Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Haïm Brezis

Sur certains problèmes non linéaires

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 2 (1966-1967), exp. n° 18, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A7_0>

SUR CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES

par Haïm BREZIS

Le but de cet exposé est double :

On se propose, d'abord, de démontrer un théorème concernant les inéquations non linéaires, qui englobe des résultats de F. BROWDER ([3], [4]) et G. STAMPACCHIA ([6], [8]). Puis, en utilisant une technique due à F. BROWDER [5], on en déduit une généralisation du théorème de point fixe de KAKUTANI et KY-FAN pour les applications multivoques.

Dans la seconde partie, on met en évidence une méthode constructive, obtenue en collaboration avec M. SIBONY, permettant de résoudre certaines équations non linéaires. Ce schéma est particulièrement utile pour l'approximation de la solution d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

I. Inéquations non linéaires et généralisation du théorème de point fixe.

1. Les inéquations non linéaires.

Soient E et F deux espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire (f , u) , $f \in F$, $u \in E$. On suppose que E est muni d'une topologie d'espace vectoriel topologique plus fine que $\sigma(E , F)$.

DÉFINITION 1. - Soit X un sous-ensemble de E ; on dit qu'une application A de X dans F est pseudo-monotone, si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

($P M_1$) Pour tout filtre u_i porté par un sous-ensemble compact de X tel que $u_i \rightarrow u$ dans X et $\limsup(Au_i , u_i - u) \leqslant 0$, alors

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf(Au_i , u_i - v) , \qquad \forall v \in X .$$

($P M_2$) Pour tout $v \in X$, l'application

$$u \longmapsto (Au , u - v)$$

est bornée inférieurement sur les sous-ensembles compacts de X .

Remarques.

1° On montre, dans la suite (§ 2), que toute application monotone est pseudo-monotone.

2° Toute application continue de E dans F muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E est pseudo-monotone. En particulier, lorsque E est de dimension finie, toute application continue est pseudo-monotone. Mais la réciproque est inexacte : il existe, même en dimension finie, des applications pseudo-monotones qui ne sont pas continues.

Le résultat essentiel concernant les inéquations non linéaires est le suivant :

THÉORÈME 2. - *Soient X un sous-ensemble convexe compact de E, et A une application pseudo-monotone de X dans F. Alors, pour tout $f \in F$, il existe $u \in X$ tel que*

(1) $$(f - Au\ ,\ v - u) \leqslant 0\ , \qquad \forall\ v \in X\ .$$

De plus, l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est fermé.

La démonstration du théorème 2 se fait en plusieurs étapes.

LEMME 3. - *On suppose que E est de dimension finie. Soit Y un ouvert de E ; une application de Y dans E' est pseudo-monotone si et seulement si elle est continue.*

Démonstration. - Il est évident que toute application continue est pseudo-monotone.

Inversement, soient A une application pseudo-monotone, et u_n une suite qui converge vers u dans Y. Montrons d'abord que Au_n est borné ; en effet, si Au_n n'était pas borné, on pourrait extraire une sous-suite, notée encore u_n, telle que

$$u_n \rightarrow u\ ,\quad \|Au_n\| \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \frac{Au_n}{\|Au_n\|} \rightarrow z\ , \qquad \text{avec} \quad \|z\| = 1\ .$$

Soit $v \in Y$; l'ensemble $\{u_n\}$ étant un sous-ensemble compact de Y, il existe une constante C telle que

(2) $$(Au_n\ ,\ u_n - v) > C\ , \qquad \forall\ n \in \underset{\approx}{N}\ .$$

On divise l'inéquation (2) par $\|Au_n\|$, et on passe à la limite quand $n \rightarrow +\infty$. D'où

$$(z\ ,\ u - v) \geqslant 0\ , \qquad \forall\ v \in Y\ .$$

Par suite $z = 0$, ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$.

Montrons que Au_n converge vers Au ; sinon, on pourrait extraire une sous-suite, notée aussi u_n , telle que $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup f \neq Au$ et

$$\limsup (Au_n\ ,\ u_n - u) \leqslant 0\ ,$$

donc

$$(Au\ ,\ u - v) \leqslant \liminf (Au_n\ ,\ u_n - v) = (f\ ,\ u - v)\ , \qquad \forall\ v \in Y\ .$$

D'où $Au = f$; ce qui est absurde.

Pour démontrer le théorème 2, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $f = 0$.

LEMME 4 (P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA). - <u>On suppose que</u> E <u>est un espace de dimension finie. Soient</u> X <u>un sous-ensemble convexe compact de</u> E , <u>et</u> A <u>une application continue de</u> X <u>dans</u> E' . <u>Alors il existe</u> $u \in X$ <u>tel que</u>

$$(3) \qquad (Au\ ,\ u - v) \leqslant 0\ , \qquad \forall\ v \in X\ .$$

<u>Démonstration</u>. - On identifie E et E' à un espace de Hilbert de dimension finie. L'inéquation (3) s'écrit

$$(- Au + u - u\ ,\ v - u) \leqslant 0\ , \qquad \forall\ v \in X\ ,$$

c'est-à-dire

$$u = \mathrm{Proj}_X(- Au + u)\ .$$

L'application $u \longmapsto \mathrm{Proj}_X(- Au + u)$ étant continue, l'inéquation (3) admet au moins une solution, d'après le théorème de point fixe de Brouwer.

LEMME 5. - <u>On suppose que</u> E <u>est un espace de dimension finie. Soient</u> X <u>un sous-ensemble convexe compact de</u> E <u>d'intérieur non vide, et</u> A <u>une application pseudo-monotone de</u> X <u>dans</u> E' . <u>Alors il existe</u> $u \in X$ <u>tel que</u>

$$(Au\ ,\ u - v) \leqslant 0\ , \qquad \forall\ v \in X\ .$$

<u>Démonstration</u>. - Comme l'intérieur de X n'est pas vide, il existe une suite croissante X_n de convexes compacts tels que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathring{X}\ .$$

D'après le lemme 3, A est continu sur chacun des X_n , et le lemme 4 montre qu'il existe $u_n \in X_n$ tel que

$$(Au_n , u_n - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X_n .$$

On peut extraire une sous-suite, notée u_n , telle que $u_n \to u$. Montrons que la suite Au_n est bornée ; sinon, on pourrait extraire une sous-suite, notée u_n , telle que

$$u_n \to u , \quad \|Au_n\| \to +\infty , \quad \frac{Au_n}{\|Au_n\|} \to z , \qquad \text{avec } \|z\| = 1 .$$

Soit $v \in \overset{\circ}{X}$; l'ensemble $\{u_n\}$ étant un sous-ensemble compact de X , il existe une constante C , telle que, à partir d'un certain rang, on ait

(4) $$C \leqslant (Au_n , u_n - v) \leqslant 0 .$$

On divise la relation (4) par $\|Au_n\|$, et on passe à la limite quand $n \to +\infty$; il vient

$$0 \leqslant (z , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in \overset{\circ}{X} .$$

Par suite, $z = 0$; ce qui est en contradiction avec $\|z\| = 1$. Donc la suite Au_n est bornée, et

$$\lim_{n\to+\infty} \sup(Au_n , u_n - u) \leqslant 0 .$$

Par conséquent

$$(Au , u - v) \leqslant \lim\inf(Au_n , u_n - v) , \qquad \forall v \in X .$$

Or, pour tout $v \in \overset{\circ}{X}$, $\lim\inf(Au_n , u_n - v) \leqslant 0$. D'où

$$(Au , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in \overset{\circ}{X} ,$$

et, par continuité,

$$(Au , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X .$$

LEMME 6. - <u>On suppose que</u> E <u>est un espace de dimension finie. Soient</u> X <u>un sous-ensemble convexe compact de</u> E <u>contenant</u> 0 , <u>et</u> A <u>une application pseudo-monotone de</u> X <u>dans</u> E' . <u>Alors il existe</u> $u \in X$ <u>tel que</u>

$$(Au , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X .$$

<u>Démonstration</u>. - Soient E_0 l'espace vectoriel engendré par X , j_0 l'injection canonique de E_0 dans E , et j_0^* son adjoint de E' sur E_0' . Comme X est d'intérieur non vide dans E_0 , il existe, d'après le lemme 5, $u \in X$ tel que

$$(j_0^* A j_0 u , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X ,$$

c'est-à-dire

$$(Au , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X$$

(on vérifie aisément que $j_0^* A j_0$ est pseudo-monotone de E_0 dans E_0').

<u>Démonstration du théorème</u> 2. - On se ramène d'abord très simplement au cas où $f = 0$ et $0 \in X$. Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble ordonné filtrant croissant des sous-espaces vectoriels E_i de E de dimension finie, j_i l'injection canonique de E_i dans E , et j_i^* son adjoint de F sur E_i' . D'après le lemme 6, il existe $u_i \in X \cap E_i$ tel que

$$(j_i^* A j_i u_i , u_i - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X \cap E_i ,$$

c'est-à-dire

$$(Au_i , u_i - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X \cap E_i .$$

Suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathfrak{F}$,

$$u_i \to u \quad \text{dans} \quad X \quad \text{et} \quad \limsup_{\mathcal{U}} (Au_i , u_i - u) \leqslant 0 .$$

Donc

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf (Au_i , u_i - v) , \qquad \forall v \in X .$$

D'où

$$(Au , u - v) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X .$$

Enfin, montrons que l'ensemble des solutions de (1) est fermé. Soit u_k un filtre sur l'ensemble des solutions de (1) qui converge vers u . On a

$$(f - Au_k , v - u_k) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X .$$

En prenant $v = u$, on obtient

$$\limsup (Au_k , u_k - u) \leqslant 0 .$$

Donc

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf (Au_k , u_k - v) , \qquad \forall v \in X .$$

Par suite

$$(f - Au , v - u) \leqslant 0 , \qquad \forall v \in X .$$

Avant d'énoncer quelques corollaires du théorème 2, introduisons une notation.

Soient X un convexe de E , et Y un sous-ensemble de E . On pose

$$\mathrm{Int}_Y X = \{x \in X \; ; \; Y - x \subset \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda(X - x)\} \; .$$

Ainsi, $\mathrm{Int}_X X = X$, et $\mathrm{Int}_E X$ est l'intérieur de X pour la topologie localement convexe la plus fine de E .

COROLLAIRE 7. - Soient X un sous-ensemble de E , et K un sous-ensemble convexe compact de X , avec $0 \in \mathrm{Int}_X K$. Soit A une application pseudo-monotone de K dans F , telle que

$$(Av \, , \, v) \geqslant 0 \, , \qquad \forall \, v \in K \, , \quad v \notin \mathrm{Int}_X K \; .$$

Alors il existe $u \in K$ tel que

$$(Au \, , \, u - v) \leqslant 0 \, , \qquad \forall \, v \in X \; .$$

Démonstration. - D'après le théorème 2, il existe $u \in K$ tel que

$$(Au \, , \, u - v) \leqslant 0 \, , \qquad \forall \, v \in K \; .$$

Si $u \in \mathrm{Int}_X K$, soit $w \in X$; il existe $\lambda \geqslant 0$ et $v \in K$ tels que

$$w - u = \lambda(v - u) \; .$$

D'où

$$(Au \, , \, u - w) \leqslant 0 \; .$$

Si $u \notin \mathrm{Int}_X K$, on a $(Au \, , \, u) \geqslant 0$, et d'autre part, $(Au \, , \, u) \leqslant 0$ (il suffit de faire $v = 0$). Donc $(Au \, , \, u) = 0$. Par conséquent, $(Av \, , \, v) \geqslant 0$, $\forall \, v \in K$; on en déduit que $(Au \, , \, v) \geqslant 0$, $\forall \, v \in X$, puisque $0 \in \mathrm{Int}_X K$. D'où

$$(Au \, , \, u - v) \leqslant 0 \, , \qquad \forall \, v \in X \; .$$

COROLLAIRE 8. - Soient E un espace de Banach réflexif, et X un convexe fermé de E . Soit A une application pseudo-monotone de X dans E' (E étant muni de la topologie faible), telle que

$$\lim_{\substack{\|x\| \to +\infty \\ x \in X}} \frac{(Ax \, , \, x)}{\|x\|} = + \infty \; .$$

Alors, pour tout $f \in E'$, il existe $u \in X$ tel que

$$(f - Au \, , \, v - u) \leqslant 0 \, , \qquad \forall \, v \in X \; .$$

Démonstration. - On peut toujours supposer que $f = 0$. Il existe $R > 0$ tel que

$$x \in X \; , \quad \|x\| \geqslant R \quad \text{implique} \quad (Ax \, , \, x) \geqslant 0 \; .$$

L'ensemble

$$K = \{x \in X \; ; \; \|x\| \leqslant R\}$$

est un convexe compact de E muni de la topologie faible. De plus

$$\{x \in X \; ; \; \|x\| < R\} \subset \mathrm{Int}_X \, K \; .$$

Donc

$$(Ax \, , \, x) \geqslant 0 \; , \qquad \forall \; x \in K \; , \quad x \notin \mathrm{Int}_X \, K \; .$$

On applique alors le corollaire 7.

COROLLAIRE 9. - Soient X un convexe compact de E , et A une application pseudo-monotone de X dans F . Soit φ une fonction convexe s. c. i. de X dans $]-\infty \, , \, +\infty]$, non identiquement égale à $+\infty$.

Alors, pour tout $f \in F$, il existe $u \in X$ tel que

$$(f - Au \, , \, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \; , \qquad \forall \; v \in X \; .$$

Démonstration. - On peut déduire ce résultat du théorème 2 à l'aide d'un artifice dû à U. MOSCO [7]. On se ramène d'abord très simplement au cas où $0 \in X$ et $\varphi(0) = 0$. Soient $E_1 = E \times \mathbb{R}$, $F_1 = F \times \mathbb{R}$; E_1 et F_1 sont mis en dualité par le produit scalaire

$$x_1 = \{x \, , \, \alpha\} \; , \qquad f_1 = \{f \, , \, \beta\} \; , \qquad \langle f_1 \, , \, x_1 \rangle = (f \, , \, x) + \alpha\beta \; .$$

L'ensemble

$$X_1 = \{\{x \, , \, \alpha\} \; ; \; \varphi(x) \geqslant \alpha\}$$

est un convexe fermé de E_1 , et l'application

$$A_1 \, x_1 = \{Ax - f \, , \, 1\}$$

est pseudo-monotone de X_1 dans F_1 . Il est aisé de montrer que les deux inéquations suivantes sont équivalentes :

(i) $(f - Au \, , \, v - u) \leqslant \varphi(v) - \varphi(u) \; , \quad \forall \; v \in X$;

(ii) $\langle A_1 \, u_1 \, , \, v_1 - u_1 \rangle \leqslant 0 \; , \quad \forall \; v_1 \in X_1$, avec $u_1 = \{u \, , \, \varphi(u)\}$.

A étant pseudo-monotone et X compact, il existe une constante $C < 0$ telle que $(Av - f \, , \, v) \geqslant C$, $\forall \; v \in X$. L'ensemble

$$K_1 = \{\{x \, , \, \alpha\} \in X_1 \; ; \; \alpha \leqslant - C\}$$

est un sous-ensemble convexe compact de X_1 , et

$$\mathrm{Int}_{X_1} K_1 = \{\{x , \alpha\} \in X_1 ; \alpha < - C\} .$$

Par suite, $0 \in \mathrm{Int}_{X_1} K_1$, et

$$\langle A_1 v_1 , v_1 \rangle = (Av - f , v) + \alpha \geqslant C + \alpha \geqslant 0 , \qquad \forall v_1 \in K_1 , \quad v_1 \notin \mathrm{Int}_{X_1} K_1 .$$

D'après le corollaire 7, il existe $u_1 \in K_1$ tel que

$$\langle A_1 u_1 , u_1 - v_1 \rangle \leqslant 0 , \qquad \forall v_1 \in X_1 .$$

2. Exemples d'applications pseudo-monotones.

Soit X un sous-ensemble convexe de E .

DÉFINITION 10. - <u>On dit qu'une application</u> A <u>de</u> X <u>dans</u> F <u>est</u> monotone hémicontinue, <u>si</u>

$$(Ax - Ay , x - y) \geqslant 0 , \qquad \forall x , y \in X ,$$

<u>et si, pour tout couple</u> $x , y \in X$, <u>l'application</u>

$$t \in [0 , 1] \longmapsto (A(x - tx + ty) , x - y)$$

<u>est continue</u>.

PROPOSITION 11. - <u>Toute application monotone hémicontinue de</u> X <u>dans</u> F <u>est pseudo-monotone</u>.

<u>Démonstration</u>. - Vérifions la propriété $(P M_1)$. On a

$$(Au , u_i - u) \leqslant (Au_i , u_i - u) .$$

D'où

$$\lim (Au_i , u_i - u) = 0 .$$

Soient $v \in X$, $t \in]0 , 1]$, et $w = (1 - t)u + tv$. On a

$$(Au_i - Aw , u_i - w) \geqslant 0 ,$$

c'est-à-dire

$$- (Au_i , u_i - u) + (A(u - tu + tv) , u_i - u + tu - tv) \leqslant t(Au_i , u - v) .$$

On obtient donc, en passant à la limite,

$$t(A(u - tu + tv) , u - v) \leqslant t \liminf (Au_i , u - v) .$$

En divisant par t, et en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf (Au_i , u - v) = \liminf (Au_i , u_i - v) .$$

La propriété $(P\ M_2)$ est évidente à vérifier.

PROPOSITION 12. - Soient E un espace de Banach, et M une application monotone hémicontinue de E dans E', telle que

$$(Mx - My , x - y) \geqslant c\|x - y\|^2 , \qquad \forall\ x , y \in E , \quad c > 0 .$$

Soit C une application compacte de E dans E' (c'est-à-dire continue de E fort dans E' fort, et C transforme les bornés de E en des ensembles relativement compacts de E' fort).

Alors l'application

$$A = M + C$$

est pseudo-monotone de E faible dans E'.

Démonstration. - Soit u_i un filtre porté par un ensemble borné de E, tel que

$$u_i \to u \quad \text{dans} \quad E \quad \text{faible} \quad \text{et} \quad \limsup (Au_i , u_i - u) \leqslant 0 .$$

Cu_i est relativement compact, et suivant un ultrafiltre plus fin $\mathcal{U}$,

$$Cu_i \to \ell \quad \text{dans} \quad E' \quad \text{fort} .$$

Par conséquent,

$$\limsup_{\mathcal{U}} (Mu_i , u_i - u) \leqslant 0 .$$

Donc $u_i \to u$ dans E fort, et par suite $Cu = \ell$. Il résulte alors de la proposition 11 que

$$(Au , u - v) \leqslant \liminf (Au_i , u_i - v) , \qquad \forall\ v \in E .$$

La propriété $(P\ M_2)$ est facile à vérifier.

3. Un théorème de point fixe pour des applications multivoques.

Rappelons que, étant donnés deux espaces topologiques X et Y, on dit qu'une application T de X dans $\mathcal{P}(Y)$ est s. c. s. si, pour tout $x_0 \in X$, et pour tout voisinage V de Tx_0, il existe un voisinage de x_0 tel que

$$x \in U \implies Tx \subset V \ .$$

Soient E un espace localement convexe séparé, et X un sous-ensemble convexe de E. Soit $x \in X$, on désigne par P_x le cône convexe fermé de sommet x engendré par X.

THÉORÈME 13. - <u>Soient</u> X <u>un sous-ensemble convexe compact de</u> E, <u>et</u> T <u>une application s. c. s. de</u> X <u>dans</u> $\mathcal{P}(E)$. <u>On suppose que, pour tout</u> $x \in X$, T_x <u>est un convexe fermé de</u> E, <u>et que</u>

$$Tx \cap P_x \neq \emptyset \ , \qquad \forall\, x \in X \ .$$

<u>Alors il existe</u> $x_0 \in X$ <u>tel que</u> $x_0 \in Tx_0$.

<u>Démonstration</u>. - On utilise une technique identique à celle de F. BROWDER [5]. Pour tout $f \in E'$, on pose

$$U_f = \{u \in X \ ; \ \ (f \ , u - v) > 0 \ , \ \ \forall\, v \in Tu\} \ .$$

Il est évidant que U_f est ouvert, puisque T est s. c. s.

Montrons que les ensembles $(U_f)_{f \in E'}$ ne recouvrent pas X ; sinon, on pourrait extraire un recouvrement fini $U_{f_1} \dots U_{f_n}$, et lui associer une partition de l'unité $\varphi_1 \dots \varphi_n$. On vérifie que l'application

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u)\ f_i$$

est pseudo-monotone de X dans E'.

D'après le théorème 2, il existe $u_0 \in X$ tel que

$$(Au_0 \ , u_0 - v) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\, v \in X \ ,$$

et par conséquent

$$(Au_0 \ , \lambda u_0 - \lambda v) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\, \lambda \geqslant 0 \ , \ \ \forall\, v \in X \ .$$

On en déduit, par passage à la limite,

(5) $$(Au_0 \ , u_0 - v) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\, v \in P_{u_0} \ .$$

D'autre part, si $u \in X$ et $v \in Tu$, on a

$$(Au \ , u - v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u)(f_i \ , u - v) > 0 \ .$$

En particulier,

$$(Au_0 , u_0 - v) > 0 , \qquad \forall v \in Tu_0 ,$$

ce qui est en contradiction avec (5), puisque $Tu_0 \cap P_{u_0} \neq \emptyset$.

Par conséquent, les $(U_f)_{f\in E'}$ ne recouvrent pas X , et il existe donc $u_0 \in X$ tel que, $\forall f \in E'$, $\exists v \in Tu_0$ vérifiant

(6) $$(f , u_0 - v) \leqslant 0 .$$

Il en résulte que $u_0 \in Tu_0$; car, si $u_0 \notin Tu_0$, on peut séparer u_0 et Tu_0 par un hyperplan fermé, c'est-à-dire qu'il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$(f_0 , u_0 - v) > 0 , \qquad \forall v \in Tu_0 .$$

Ceci est en contradiction avec (6).

II. Méthodes d'approximation de la solution d'équations non linéaires.

1. Un théorème d'existence et d'unicité.

Rappelons qu'un espace de Banach est dit uniformément convexe, si, pour tout $0 < \varepsilon \leqslant 2$, il existe $\delta > 0$ tel que les relations

$$\|x\| \leqslant 1 , \quad \|y\| \leqslant 1 , \quad \|x - y\| > \varepsilon \quad \text{impliquent} \quad \left\|\frac{x + y}{2}\right\| < 1 - \delta .$$

On démontre qu'un espace uniformément convexe E vérifie les propriétés suivantes:

1° E est strictement convexe, c'est-à-dire que les relations

$$\|x\| \leqslant 1 , \qquad \|y\| \leqslant 1 , \qquad x \neq y$$

impliquent

$$\|tx + (1 - t)y\| < 1 , \qquad \forall t \in]0 , 1[;$$

2° Si un filtre x_i converge faiblement vers x , et si $\|x_i\|$ converge vers $\|x\|$, alors x_i converge fortement vers x .

3° Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

PROPOSITION 14. - *Soient* E *un espace de Banach uniformément convexe, et* A *un opérateur hémicontinu de* E *dans* E' , *vérifiant*

$$(Ax - Ay , x - y) \geqslant (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|))(\|x\| - \|y\|) ,$$

<u>où</u> φ <u>est une application strictement croissante de</u> $\mathbb{R}_+$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>telle que</u>

$$\lim_{r\to+\infty} \varphi(r) = +\infty \quad .$$

<u>Alors</u> A <u>est bijectif de</u> E <u>sur</u> E' .

<u>Démonstration</u>. - On utilise le corollaire 8 et la proposition 11 pour montrer que A est surjectif. En effet, A est monotone hémicontinu, et

$$(Ax\ ,\ x) \geqslant (A0\ ,\ x) + \varphi(\|x\|)\|x\| \quad .$$

(On peut toujours supposer que $\varphi(0) = 0$). Par suite

$$\frac{(Ax\ ,\ x)}{\|x\|} \geqslant -\|A0\|_{E'} + \varphi(\|x\|) \quad .$$

Donc

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{(Ax\ ,\ x)}{\|x\|} = +\infty \quad ,$$

et A est surjectif.

Montrons que A est injectif ; soient u_1 et u_2 deux solutions de l'équation

$$Au_1 = Au_2 = f \quad .$$

On a

$$(\varphi(\|u_1\|) - \varphi(\|u_2\|))(\|u_1\| - \|u_2\|) = 0 \quad .$$

D'où

$$\|u_1\| = \|u_2\| \quad .$$

D'autre part, l'ensemble des solutions de l'équation $Au = f$ est convexe ; en effet, soit

$$u_3 = \alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \ , \qquad \alpha \in [0\ ,\ 1] \quad .$$

Il résulte de la monotonie de A que

$$\alpha(f - Av\ ,\ v - u_1) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\ v \in E \ ,$$

$$(1 - \alpha)(f - Av\ ,\ v - u_2) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\ v \in E \quad .$$

D'où, par addition,

$$(f - Av\ ,\ v - u_3) \leqslant 0 \ , \qquad \forall\ v \in E \quad .$$

En prenant $v = v_t = (1 - t)u_3 + tw$, $t \in [0\ ,\ 1]$, on obtient

$$(f - Av_t\ ,\ w - u_3) \leqslant 0 \quad .$$

Puis on passe à la limite quand $t \to 0$; d'où

$$(f - Au_3 , w - u_3) \leqslant 0 , \qquad \forall\, w \in E ,$$

et par conséquent

$$Au_3 = f .$$

L'ensemble des solutions de l'équation $Au = f$ est donc convexe, et situé sur une sphère de E. Comme E est strictement convexe, on en déduit que A est injectif.

2. Un schéma d'approximation.

Le schéma d'approximation que nous utilisons a été développé par J.-P. AUBIN [1].

Soient V_h une famille d'espaces de dimension finie, indexée par un paramètre $h > 0$ (destiné à tendre vers 0), p_h une application linéaire injective de V_h dans E, et $\hat{r}_h$ son adjoint de E' sur V_h'. On pose

$$A_h = \hat{r}_h\, A p_h : \ V_h \to V_h' .$$

On a donc le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] & E' \arrow[d, "\hat{r}_h"] \\ V_h \arrow[u, "p_h"] \arrow[r, "A_h"] & V_h' \end{tikzcd} .$$

On dit que l'équation $A_h\, u_h = f_h$ $(f_h \in V_h')$ est la discrétisée de l'équation $Au = f$. Si A est un opérateur différentiel, et si p_h est convenablement choisi, le problème discrétisé se déduit du problème initial en remplaçant les dérivations par des différences finies.

On est alors conduit à résoudre deux problèmes distincts :

1° Montrer que, sous certaines hypothèses, $p_h\, u_h$ converge vers u.

2° Trouver une méthode itérative permettant de résoudre le problème discrétisé.

Le théorème ci-dessous apporte une réponse au premier problème.

DÉFINITION 15. - Soit r_h une application linéaire continue de E dans V_h. On dit que le schéma d'approximation $\{E , V_h , p_h , r_h\}$ est consistant, si

$$\lim_{h \to 0} p_h\, r_h\, v = v , \qquad \forall\, v \in E .$$

<u>THÉORÈME 16. - Soient</u> E <u>un espace de Banach uniformément convexe, et</u> A <u>une application hémicontinue et bornée de</u> E <u>dans</u> E' <u>(c'est-à-dire que</u> A <u>transforme les bornés de</u> E <u>en des bornés de</u> E'), <u>vérifiant</u>

$$(Ax - Ay , x - y) \geqslant (\varphi(\|x\|) - \varphi(\|y\|))(\|x\| - \|y\|) , \qquad \forall\, x , y \in E ,$$

<u>où</u> φ <u>est une application strictement croissante de</u> $\underset{\sim}{R}_+$ <u>dans</u> $\underset{\sim}{R}$ <u>avec</u>

$$\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = +\infty .$$

<u>On suppose que le schéma</u> $\{E , V_h , p_h , r_h\}$ <u>est consistant.</u>

<u>Alors l'équation</u>

$$A_h u_h = f_h = \hat{r}_h f$$

<u>admet une solution unique, et</u> $p_h u_h$ <u>converge dans</u> E <u>fort vers la solution</u> u <u>de l'équation</u> $Au = f$.

<u>Démonstration</u>. - Montrons d'abord que l'équation $A_h u_h = f_h$, admet une solution unique. Il est évident que V_h , muni de la norme $\|v_h\|_h = \|p_h v_h\|$, est uniformément convexe. D'autre part,

$$(A_h x_h - A_h y_h , x_h - y_h) \geqslant (\varphi(\|x_h\|_h) - \varphi(\|y_h\|_h))(\|x_h\|_h - \|y_h\|_h) , \quad \forall\, x_h , y_h \in V_h ,$$

et par conséquent A_h est bijectif de V_h sur V_h' , d'après la proposition 14. $p_h u_h$ demeure dans un borné de E ; en effet,

$$(A_h u_h , u_h) = (Ap_h u_h , p_h u_h) = (f_h , u_h) = (f , p_h u_h) .$$

D'où

$$\frac{(Ap_h u_h , p_h u_h)}{\|p_h u_h\|} \leqslant \|f\|_{E'} ,$$

et par suite $\|p_h u_h\|$ reste borné.

Suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $\underset{\sim}{R}_+$, $p_h u_h$ converge vers ξ dans E faible, et $Ap_h u_h$ converge vers η dans E' faible (puisque A est borné).

Montrons que $\eta = Au$; en effet, soit $v \in E$, on a

$$(A_h u_h , r_h v) = (Ap_h u_h , p_h r_h v) = (f , p_h r_h v) .$$

En passant à la limite suivant $\mathcal{U}$, on obtient

$$(\eta , v) = (f , v) , \qquad \forall\, v \in E .$$

D'où

$$\eta = f = Au \quad .$$

D'autre part,

$$(A_h\, u_h\, , u_h) = (Ap_h\, u_h\, , p_h\, u_h) = (f\, , p_h\, u_h)$$

converge vers $(f\, , \xi)$ suivant $\mathcal{U}$. On va en déduire que $Au = A\xi$ et $u = \xi$. En effet,

$$\lim_{\mathcal{U}} \sup(Ap_h\, u_h\, , p_h\, u_h - \xi) \leqslant 0 \quad ,$$

et par suite

$$(A\xi\, , \xi - v) \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \inf(Ap_h\, u_h\, , p_h\, u_h - v) = (Au\, , \xi - v)\ , \qquad \forall\, v \in E \quad .$$

Par conséquent, $Au = A\xi$ et $u = \xi$ (puisque A est injectif).

Donc, suivant tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que le filtre des voisinages de 0 dans $\underset{\sim}{R}_+$, $p_h\, u_h$ converge vers u dans E faible, et $Ap_h\, u_h$ converge vers Au dans E' faible. Donc,

$$\lim_{h\to 0} p_h\, u_h = u \quad \text{dans } E \text{ faible} \quad ,$$

et

$$\lim_{h\to 0} Ap_h\, u_h = Au \quad \text{dans } E' \text{ faible} \quad .$$

Montrons enfin que $p_h\, u_h$ converge vers u dans E fort. En effet,

$$(\varphi(\|p_h\, u_h\|) - \varphi(\|u\|))(\|p_h\, u_h\| - \|u\|) \leqslant (Ap_h\, u_h - Au\, , p_h\, u_h - u)$$
$$= (Au - Ap_h\, u_h\, , u) \quad .$$

Donc,

$$\lim_{h\to 0} (\varphi(\|p_h\, u_h\|) - \varphi(\|u\|))(\|p_h\, u_h\| - \|u\|) = 0 \quad .$$

On en déduit aisément que

$$\|p_h\, u_h\| \longrightarrow \|u\| \quad .$$

Donc $p_h\, u_h$ converge vers u dans E fort (puisque E est uniformément convexe).

3. Résolution du problème discrétisé par une méthode itérative.

On se propose maintenant d'indiquer une méthode itérative permettant de résoudre le problème discrétisé, c'est-à-dire résoudre en dimension finie l'équation

$$Bu = g \quad .$$

Plus généralement, on se placera dans un espace de Hilbert H .

THÉORÈME 17. - *Soient* H *un espace de Hilbert, et* B *une application hémicontinue de* H *dans* H , *vérifiant*

$$(Bx - By \ , \ x - y) \geqslant k|x - y|^2 \ , \qquad \forall \ x \ , \ y \in H \ , \quad k > 0 \quad .$$

B *est lipschitzienne sur les ensembles bornés, c'est-à-dire que, pour tout* $N > 0$, *il existe une constante* $C(N)$ *telle que les relations*

$$|x| \leqslant N \ , \quad |y| \leqslant N \ \text{ impliquent } \ |Bx - By| \leqslant C(N) \ |x - y| \quad .$$

Alors, pour tout $g \in H$, *l'équation* $Bu = g$ *admet une solution unique, et la suite définie par l'itération*

$$u_{n+1} = u_n - \rho(Bu_n - g)$$

converge vers u *pour* ρ *et* u_0 *convenablement choisis.*

Démonstration. - L'existence et l'unicité résultent de la proposition 14. On a

$$u_{n+1} = u_n - \rho(Bu_n - g) \quad ,$$

$$u = u - \rho(Bu - g) \quad .$$

D'où, en retranchant membre à membre, et en posant $\varepsilon_n = u_n - u$, on a

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \rho(Bu_n - Bu) \quad .$$

Donc

$$|\varepsilon_{n+1}|^2 = |\varepsilon_n|^2 - 2\rho(Bu_n - Bu \ , \ u_n - u) + \rho^2|Bu_n - Bu|^2$$

$$\leqslant |\varepsilon_n|^2 - 2\rho k|\varepsilon_n|^2 + \rho^2|Bu_n - Bu|^2 \quad .$$

On pose

$$N_0 \geqslant 2|u| \quad \text{et} \quad C_0 = C(N_0) \quad .$$

On fait l'hypothèse de récurrence

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{N_0}{2} \quad .$$

D'où

$$|u_n| \leqslant N_0 \quad ,$$

et par conséquent

$$|Bu_n - Bu| \leqslant C_0 |\varepsilon_n| \quad .$$

Par suite

$$|\varepsilon_{n+1}|^2 \leqslant (1 - 2\rho k + \rho^2 C_0^2) |\varepsilon_n|^2 \quad .$$

On choisit alors ρ de façon optimum, c'est-à-dire de façon à minimiser l'expression $1 - 2\rho k + \rho^2 C_0^2$

$$\rho_{opt} = \frac{k}{C_0^2} \quad .$$

On a alors

$$|\varepsilon_{n+1}|^2 \leqslant (1 - \frac{k^2}{C_0^2}) |\varepsilon_n|^2 \quad .$$

Donc

$$|\varepsilon_{n+1}| \leqslant |\varepsilon_n| \frac{N_0}{2} \quad ,$$

et l'hypothèse de récurrence est satisfaite pourvu que $|\varepsilon_0| \leqslant \frac{N_0}{2}$, c'est-à-dire

$$|u_0 - u| \leqslant \frac{N_0}{2} \quad .$$

Il suffit donc de prendre $u_0 = 0$.

Enfin, pour déterminer N_0 , il faut connaître une estimation a priori de $|u|$. Or

$$(Au - A_0 \, , \, u) \geqslant k |u|^2 \quad .$$

D'où

$$|u| \leqslant \frac{|g - A_0|}{k} = \frac{N_0}{2} \quad .$$

On trouvera, dans [2], diverses applications de ces résultats.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBIN (J.-P.). - Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels (Thèse Sc. math. Paris, 1966) (à paraître).

[2] BREZIS (H.) et SIBONY (M.). - Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones, Arch. for rat. Mech. and Anal., t. 28, 1968, p. 59-82.

[3] BROWDER (Félix E.). - Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, Bull. Amer. math. Soc., t. 71, 1965, p. 780-785.

[4] BROWDER (Félix E.). - On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 56, 1966, p. 419-425.

[5] BROWDER (Félix E.). - The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces (à paraître).

[6] HARTMAN (P.) and STAMPACCHIA (G.). - On some nonlinear elliptic differential-functional equations, Acta Math., Uppsala, t. 115, 1966, p. 271-310.

[7] MOSCO (U.). - A remark on a theorem of F. Browder (à paraître).

[8] STAMPACCHIA (Guido). - Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 4413-4416.