. Distribution en valeur principale associée à une fonction $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{L}^2(\Sigma)}$: démonstration du théorème 2.

Soient k une fonction de $G^{-n}(R^n)$ et $f \in \mathcal{S}$. On peut écrire, pour $\varepsilon < 1$,

$$(5.1)\quad \int_{|x|\geq\varepsilon} k(x)\ f(x)\ dx = \int_{1>|x|\geq\varepsilon} k(x)\ [f(x) - f(0)]\ dx + \int_{|x|\geq 1} k(x)\ f(x)\ dx$$
$$+ f(0) \log\frac{1}{\varepsilon} \int_\Sigma k(\theta)\ \sigma(d\theta)\ ,$$

puisque

$$\int_{1>|x|\geq\varepsilon} k(x)\ dx = \int_\varepsilon^1 r^{n-1}\ dr \int_\Sigma k(r\theta)\ \sigma(d\theta)$$
$$= \log\frac{1}{\varepsilon}\int_\Sigma k(\theta)\ \sigma(d\theta)$$

d'après (1.1) et l'homogénéité de k .

Cela étant, on remarque d'abord que le premier terme dans (5.1) a une limite lorsque ε tend vers 0 en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque,

$$\int_{|x|<1} |k(x)|\,|f(x) - f(0)|\ dx \leq \sum_{j=1}^n \sup_{x\in R^n} |D_j\ f(x)| \int_{|x|<1} |k(x)|\,|x|\ dx \quad (^{19}),$$

où la fonction $x \to |k(x)|\,|x|$ appartient à G^{1-n} , donc à $\mathcal{L}^1_{Loc}(R^n)$ (§ 1). Il en résulte que, pour que le premier membre de (5.1) ait une limite lorsque ε tend vers 0 , et ceci pour tout $f \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\int_\Sigma k(\theta)\ \sigma(d\theta) = 0$. En outre, lorsque cette condition est satisfaite, on a,

$$(5.2)\quad \langle Vpk\ ,\ f\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} k(x)\ f(x)\ dx = \int_{|x|<1} k(x)\ [f(x) - f(0)]\ dx$$
$$+ \int_{|x|\geq 1} k(x)\ f(x)\ dx\ .$$

D'où, la majoration,

$$|\langle Vpk\ ,\ f\rangle| < \sum_{i=1}^n \sup_{x\in R^n} |D_i\ f(x)| \int_{|x|<1} |k(x)|\,|x|\ dx$$
$$+ \sup_{x\in R^n} |x|\,|f(x)| \int_{|x|\geq 1} |k(x)|\,|x|^{-1}\ dx\ ,$$

---

(19) $D_j\ f(x) = -\ i\ \frac{\partial f}{\partial nj}(x) \quad (1 \leq j \leq n)$.

qui montre que la forme linéaire Vpk est continue pour la topologie de $\mathcal{S}$, donc appartient à $\mathcal{S}'$. D'où la propriété (A) du théorème 2.

Afin d'établir la propriété (B), on désigne par φ une fonction de $\mathcal{S}$, et on calcule $\langle \widehat{Vpk}, \varphi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{Vpk}, \varphi\rangle &= \langle Vpk, \hat{\varphi}\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\eta\uparrow+\infty} \int_{\varepsilon\leq|x|<\eta} k(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\eta\uparrow+\infty} \int_{\varepsilon\leq|x|<\eta} k(x)\,dx \int_{R^n} e^{-i(x,\xi)}\,\varphi(\xi)\,d\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\eta\uparrow+\infty} \int_{R^n} \varphi(\xi)\,d\xi \int_{\varepsilon\leq|x|<\eta} e^{-i(x,\xi)}\,k(x)\,dx ,
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Fubini, puisque

$$\int_{R^n} |\varphi(\xi)|\,d\xi \int_{\varepsilon\leq|x|<\eta} |k(x)|\,dx < +\infty .$$

Utilisant alors la majoration (2.4) du théorème 1 ainsi que le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient,

$$\langle \widehat{Vpk}, \varphi\rangle = \int_{R^n} \hat{k}(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi .$$

D'où (2.7) et le théorème 2, compte tenu de ce que $f = (2\pi)^{-n}\,\hat{\check{f}}$ ($f\in\mathcal{S}$, $\check{f}(x) = f(-x)$).

6. Les dérivées des fonctions de $G^{1-n}\cap C^1(R^n\setminus\{0\})$ sont dans $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{E}^\infty(\Sigma)}$:

LEMME. - *Soit* h *une fonction de* $G^s\cap C^1(R^n\setminus\{0\})$ (s *réel*). *Alors,*

(A) *Les fonctions* $D_j\,h$ ($1\leq j\leq n$) *appartiennent à* G^{s-1} [20].

(B) *Plus spécialement, si* $s = 1-n$, *les fonctions* $D_j\,h$ ($1\leq j\leq n$) *appartiennent à* $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathcal{E}^\infty(\Sigma)}$; *autrement dit,*

$$\int_\Sigma D_j\,h(\theta)\,\sigma(d\theta) = 0 \qquad (1\leq j\leq n) . \tag{6.1}$$

La propriété (A) s'obtient immédiatement en dérivant les deux membres de (1.3).

---

[20] $D_j = -i\partial/\partial x_j$.

Pour établir la propriété (B) [21], on désigne par φ une fonction de $C^1(R)$ nulle hors du segment $[1 , 2]$ et telle que,

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\rho)}{\rho}\, d\rho = 1 .$$

Une intégration par parties donne alors,

$$\int_{R^n} D_j\, h(x)\ \varphi(|x|)\ dx = i \int_{R^n} h(x)\ \varphi'(|x|)\ \frac{x_j}{|x|}\, dx \quad (22). \tag{6.2}$$

D'où, en calculant les deux membres de (6.2) en coordonnées polaires, et en tenant compte des propriétés d'homogénéité de h et $D_j\, h$,

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\rho)}{\rho}\, d\rho \int_\Sigma D_j\, h(\theta)\ \sigma(d\theta) = i \int_0^\infty \varphi'(\rho)\ d\rho \int_\Sigma h(\theta)\ \theta_j\ \sigma(d\theta) .$$

D'où (6.1), compte tenu de ce que

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\rho)}{\rho}\, d\rho = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty \varphi'(\rho)\ d\rho = 0 .$$

C. Q. F. D.

7. Démonstration du théorème 3 [23].

Si $u \in \mathcal{S}'(R^n)$, on notera $\tilde{D}_j\, u$, $\tilde{D}^\alpha\, u$ $(\alpha \in N^n)$ les dérivées de u au sens des distributions, et, si $h \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$, $D_j\, h$, $D^\alpha\, h$ les dérivées ordinaires de h [24] (ce sont aussi des fonctions de $C^\infty(R^n \setminus \{0\})$). On rappelle, par ailleurs, que, si $u \in \mathcal{S}'$, on a (avec la convention faite par HÖRMANDER dans [4] pour la transformation de Fourier $u \to \hat{u}$) :

$$\widehat{\tilde{D}_j\, u} = X_j\, \hat{u} \qquad \text{et} \qquad \tilde{D}_j\, \hat{u} = -\, X_j\, u \qquad (1 \leq j \leq n) , \tag{7.1}$$

où X_j désigne la projection $x \to x_j$.

On déduit en particulier de (7.1) par itération que

$$\widehat{\tilde{D}^\alpha(X^\beta\, u)} = (-\,1)^{|\beta|}\ X^\alpha\ \tilde{D}^\beta\ \hat{u} \quad (25).$$

---

(21) Voir AGMON [1], page 152.

(22) $D_j = -\, i\partial/\partial x_j$

(23) Voir CALDERÓN [2], § 5.

(24) Avec les conventions : $D_j\, h = -\, i\partial h/\partial x_j$, et
$\langle \tilde{D}_j\, u\ ,\ \varphi\rangle = -\ \langle u\ ,\ D_j\, \varphi\rangle \quad (u \in \mathcal{S}' ,\ \ \varphi \in \mathcal{S})$.

(25) $X^\beta(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j} \quad (x \in R^n)$.

Cela étant, soit d'abord k une fonction de $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$. On va montrer que $\hat{k} \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$: Désignant par α et β des indices de dérivation tels que $|\alpha| = |\beta|$, on déduit du lemme du § 6 que $D^\alpha(X^\beta k) \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)}$; et il résulte immédiatement de la définition de la valeur principale que la distribution

$$\tilde{D}^\alpha(X^\beta \, \mathrm{Vp}k) - \mathrm{Vp}(D^\alpha(X^\beta k))$$

a pour support $\{0\}$, donc est de la forme $\sum_{|\gamma|\leq m} a_\gamma \tilde{D}^\gamma \delta$. Passant aux transformées de Fourier, et tenant compte de (7.2) et de ce que $\widehat{\mathrm{Vp}k} = \hat{k}$, on obtient donc

$$(7.3) \qquad (-1)^{|\beta|} X^\alpha \tilde{D}^\beta \hat{k} = \widehat{D^\alpha(X^\beta k)} + \sum_{|\gamma|\leq m} a_\gamma X^\gamma .$$

Remarquant alors que les fonctions $\widehat{D^\alpha(X^\beta k)}$ sont continues sur $R^n \setminus \{0\}$ (théorème 1, propriété (B)), et faisant varier α et β (avec $|\alpha| = |\beta|$), on déduit de (7.3) que $\hat{k}$ a toutes ses dérivées (au sens des distributions) qui coïncident sur $R^n \setminus \{0\}$ avec des fonctions continues. La fonction $\hat{k}$ étant elle-même continue sur R^n $\{0\}$ (théorème 1, propriété (B)), il en résulte que $\hat{k} \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ (voir par exemple HÖRMANDER [4], théorème 1.4.2, page 10).

<u>Inversement</u>, soit $h \in \overset{\circ}{G}{}^{0}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$. On va construire une fonction $k \in \overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ telle que $\hat{k} = h$. Pour cela, on remarque que h définit une distribution tempérée, et on pose

$$(7.4) \qquad u = (2\pi)^{-n} \hat{\hat{h}} ,$$

de sorte que l'on a,

$$(7.4') \qquad u \in \mathcal{S}' \quad \text{et} \quad \hat{u} = h .$$

D'abord, u coïncide sur $R^n \setminus \{0\}$ avec une fonction $k \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$: en effet, désignant par α un indice de dérivation tel que $|\alpha| = n$, on a, d'une part, d'après (7.2)

$$(7.5) \qquad \widehat{\tilde{D}^\alpha \check{h}} = X^\alpha \hat{\hat{h}} ;$$

D'autre part, en vertu du lemme du § 6, la fonction $D^\alpha \check{h}$ appartient à $\overset{\circ}{G}{}^{-n}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$., donc, en vertu de la première partie de la démonstration, $\widehat{D^\alpha \check{h}}$ appartient à $\overset{\circ}{G}{}^{0}_{\mathfrak{L}^\infty(\Sigma)} \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$. Enfin, la distribution $\tilde{D}^\alpha \check{h} - \mathrm{Vp}(D^\alpha \check{h})$ a pour support $\{0\}$, donc est de la forme $\sum_{|\gamma|\leq m} a_\gamma \delta^\gamma$. Passant aux transformées de Fourier, et tenant compte de (7.5) et (7.4), on obtient donc

$$(7.6) \qquad (2\pi)^n X^\alpha u = \widehat{D^\alpha \check{h}} + \sum_{|\gamma|\leq m} a_\gamma X^\gamma .$$

D'où il résulte, en faisant varier α (avec $|\alpha| = n$), que u coïncide sur $R^n \setminus \{0\}$ avec une fonction $k \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$.

On va montrer que k répond à la question. Tout d'abord k est homogène de degré $-n$: il suffit pour le voir d'établir que, dans (7.6) le polynôme $\sum_{|\gamma| \leq m} a_\gamma X^\gamma$ est, en fait de degré 0 ; ce qui résulte de ce que les distributions $X^\alpha u$ et $\widehat{D^\alpha \check{h}}$ sont toutes deux homogènes de degré 0 , c'est-à-dire de ce que, pour $\varphi \in \mathcal{S}$ et $T = X^\alpha u$ ou $T = \widehat{D^\alpha \check{h}}$, on a

$$\langle T , \varphi_t \rangle = t^{-n} \langle T , \varphi \rangle \qquad (t > 0) ,$$

φ_t désigne la fonction $x \to \varphi(tx)$. Ensuite $\int_\Sigma k(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0$: en effet, soient $\psi \in C^\infty([0 , \infty))$ une fonction > 0 sur $]1 , 2[$ et nulle hors de $[1 , 2]$, et $\varphi \in \mathcal{S}$ la fonction radiale $x \to \psi(|x|)$. On a, d'une part,

$$(7.7) \qquad \langle u , \varphi \rangle = \int_{|x| \geq 1} k(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_1^2 \frac{\psi(\rho)}{\rho}\, d\rho \int_\Sigma k(\theta)\, \sigma(d\theta) ,$$

en vertu de (1.1) et de l'homogénéité de k . D'autre part, d'après (7.4),

$$(7.8) \qquad \langle u , \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \hat{\check{h}} , \varphi \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \check{h} , \hat{\varphi} \rangle$$
$$= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \check{h}(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = 0$$

d'après (1.1) puisque $\hat{\varphi}$ est une fonction radiale comme φ et que $\int_\Sigma \check{h}(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0$ par hypothèse. D'où $\int_\Sigma k(\theta)\, \sigma(d\theta) = 0$, en comparant (7.7) et (7.8).

Pour conclure, il suffit, en vertu de (7.4) et du théorème 2 de montrer que

$$(7.9) \qquad u = \mathrm{Vp}k .$$

Or, $u - \mathrm{Vp}k$ étant une distribution de support contenu dans $\{0\}$, $\hat{u} - \widehat{\mathrm{Vp}k} = h - \hat{k}$ coïncide sur $R^n \setminus \{0\}$ avec un polynôme qui se réduit à une constante puisque h et $\hat{k}$ sont bornées, laquelle ne peut être que nulle puisque h et $\hat{k}$ sont d'intégrale nulle sur Σ .

C. Q. F. D.

Appendice

Désintégration de la mesure σ_n sur la sphère unité Σ_n par rapport à la projection sur un grand cercle

THÉORÈME. - Supposant $n \geq 2$, on désigne par θ_0 un point de Σ_n , et par $\omega : x \to \tilde{x}$ une isométrie (pour les structures euclidiennes canoniques) de R^{n-1}

sur l'hyperplan de R^n orthogonal à θ_0 ([26]). Alors, pour $f \in C(\Sigma_n)$,

$$(A.1) \quad \int_{\Sigma_n} f(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = \int_0^\pi (\sin\psi)^{n-2}\, d\psi \int_{\Sigma_{n-1}} f(\cos\psi\theta_0 + \sin\psi\tilde{\xi})\, \sigma_{n-1}(d\xi) .$$

(En langage de nos pères, $d\theta = (\sin\psi)^{n-2}\, d\psi\, d\xi$!)

On peut établir facilement (A.1) à partir de l'expression de l'élément d'aire d'une variété plongée dans R^n qui figure dans le cours de SCHWARTZ [7] (page 683, formule IV 10.6).

COROLLAIRE. - Soit g une fonction borélienne complexe définie sur $R =]-\infty, +\infty[$ Pour que la fonction $\theta \to g((\theta, \theta_0))$ soit dans $\mathcal{L}^1(\Sigma_n, \sigma_n)$ $(n \geq 2)$, il faut et il suffit que,

$$(A.2) \qquad \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^{(n-3)/2}\, |g(u)|\, du < +\infty ;$$

et l'intégrale $\int_{\Sigma_n} g((\theta, \theta_0))\, \sigma_n(d\theta)$ est alors indépendante de θ_0 $(\theta_0 \in \Sigma_n)$.

(Faire le changement de variable $\psi = \operatorname{Arc}\cos u$.)

Application : Pour tout $q \geq 1$, l'intégrale $\int_{\Sigma_n} (\log \frac{1}{|(\theta, \theta_0)|})^q\, \sigma_n(d\theta)$ est finie et indépendante de $\theta_0 \in \Sigma_n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).

[2] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matematica, 3).

[3] GIRAUD (Georges). - Sur une classe générale d'équations à intégrales principales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 202, 1936, p. 2124-2127.

[4] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[5] RIESZ (Frédéric) et NAGY (Béla Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 3e éd. - Budapest et Szeged, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.

[6] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Nouvelle édition. - Paris, Hermann, 1966 (Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9-10).

([26]) L'image de Σ_{n-1} par ω est ainsi "le grand cercle" de Σ_n orthogonal à θ_0 .

[7] SCHWARTZ (Laurent). - Cours d'analyse, professé à l'Ecole Polytechnique, en 1959/60.

[8] Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 7e année, 1967/68. - Paris, Secrétariat mathématique, 1969.

[9] ZYGMUND (Antoni). - On singular integrals, Rend. Mat. e Appl., Univ. Roma, Serie 5, t. 16, 1957, p. 468-505.