Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Paul Gérardin

Décomposition des fonctions de carré sommable sur un espace homogène (cas d'un groupe compact)

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A10, p. A1-A12

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A11_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
7e année, 1967/68, n° A.10

8 et 15 février 1968

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS DE CARRÉ SOMMABLE SUR UN ESPACE HOMOGÈNE (cas d'un groupe compact)

par Paul GÉRARDIN

1. Enoncé du théorème.

1.1. - Soient E un espace topologique séparé, et G un groupe compact qui opère sur E, c'est-à-dire

(1) l'application de $G \times E$ dans E qui associe $g.x$ à (g, x) est continue ;

(2) $g.(h.x) = gh.x$ et $1.x = x$ quels que soient g et $h \in G$ et $x \in E$, où 1 désigne l'élément neutre du groupe.

L'action de G sur E décompose cet espace en orbites : sur chacune, G opère transitivement. Si X est une orbite, (1) montre qu'elle est compacte ; prenons un $x_0 \in X$, et appelons K le sous-groupe, fermé, des $g \in G$ tels que $g.x_0 = x_0$. Si on munit l'espace homogène des classes à gauche de G suivant K de la topologie quotient, on a un espace compact G/K muni d'une application continue bijective sur l'orbite X ; il en résulte un homéomorphisme

(3) $G/K = X$, qui transporte en translations à gauche sur les classes l'action de G sur X : $s.(gK) = sgK$.

Ainsi, lorsqu'un groupe compact G opère sur un espace topologique E, celui-ci est décomposé en orbites compactes, et l'action de G se ramène aux translations sur des espaces homogènes G/K où K est un sous-groupe fermé.

Exemple. - L'espace E est l'espace euclidien à n dimensions, et $G = O(n)$ est le groupe orthogonal. Les orbites sont alors les sphères de centre l'origine.

1.2. - Rappelons la forme suivante du théorème de Haar ([3], chap. II, § 7, 8 et 9) :

Soient G un groupe compact, et X un espace topologique (séparé) sur lequel G opère transitivement (autrement dit, X est un espace homogène). Il existe sur X une mesure (positive) dx telle que, pour toute fonction f continue sur X, on ait

(4) $$\int_X f(s.x)\,dx = \int_X f(x)\,dx\ ,\qquad \underline{\text{quel que soit}}\quad s \in G\ ,\quad f \in L(X)\ ,$$

<u>et cette mesure est unique à une constante positive près.</u>

En faisant opérer G sur lui-même par translations à gauche, on obtient donc une mesure qu'on normalisera par la condition

(5) $$\int_G ds = 1\ :$$ ce sera <u>la</u> mesure de Haar de G .

Si $t \in G$, la mesure qui associe $\int_G f(st)\,ds$ à $f \in L(G)$ est aussi invariante par l'action de G à gauche : elle s'écrit donc $D(t) \int_G f(s)\,ds$, où D est un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{R}_+^*$: son image est un sous-groupe compact de $\mathbb{R}_+^*$: c'est $\{1\}$; ainsi, la mesure de Haar est aussi invariante par les translations à droite. De même, par l'application $s \longmapsto s^{-1}$, la mesure de Haar attrape un facteur $c > 0$; en effectuant deux fois cette application, on retombe sur la mesure de Haar : $c^2 = 1$; ainsi la mesure de Haar sur un groupe compact est invariante par $s \longmapsto s^{-1}$.

1.3. - Si G est un groupe compact et K un sous-groupe fermé, appelons ds et dk les mesures de Haar correspondantes. On fabrique des fonctions continues sur G/K en posant

(6) $$f'(s) = \int_K f(sk)\,dk\ ,\qquad s \in G\ ,\quad f \in L(G)$$

(on identifiera constamment une fonction sur G invariante à droite par K à une fonction sur G/K). Il est clair, G étant compact, qu'on obtient ainsi toute fonction continue sur $G/K = X$. On définit alors une mesure sur X , telle que (4), en posant

(7) $$\int_{G/K} f'(s)\,d's = \int_G f(s)\,ds = \int_{G/K}\left(\int_K f(sk)\,dk\right) d's\ ,$$

et elle donne à X la masse 1 en vertu de (5).

1.4. - Notons $H = L^2(X\ ,\ d's)$. On fait opérer G sur H en posant

(8) $$T(s)\,f(x) = f(s^{-1}.x)\ ,\qquad s \in G\ ,\quad f \in H\ ,\quad x \in X\ .$$

L'invariance de la mesure $d's$ montre que les $T(s)$ sont des opérateurs unitaires. La condition (2) est réalisée puisqu'on a pris soin de mettre s^{-1} dans (8). Par ailleurs, si f et $g \in H$, et s et $t \in G$, on a (la norme est celle de H)

$$\|T(s)f - T(t)g\| = \|T(t^{-1}s)f - g\| \leqslant \|T(t^{-1}s)f - f\| + \|f - g\|\ .$$

(1) sera vérifié si, pour chaque $f \in H$, l'application $s \longmapsto T(s)f$ de G dans H est continue ; or ε fixé, on trouve $g \in L(X)$ telle que

$$\|T(s)f - T(s)g\| = \|f - g\| \leqslant \varepsilon \quad ,$$

la continuité uniforme de g sur G permet alors de trouver un voisinage V de 1 tel que $|g(s^{-1}.x) - g(x)| \leqslant \varepsilon$ si $s \in V$; comme $\|g\| \leqslant \|g\|_\infty$, on a donc $\|T(s)g - g\| \leqslant \varepsilon$ si $s \in V$, d'où

$$\|T(s)f - f\| \leqslant \|T(s)f - T(s)g\| + \|T(s)g - g\| + \|f - g\| \leqslant 3\varepsilon \quad , \qquad \text{si} \quad s \in V \quad .$$

On dit que T est une représentation unitaire de G dans H.

DÉFINITION. - Soit G un groupe topologique. On dit qu'on a une représentation de G dans un espace de Hilbert H, si on se donne un homomorphisme T de G dans $\mathcal{L}(H)$ continu pour la topologie simple-forte des opérateurs : l'application de G dans H qui associe $T(s)a$ à s est continue pour tout $a \in H$. La représentation est unitaire, si les opérateurs $T(s)$ sont unitaires.

On dit qu'un sous-espace E de H est invariant (par la représentation T), s'il est fermé non nul, et si $f \in E$ implique $T(s)f \in E$ quel que soit $s \in G$. On dit que la représentation est irréductible, ou que l'espace H est irréductible, si H est le seul sous-espace invariant.

On dit qu'un sous-espace C de H est cyclique de générateur $f \in H$, s'il est fermé non nul, et si les vecteurs $T(s)f$ engendrent topologiquement C.

Quand la représentation est unitaire, l'orthogonal d'un sous-espace invariant ($\neq H$) est encore un sous-espace invariant, et un sous-espace fermé ($\neq 0$, H) est invariant si, et seulement si, la projection orthogonale sur ce sous-espace commute à la représentation, c'est-à-dire aux opérateurs $T(s)$.

Un sous-espace cyclique est invariant, mais la réciproque est fausse en général ; cependant, un sous-espace invariant minimal, c'est-à-dire un sous-espace irréductible, est cyclique (raisonner par l'absurde).

Si on a une représentation de G dans H, on cherche si H admet des sous-espaces invariants, si ceux-ci sont irréductibles. Dans le cas qui nous occupe, on a une réponse complète à ces questions.

1.5. - THÉORÈME. - Soient G un groupe compact, K un sous-groupe fermé, H l'espace de Hilbert $L^2(X)$, où $X = G/K$, associé à la mesure invariante sur X. Alors :

(i) H contient des sous-espaces invariants minimaux ;

(ii) H est somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants minimaux :

(9) $$H = \widehat{\bigoplus_{i \in I}} H_i \quad ;$$

(iii) Les sous-espaces invariants minimaux sont de dimension finie ;

(iv) Dans (9), chaque H_i intervient avec une multiplicité finie.

Précisons que la multiplicité de H_i dans (9) est le nombre d'indices $j \in I$ distincts tels qu'il existe un isomorphisme d'espaces de Hilbert

(10) $$U : H_i \longmapsto H_j \ , \qquad \text{tel que} \quad UT(s) = T(s)U \quad \text{quel que soit} \quad s \in G \ .$$

Ce théorème est l'analogue complet du cas des fonctions périodiques de carré sommable : $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $H = L^2([0 , 1])$ pour la mesure de Lebesgue, où la décomposition est donnée par le théorème de Parseval-Bessel :

(11) $$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi int} \ , \qquad \text{avec convergence au sens } L^2 \ ;$$

les espaces minimaux sont ainsi de dimension 1 : $H_n = \mathbb{C}e^{2\pi int}$.

1.6. - Remarque. - L'espace $L^2(G/K)$ s'identifie à un sous-espace invariant fermé de $L^2(G)$ à l'aide du projecteur (6). Il suffirait donc de démontrer le théorème pour $H = L^2(G)$. Cependant on travaillera sur $L^2(G/K)$ de façon que les techniques des § 2 et 3 puissent se généraliser au cas où G est seulement localement compact : on prendra des mesures bornées pour la proposition 2.1 ; si les opérateurs (16) sont compacts pour les $\varphi \in L(G)$, ou même seulement pour des $\varphi \in L(G)$ qui approchent la mesure de Dirac en 1 , le théorème est encore vrai, sauf (iii) ([1]).

2. Algèbre des opérateurs de convolution.

On se placera dans les notations et hypothèses du théorème.

PROPOSITION 2.1. - Soit $M(G)$ l'algèbre de Banach involutive des mesures sur G . La représentation T se prolonge en un homomorphisme d'algèbres involutives de $M(G)$ dans $\mathcal{L}(H)$ par

(12) $$\langle T(m)f \ , \ g \rangle = \int_G \langle T(s)f \ , \ g \rangle \, dm(s) \ , \qquad f \text{ et } g \in H \ .$$

Les crochets désignent le produit scalaire sur H ; le produit sur $M(G)$ est le produit de convolution défini par

(13) $\int_G f(s)\, d(m \star n)(s) = \int_{G\times G} f(st)\, dm(s)\, dn(t)$, $f \in L(G)$, m et $n \in M(G)$,

et l'involution

(14) $dm^*(s) = d\bar{m}(s^{-1})$, c'est-à-dire $\int_G f(s)\, dm^*(s) = \overline{\int_G \overline{f(s^{-1})}\, dm(s)}$.

Le second membre de (12) définit un opérateur continu $T(m)$ sur H , puisque l'intégration porte sur une fonction continue de s (§ 1.4), et que la forme hermitienne ainsi définie sur H est continue :

$$\left|\int_G \langle T(s)f , g\rangle\, dm(s)\right| \leqslant \int_G \|f\|\|g\|\, d|m|(s) = \|f\|\|g\|\|m\| .$$

L'égalité (12) montre que T est linéaire sur $M(G)$, et $\|T(m)\| \leqslant \|m\|$ par l'inégalité ci-dessus. Montrons que $T(m \star n) = T(m)\, T(n)$: il vient

$$\langle T(m)\, T(n)f , g\rangle = \int_G \langle T(s)\, T(n)f , g\rangle\, dm(s) = \int_G \langle T(n)f , T(s^{-1})g\rangle\, dm(s)$$

$$= \int_G dm(s) \int_G \langle T(t)f , T(s^{-1})g\rangle\, dn(t) = \int_G dm(s) \int_G \langle T(st)f , g\rangle\, dn(t)$$

$$= \int_{G\times G} \langle T(st)f , g\rangle\, dm(s)\, dn(t) = \int_G \langle T(s)f , g\rangle\, d(m \star n)(s) = \langle T(m \star n)f , g\rangle,$$

ceci quels que soient f et g dans H , en utilisant constamment le fait que les opérateurs $T(s)$ sont unitaires. Le même genre de calculs montre que $T(m^*) = T(m)^*$.

Si on appelle ε_s la mesure de Dirac en $s \in G$, (12) donne $T(\varepsilon_s) = T(s)$. Si les mesures m et n sont de densité les fonctions f et $g \in L^1(G)$ par rapport à la mesure de Haar, alors $m \star n$ a pour densité la fonction continue

(15) $f \star g(s) = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, dt = \int_G f(t)\, g(s^{-1} t)\, dt$ par rapport à ds .

PROPOSITION 2.2. - Soit $\varphi \in L(G)$ une fonction continue sur G . Soit $T(\varphi)$ l'opérateur défini par (12) où $dm(s) = \varphi(s)\, ds$:

(16) $T(\varphi)\, f(x) = \int_G f(s^{-1} x)\, \varphi(s)\, ds$, $f \in H$, $x \in X$, $\varphi \in L(G)$.

Alors ces opérateurs sont compacts.

En identifiant les fonctions sur $X = G/K$ à des fonctions sur G qui sont invariantes à droite par K , (16) s'écrit aussi $T(\varphi)f = \varphi \star f$ (ces opérateurs $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$, sont fréquemment appelés opérateurs de convolution). Pour montrer que $T(\varphi)$ est compact, on va montrer qu'il est donné par un noyau intégral de Hilbert-Schmidt : on a, en effet,

$$\varphi \star f(s) = \int_G f(t)\, \varphi(st^{-1})\, dt = \int_{G/K} \left(\int_K \varphi(s(tk)^{-1})\, dk\right) f(t)\, d't \quad ,$$

d'après (15) et (7) ; ceci montre que $T(\varphi)$ est donné par un noyau

(17) $\quad T(\varphi)\, f(x) = \int_{G/K} K_\varphi(x\ ,\ y)\, f(y)\, d'y\ ,\qquad$ où $K_\varphi(x\ ,\ y) = \int_K \varphi(xky^{-1})\, dk$

est une fonction continue sur $G/K \times G/K$: $K_\varphi(xk\ ,\ xh) = K_\varphi(x\ ,\ y)$, si $k\ ,h \in K$, et la fonction φ étant continue sur G . G/K étant compact, ce noyau est de carré sommable sur $X \times X$: il définit donc un opérateur de Hilbert-Schmidt, et ceux-ci sont compacts.

PROPOSITION 2.3. - L'application qui, à une mesure positive m sur G , $m \in M^+(G)$, associe l'opérateur continu $T(m)$ sur H défini par (12), est continue de $M^+(G)$ muni de la topologie vague dans $\mathcal{L}(H)$ muni de la topologie simple-forte des opérateurs.

La topologie de la convergence uniforme sur $L(X)$ étant plus fine que celle induite par $H = L^2(X)$, puisque X est compact, il suffit de prouver que, pour toute fonction $f \in L(X)$, l'application qui associe à $m \in M^+(G)$ la fonction continue sur X définie par

(18) $$T(m)\, f(x) = \int_G f(s^{-1}\, x)\, dm(s)$$

(c'est bien la fonction $T(m)f$ définie par (12), puisqu'on intègre alors des fonctions continues sur des compacts), est continue pour la topologie vague des mesures positives et la topologie de la convergence uniforme sur $L(X)$.

La continuité uniforme de l'application $(s\ ,\ x) \longmapsto f(s^{-1}\, x)$ sur $G \times X$ permet de trouver n points $x_1\ ,\ \ldots\ ,\ x_n$ de X tels que, pour tout $x \in X$, il existe un i pour lequel $|f(s^{-1}\, x) - f(s^{-1}\, x_i)| \leqslant \varepsilon$ quel que soit $s \in G$, et donc, par (18), $|T(m)\, f(x) - T(m)\, f(x_i)| \leqslant \varepsilon m(1)$ si $m \in M^+(G)$; prenons alors m' , autre mesure positive sur G : avec le même x , on a

$$\begin{aligned} &|T(m')\, f(x) - T(m)\, f(x)| \\ &\quad \leqslant |T(m')\, f(x) - T(m')\, f(x_i)| + |T(m')\, f(x_i) - T(m)\, f(x_i)| + |T(m)\, f(x_i) - T(m)\, f(x)| \\ &\quad \leqslant |T(m')\, f(x_i) - T(m)\, f(x_i)| + \varepsilon m(1) + \varepsilon m'(1) \quad . \end{aligned}$$

On définit alors un voisinage V de $m \in M^+(G)$ par ε et les fonctions 1 et $s \longmapsto f(s^{-1}\, x_i)$ sur G (en nombre $n + 1$) par les inégalités

$$|m'(1) - m(1)| \leqslant \varepsilon\ , \qquad |T(m')\, f(x_i) - T(m)\, f(x_i)| \leqslant \varepsilon\ , \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \ ;$$

pour $m' \in V$, on a alors $|T(m')\ f(x) - T(m)\ f(x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon m(1) + \varepsilon(m(1) + \varepsilon)$, ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 2.4.

(a) <u>Les opérateurs</u> $T(s)$, $s \in G$, <u>sont limites simple-forte d'opérateurs de la forme</u> $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

(b) <u>Les opérateurs</u> $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$, <u>sont limites simple-forte de combinaisons linéaires d'opérateurs de la forme</u> $T(s)$, $s \in G$.

Le (a) résulte de la proposition précédente, puisque la mesure de Dirac en $a \in G$ (mesure positive) est limite vague de mesures $dm(s) = \varphi(s)\ ds$ où φ est positive continue sur G , et que $T(\varepsilon_a) = T(a)$.

Pour la topologie vague de $M(G)$, on sait que les combinaisons linéaires des mesures de Dirac aux différents points de G forment un sous-espace dense. En décomposant $\varphi \in L(G)$ en combinaisons linéaires de fonctions positives, on voit que (b) résulte encore de la proposition 2.3.

<u>Remarque</u>. - On peut démontrer la proposition 2.4 sans faire appel à la précédente, qui utilisait explicitement dans sa démonstration la nature de l'espace $H = L^2(X)$.

COROLLAIRES.

(a) <u>Les sous-espaces invariants de</u> H <u>sont les sous-espaces fermés non nuls stables par les opérateurs</u> $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

(b) <u>Pour qu'un opérateur continu</u> A <u>sur</u> H <u>commute à la représentation</u> :

(19) $$AT(s) = T(s)A , \quad \underline{\text{quel que soit}}\ s \in G ,$$

<u>il faut et il suffit qu'il commute aux opérateurs</u> $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$.

C'est immédiat à partir de la proposition précédente.

PROPOSITION 2.5. - <u>Pour toute fonction non nulle</u> $f \in H$, <u>il existe un opérateur</u> A <u>sur</u> H <u>qui est hermitien, compact, non nul sur</u> f , <u>et qui commute à la représentation</u>.

En raison de la proposition 2.2, on cherche A sous la forme $T(\varphi)$, $\varphi \in L(G)$. Cet opérateur est déjà compact ; il sera hermitien si $\varphi^* = \varphi$ (où $\varphi^*(s) = \overline{\varphi(s^{-1})}$), d'après la proposition 2.1, et commutera à la représentation si $\varepsilon_s \star \varphi = \varphi \star \varepsilon_s$, soit si $\varphi(s^{-1}\ ts) = \varphi(t)$ quels que soient s et $t \in G$. Par la proposition 2.3, il suffit de prouver que ε_1 , la mesure de Dirac en 1 élément neutre de G, est limite vague de mesures de la forme $\varphi(s)\ ds$, où les fonctions $\varphi \in L(G)$ sont positives, symétriques et invariantes par automorphismes intérieurs ; on sait déjà trouver des $\varphi \in L(G)$ positives qui convergent vaguement vers ε_1 : on les rend symétriques en posant $\varphi'(t) = (\varphi(t) + \varphi(t^{-1}))/2$, fonctions qui convergent encore vaguement vers ε_1 . Pour rendre ces fonctions invariantes par automorphismes intérieurs, on posera

$$\varphi''(t) = \int_G \varphi'(s^{-1} ts)\, ds \quad ; \tag{20}$$

$\varphi'' \in L(G)$, est positive, symétrique et invariante par automorphismes intérieurs (invariance de la mesure de Haar). Il reste à prouver que ces fonctions convergent encore vaguement vers ε_1 . Or, si $g \in L(G)$, on a

$$\int_G g(t)\left(\int_G \varphi''(s^{-1} ts)\, ds\right) dt = \int_G\left(\int_G g(t^{-1} st)\, dt\right) \varphi''(s)\, ds \quad \text{(invariance de la mesure)} ,$$

puisqu'on intègre des fonctions continues sur des compacts. Il suffit ainsi de montrer que la fonction de s , $\int_G g(t^{-1} st)\, dt$, est continue en 1 ; or le groupe G étant compact, l'application qui, à $(s , t) \in G \times G$, associe $t^{-1} st$, est uniformément continue : pour tout voisinage V de 1 , il y a un voisinage W de 1 tel que, si $s \in W$, on a $t^{-1} st \in V$ pour tout $t \in G$, et donc

$$\left|\int_G (g(t^{-1} st) - g(1))\, dt\right| \leqslant \varepsilon$$

si V est bien choisi. C'est la continuité cherchée ; puisque G est de masse 1, la démonstration est achevée : on prendra $A = T(\varphi'')$, où φ'' est assez voisin de ε_1 .

PROPOSITION 2.6. - Soient C un sous-espace cyclique de H , et C' un sous-espace invariant de H contenu dans C . Alors C' est cyclique, et la projection orthogonale sur C' d'un générateur de C est un générateur de C' .

Le sous-espace C' étant invariant, le projecteur orthogonal P de C sur C' commute aux opérateurs $T(s)$: $PT(s)f = T(s)Pf$, en particulier pour un générateur f de C ; les $T(s)f$ engendrant topologiquement C , cette égalité montre que Pf est un générateur de C' qui est ainsi cyclique.

3. Démonstration du théorème.

PROPOSITION 3.1. - Tout sous-espace invariant E de H contient un sous-espace invariant minimal (conclusion (i) du théorème).

En composant les opérateurs $T(s)$ et $T(\varphi)$ avec l'injection de E dans H , on voit que les propositions du § 2 restent vraies si on remplace partout H par le sous-espace invariant E. En particulier, la proposition 2.4 fournit un opérateur hermitien compact non nul sur E, $T(\varphi)$. Il y a donc ([2], § 9.3) au moins un $\lambda \neq 0$ tel que l'espace $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T(\varphi) - \lambda I)$ soit non nul et de dimension finie. La proposition 2.6 montre que E_λ est stable par tout opérateur de E qui commute à la représentation. Prenons alors un vecteur non nul $f \in E$, et formons le sous-espace cyclique de E qu'il engendre, $C(f)$. On a vu (proposition 2.7) que les sous-espaces invariants de E contenus dans $C(f)$ sont cycliques de générateur la projection orthogonale de f sur ce sous-espace ; mais cette projection commute à la représentation, donc laisse E_λ stable : les générateurs des sous-espaces invariants contenus dans $C(f)$ sont dans E_λ, espace de dimension <u>finie</u>. On en déduit que toute chaîne décroissante de sous-espaces invariants de $C(f)$ est stationnaire: $C(f)$, donc E, contient donc des sous-espaces invariants minimaux. On peut même dire que $C(f)$ est somme directe finie de sous-espaces invariants minimaux : en effet, si C est un sous-espace invariant minimal de $C(f)$, son orthogonal dans $C(f)$ est cyclique de générateur dans l'orthogonal de $C \cap E$ dans $C(f) \cap E$; la dimension de E étant finie, on épuise $C(f) \cap E$ en un nombre fini de telles opérations.

PROPOSITION 3.2. - <u>L'espace</u> H <u>est somme directe hilbertienne de sous-espaces invariants minimaux</u> (9) (conclusion (ii) du théorème).

Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille de sous-espaces de H qui sont invariants minimaux et deux à deux orthogonaux. Appelons N la famille de toutes ces familles ; ordonné par inclusion, N est un ensemble inductif : soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille maximale. Le sous-espace $E = \widehat{\bigoplus_{i\in I}} H_i$ (somme directe hilbertienne) est invariant dans H ; s'il en était distinct, son orthogonal serait un sous-espace invariant et contiendrait (proposition 3.1) un sous-espace invariant minimal qu'on aurait dû adjoindre à $(H_i)_{i\in I}$.

PROPOSITION 3.3. - <u>Les sous-espaces invariants minimaux de</u> H <u>sont de dimension finie</u> (conclusion (iii) du théorème).

Soit E un sous-espace invariant minimal de H. Si $f \in E$ est non nul, on peut trouver un opérateur compact A, hermitien, commutant à la représentation, et non nul sur f. Sa restriction à E possède donc au moins une valeur propre λ non nulle, et $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est un sous-espace non nul et de dimension finie de E ; comme A commute aux opérateurs $T(s)$, ce sous-espace est invariant, et contenu dans E minimal, il lui est égal. Ainsi E est de dimension finie.

PROPOSITION 3.4. - La multiplicité d'un sous-espace invariant minimal dans la décomposition (9) est finie (conclusion (iv) du théorème).

Si U est un opérateur continu de H_i dans H_j qui commute à la représentation, on le prolonge en un opérateur continu sur H en l'annulant sur l'orthogonal de H_i : ce nouvel opérateur, U , commute toujours aux $T(s)$. Soit $A = T(\varphi)$ un opérateur hermitien compact non nul sur H_i (proposition 2.4). On a vu, dans la démonstration précédente, que $H_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ pour un $\lambda \neq 0$. Donc, si $f \in H_i$, on a $AUf = UAf = Uf$, puisque U commutant aux $T(s)$ commute aussi aux $T(\varphi)$ (corollaire (b) de la proposition 2.4). Ainsi, si $f \neq 0$ et $U \neq 0$, Uf est vecteur propre dans H_j , orthogonal à H_i si $i \neq j$, correspondant à la même valeur propre de $A = T(\varphi)$. Or les multiplicités de ces valeurs propres sont finies, d'où le nombre fini d'indices j distincts possibles.

Le théorème est ainsi entièrement démontré.

4. Applications du théorème.

4.1. - Le théorème recouvre le cas des groupes finis (ils sont compacts pour la topologie discrète) où sa preuve est immédiate, l'espace H étant de dimension finie.

4.2. - Si K est réduit à l'élément neutre de G , on obtient la décomposition de $L^2(G)$ en sous-espaces invariants minimaux pour l'action de G à gauche : $T(s)\, f(x) = f(s^{-1}\, x)$. Si $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, on a la décomposition en coefficients de Fourier.

4.3. - Le groupe compact G est isomorphe, comme espace homogène sous $G \times G$, au quotient $(G \times G)/G$ par l'application qui, à $(s\, ,\, t) \in G \times G$, associe $st^{-1} \in G$. Le théorème donne alors la décomposition de $L^2(G)$ en sous-espaces bi-invariants minimaux : l'opération du groupe $G \times G$ est en effet donnée par

$$T(s\, ,\, t)\, f(x) = f(s^{-1}\, xt)\ , \qquad \text{si}\ \ f \in L^2(G)\ .$$

Si L est la représentation de 4.2,

$$L(s)\, f(x) = f(s^{-1}\, x)\ ,$$

et si $R(s)\, f(x) = f(xs)$, on passe de l'une à l'autre par l'automorphisme $f(x) \longmapsto f(x^{-1})$ de $L^2(G)$, et

$$T(s\, ,\, t) = L(s)\, R(t) = R(t)\, L(s)\ .$$

Appelons L_i les sous-espaces invariants minimaux d'une décomposition de $L^2(G)$ par L , et R_i ceux de la décomposition correspondante pour R ; on démontre alors (théorème de Burnside) que les sous-espaces bi-invariants $L_i \otimes R_i$ de $L^2(G)$ sont minimaux pour T , et en donnent une décomposition en somme directe hilbertienne.

4.4. - Prenons pour K le centre de G (ce sont les éléments de G qui commutent à tout élément). Le théorème donne la décomposition de l'espace $L^2(G/K)$ qui s'identifie à la décomposition de 4.2 pour le groupe G/K .

4.5. - Si K est le sous-groupe fermé de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$, x et $y \in G$, on obtient la décomposition des fonctions de $L^2(G)$ qui vérifient $f(yxy^{-1}) = f(x)$ si $x , y \in G$ (fonctions centrales). Si on appelle $X_i(s)$ la trace de la restriction à l'espace L_i de l'opérateur $L(s)$ (notation du 4.3), on démontre que ces fonctions X_i forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales de carré sommable.

4.6. - Soit U une représentation du groupe compact G dans un espace de Hilbert H . Elle devient unitaire si on met sur H le nouveau produit scalaire

$$\langle a , b\rangle' = \int_G \langle U(s)a , U(s)b\rangle \, ds \quad .$$

Posons alors

$$m_{a,b}(s) = \langle a , U(s)b\rangle' \quad .$$

Pour chaque b fixé dans H , on vérifie que $a \longmapsto m_{a,b}$ est une application linéaire continue, non nulle si $b \neq 0$, de H dans $L(G)$, donc dans $L^2(G)$. Comme $m_{a,b}(t^{-1}s) = m_{U(t)a,b}$, cette application transporte U en translations à gauche. Si la représentation U est irréductible, tout vecteur non nul $b \in H$ est générateur, et l'application est alors injective sur un sous-espace irréductible de $L^2(G)$: il en résulte que toute représentation irréductible d'un groupe compact est de dimension finie, et se plonge dans $L^2(G)$.

4.7. - Lorsque G est le groupe $SO(n)$ des rotations de l'espace euclidien $\underset{\sim}{R}^n$, et K le sous-groupe des rotations autour d'un axe (K s'identifie à $SO(n-1)$), alors G/K est la sphère-unité $\underset{\sim}{S}_{n-1}$, et la décomposition (9) est la décomposition de $L^2(\underset{\sim}{S}_{n-1})$ en les espaces d'harmoniques sphériques homogènes, avec multiplicités 1 si $n > 2$, et multiplicités 2 si $n = 2$.

4.8. - La représentation T de $\underset{\sim}{R}$ dans $L^2(\underset{\sim}{R})$ définie par $T(s)\,f(x) = f(x-s)$ n'admet pas de sous-espace invariant fermé minimal : tout sous-espace invariant contient strictement un sous-espace invariant (transporter la situation à l'aide de la transformation de Fourier).

Pour avancer plus loin, il faut étudier de plus près les "caractères" X_i de 4.5, leur trouver une équation fonctionnelle, puis les "coefficients" $m_{a,b}$ pour la représentation L de G dans $L^2(G)$ (le théorème de Stone-Weierstrass montre que leurs combinaisons linéaires approchent uniformément toute fonction continue sur G : c'est le théorème de Peter-Weyl).

Ensuite, on cherche à donner une caractérisation commode sur le couple (G , K) pour que les multiplicités de la décomposition (9) soient toutes égales à 1 (c'est le cas de 4.7 si $n > 2$) : c'est la théorie des fonctions sphériques, qui généralise les énoncés de l'appendice de l'exposé A.2.

Enfin, on peut étudier les représentations d'un groupe localement compact, en les restreignant à des sous-groupes compacts. C'est ce qu'on fait pour les groupes semi-simples complexes, ou réels à centre fini, ou p-adiques, qui possèdent des sous-groupes compacts maximaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (R.). - Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1965/66, Chap. 1-3 (non publié).

[2] RIESZ (F.) et NAGY (B. Sz.-). - Leçons d'analyse fonctionnelle. 3e éd. - Budapest, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.

[3] WEIL (A.). - L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. 2e éd. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1145 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 4).