Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

JEAN-PIERRE FERRIER

Ensembles spectraux et approximation polynomiale pondérée

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, n° 2 (1966-1967), exp. n° 14, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_2_A3_0>

ENSEMBLES SPECTRAUX ET APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE

par Jean-Pierre FERRIER

0. Introduction.

Nous nous intéresserons dans la suite à un problème de spectre relatif du type suivant : Etant donnés une algèbre complète à élément unité $\mathfrak{A}$, une sous-algèbre fermée $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ et un élément a de $\mathfrak{A}$, quand peut-on affirmer que le spectre de a dans $\mathfrak{B}$ est égal au spectre de a dans $\mathfrak{A}$? Ce genre de problème se rencontre, par exemple, dans les questions d'approximation polynomiale pondérée.

Prenons, en effet, le problème classique de Bernstein : si l'on désigne par ξ l'application identique de $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers zéro à l'infini, munie de la norme uniforme, on cherche les poids w , c'est-à-dire les fonctions w de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telles que $w\mathbb{R}[\xi]$ soit contenu dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, qui sont fondamentaux dans le sens que $w\mathbb{R}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Comme l'a fait remarquer L. NACHBIN (cf. [10]), les poids fondamentaux sont les poids w qui ne s'annulent pas et sont tels que $\mathbb{R}[\xi]$ soit dense dans l'algèbre $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ des fonctions numériques à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}$ pour la semi-norme $f \longmapsto \|fw\|$. Cette semi-norme n'est en général pas compatible avec la structure d'algèbre, mais on peut définir sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ une bornologie d'algèbre en considérant la famille des semi-normes $f \longmapsto \|fw^n\|$ où n parcourt les entiers $\geqslant 1$. La densité, au sens de MACKEY, de $\mathbb{R}[\xi]$ dans cette algèbre a lieu pour les poids w tels qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que w^n soit fondamental. Naturellement, le problème n'est pas modifié par tensorisation par $\mathbb{C}$, ce qui nous conduit à étudier la densité de $\mathbb{C}[\xi]$ dans l'algèbre $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions numériques complexes continues à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}$. Cette densité équivaut encore à l'égalité des complétés ; or le complété de $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour la bornologie décrite s'identifie à l'algèbre $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$ des fonctions numériques complexes continues f sur $\mathbb{R}$ qui sont w-tempérées, c'est-à-dire telles que pour un entier $n \geqslant 1$, fw^n soit bornée (voir L. WAELBROECK [15]). Dans cette algèbre, les ensembles bornés sont ceux des f telles que l'ensemble des fw^n soit uniformément borné pour un même entier n ; autrement dit, la bornologie est définie par les semi-normes $f \longmapsto \|fw^n\|$. Il est facile de voir que ces semi-normes sont complétantes et, par conséquent, que $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$ est complète. Par ailleurs, $\mathcal{C}_p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$, car pour toute fonction f de $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$, telle par exemple que fw^n soit bornée, la suite obtenue en tronquant à la valeur entière p, $\mathrm{Re}(f)^+$, $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$ et $\mathrm{Im}(f)^-$, converge au sens de MACKEY vers f pour un borné relatif à l'entier $n+1$. Ici $\mathfrak{A}$ sera l'algèbre $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$, $\mathfrak{B}$ sera l'adhérence de $\mathbb{C}[\xi]$ dans cette dernière, et a sera ξ. Nous allons voir que le problème de densité initial équivaut à l'égalité des spectres $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{B}}\, a$ et $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}}\, a$. Le seul point non absolument trivial consiste à voir que si les spectres sont égaux, les algèbres sont égales ; or c'est un résultat très élémentaire, car si $\mathfrak{B}$ contient $(\xi - s)^{-1}$ pour tout s du complémentaire de $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}}\, a$, c'est-à-dire s non réel, $\mathfrak{B}$ contient la sous-algèbre engendrée par ces éléments dont on sait qu'elle est dense dans $\theta_0(\mathbb{R}, w, \mathbb{C})$. En fait, cette méthode permet seulement de savoir à quelle condition w^n est fondamental pour un certain n ; nous verrons cependant que le problème classique de Bernstein, bien qu'incompatible en apparence avec les structures d'algèbre, équivaut à un problème de spectre relatif pour une certain algèbre bornologique. Il semble au contraire qu'il n'y ait aucun espoir en une formulation simple de nature topologique.

Nous nous intéresserons à un problème un peu plus général que le problème de Bernstein et considérerons une semi-norme quelconque au lieu d'une semi-norme associée à un poids, afin d'englober le cas uniforme et le cas $\mathcal{L}^p$. De plus, nous ne nous limiterons pas à l'approximation sur $\mathbb{R}$, mais essayerons d'étendre la théorie à certains ensembles fermés de $\mathbb{C}$, ce qui nous permettra de trouver des énoncés plus fins que le théorème classique de Mergeljan (cf. [9]). Par la transformation de Fourier, nous obtiendrons, comme corollaires, quelques raffinements concernant les fonctions quasi-analytiques. Nous introduirons des classes quasi-analytiques généralisées définies par des semi-normes sur $\mathbb{C}[X]$. Enfin, nous donnerons des exemples relatifs aux algèbres complètes abstraites en utilisant le calcul symbolique de L. Waelbroeck en un élément non régulier (cf. [14] ou [15]).

1. Rappels sur les bornologies.

Dans tout ce qui suit, la terminologie relative aux espaces bornologiques (ou espaces à bornés) est conforme au langage adopté par L. WAELBROECK (voir [14] ou [15]), qui se trouve encore développé dans le séminaire "Banach" [13]. Nous rappelons simplement ici les définitions les plus importantes. La donnée d'une bornologie sur un ensemble E est la donnée d'un ensemble $\mathfrak{B}$ de parties de E qui satisfait aux axiomes qui suivent :

(B_1) *La réunion de deux éléments de* $\mathfrak{B}$ *appartient à* $\mathfrak{B}$.

(B_2) <u>Toute partie d'un élément de $\mathfrak{B}$ appartient à $\mathfrak{B}$</u> .

(B_3) <u>$\mathfrak{B}$ contient les ensembles réduits à un élément</u>.

Les éléments de $\mathfrak{B}$ sont dits ensembles bornés, et tout ensemble muni d'une telle donnée est appelé ensemble bornologique (ou encore ensemble à bornés). Une partie $\mathfrak{B}'$ de $\mathfrak{B}$ sera dite un système fondamental de parties bornées, si tout ensemble est contenu dans un élément de $\mathfrak{B}'$. Etant donnés deux ensembles bornologiques E , F , une application f de E dans F sera dite bornée si l'image par f d'une partie bornée de E est bornée dans F . On définit ainsi une catégorie dont on voit facilement qu'elle possède des limites projectives et inductives quelconques, en particulier, puisque nous n'aurons pas à en considérer d'autre, la limite d'un système inductif filtrant $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles bornologiques est obtenue en prenant d'abord la limite inductive ensembliste, puis la bornologie définie par les images dans la limite des bornées quelconques de E_i .

On trouvera dans [13] la définition des espaces vectoriels bornologiques ; ici nous n'aurons à considérer que des structures de type convexe, le corps de base étant $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. Un espace vectoriel bornologique de type convexe sur un espace vectoriel muni d'une bornologie satisfaisant les axiomes :

(BVC 1) <u>L'enveloppe disquée (i. e. l'enveloppe convexe équilibrée) d'un ensemble borné est bornée</u>.

(BV 2) <u>L'homothétique d'un ensemble borné est borné</u>.

Il découle facilement de ces deux axiomes que la somme de deux ensembles bornés est bornée, ce qui, compte tenu de (BV 2) assure la compatibilité avec la structure vectorielle sous-jacente.

On définit une nouvelle catégorie en prenant comme objets les espaces vectoriels bornologiques de type convexe et comme morphismes les applications linéaires bornées. Contrairement à ce qui se passe en topologie, les limites inductives dans cette catégorie sont les mêmes que dans la catégorie des ensembles bornologiques. On dira qu'un espace bornologique de type convexe est séparé si $\{0\}$ est le seul sous-espace borné ; ces espaces sont les espaces à bornés au sens de L. WAELBROECK.

Comme en topologie, on peut définir une notion de convergence : on dira qu'un filtre Φ converge vers zéro au sens de MACKEY s'il existe un borné B tel que, pour tout scalaire λ non nul, λB appartienne à Φ ; en particulier, une suite x_n tend vers zéro au sens de MACKEY s'il existe une suite y_n bornée et une suite λ_n tendant vers zéro de scalaires telles que $x_n = \lambda_n y_n$; on déduit de là des notions d'adhérence et d'ensembles fermés au sens de MACKEY pour lesquelles on voit facilement qu'il suffit de se limiter aux suites.

On montre que, pour tout espace bornologique de type convexe, il existe une famille $(\pi_i)_{i\in I}$ de semi-normes telle que les homothétiques des boules unité $\pi_i^{-1}([0\ ,\ 1])$ constituent un système fondamental de parties bornées ; autrement dit tout espace bornologique de type convexe est limite inductive d'espaces semi-normables. On peut prendre pour ces derniers les E_B, où E_B est l'espace vectoriel engendré par un disque borné B muni de la jauge de B dans E_B. On dira qu'un disque B est complétant si E_B est un espace de Banach, et qu'un espace bornologique de type convexe est complet s'il admet un système fondamental de disques bornés complétants, ou, ce qui revient au même, s'il est séparé et limite inductive d'espaces de Banach. L'intérêt de ces espaces est que y est convergente toute suite de Cauchy-Mackey, c'est-à-dire toute suite qui est de Cauchy dans un espace du type E_B. De plus, l'ensemble des sommes $\sum \lambda_n x_n$, où x_n est dans un ensemble borné fixe et où $\sum|\lambda_n| \leq 1$, est borné.

Une algèbre bornologique de type convexe sera une algèbre munie d'une bornologie de type convexe satisfaisant l'axiome :

(AB) <u>Le produit de deux ensembles bornés est borné</u>.

On écrira algèbre complète au lieu d'algèbre bornologique de type convexe complète ; une telle algèbre est donc limite inductive d'espaces de Banach, mais n'est pas en général limite inductive d'algèbres de Banach.

Ces rappels étant faits, nous aurons encore besoin d'une notion nouvelle, celle de bornologie d'algèbre de type convexe engendrée par une semi-norme. Etant données une algèbre A et une semi-norme finie π sur A de boule unité $\pi^{-1}([0\ ,\ 1]) = B$, considérons les ensembles $\lambda\Gamma(B^n)$ homothétiques des enveloppes disquées des ensembles B^n. Nous allons voir qu'ils sont un système fondamental de parties bornées pour une bornologie d'algèbre de type convexe sur A qui est la moins fine de celles pour lesquelles π est bornée. Le seul point à vérifier est la stabilité par multiplication ; or celle-là résulte de l'inclusion :

$$\Gamma(B^n).\Gamma(B^p) \subset \Gamma(B^{n+p}) \ .$$

En effet, tout élément de $\Gamma(B^n)$ peut s'écrire comme une somme finie $\sum\limits_i \lambda_i x_i$, où les x_i appartiennent à B^n et $\sum|\lambda_i| \leq 1$; de même, tout élément de $\Gamma(B^p)$ s'écrit $\sum\limits_j \mu_j y_j$, où y_j est dans B^p et $\sum|\mu_j| \leq 1$. Le produit de ces deux éléments s'écrit donc $\sum\limits_{i,j} \lambda_i \mu_j x_i y_j$, et on a clairement $x_i y_j \in B^{n+p}$ et

$$\sum_{i,j} |\lambda_i \mu_j| = \sum_i |\lambda_i| \sum_j |\mu_j| \leq 1 \ .$$

2. Résultats préliminaires.

Désignons par $\mathcal{A}$ une algèbre complète à élément unité sur $\underset{\sim}{C}$. On rappelle qu'une partie S de $\underset{\sim}{C}$ est dite spectrale pour un élément a de $\mathcal{A}$, si $(a - s)$ est inversible pour tout s du complémentaire de S et la fonction $s \longmapsto (a - s)^{-1}$ ainsi définie est bornée sur cet ensemble. Les ensembles spectraux pour a forment un filtre à base ouverte que l'on notera $\sigma(a)$ conformément à [14]. Le spectre classique $Sp(a)$ de a étant l'ensemble des s de $\underset{\sim}{C}$ tels que $(a - s)$ ne soit pas inversible est encore l'ensemble des s tels que $\complement\{s\}$ ne soit pas spectral ; il est clair que $Sp(a)$ est contenu dans l'intersection des ensembles de $\sigma(a)$. Nous dirons enfin qu'un ensemble P de polynômes à coefficients complexes est borné en un point a de $\mathcal{A}$ (resp. un point s de $\underset{\sim}{C}$) si l'ensemble des $p(a)$ (resp. $p(s)$) est borné lorsque p parcourt P. Cela va permettre de formuler quelques résultats très simples qui seront utiles par la suite.

PROPOSITION 1. - Pour que s appartienne au spectre de a, il faut que, pour tout ensemble disqué P de polynômes borné en a, ainsi que l'ensemble Q des polynômes p tels que $(X - s)P$ soit dans P, P soit borné en s.

Cet énoncé n'est qu'un cas particulier du suivant :

PROPOSITION 1 bis. - Pour que S soit spectral pour a, il suffit qu'il existe pour tout $s \notin S$, une suite $(p_{n,s})_{n \in N}$ de polynômes telle que $p_{0,s} = 1$, $p_{n,s}(s) = 2^n$, de façon que l'ensemble des $p_{n,s}$, lorsque n et s varient, reste borné en a, ainsi que l'ensemble Q des polynômes p tels que, pour un $s \notin S$, $(X - s)p$ soit dans l'enveloppe disquée de la suite $(p_{n,s})_{n \in N}$.

En effet, si $p_{n,s}$ satisfait les conditions de l'énoncé, on peut écrire :

$$p_{n,s} = 2^{-n} - (X - s)q_{n,s} \qquad \text{avec} \quad q_{n,s} \in \underset{\sim}{C}[X]$$

d'où $(X - s)(2^{-n} q_{n,s}) - 1 = - 2^{-n} p_{n,s}$, et par suite

$$2^{-n} q_{n,s} - 2^{-(n+m)} q_{n+m,s} \in 2^{-n+1} Q .$$

Si maintenant B désigne un disque borné complétant contenant l'unité, les $p_{n,s}(a)$ et les $q(a)$ pour q dans Q, il est clair que la suite $2^{-n} q_{n,s}(a)$ est une suite de Cauchy-Mackey qui converge dans l'ensemble borné $3B$ vers un élément a_s. Or a_s vérifie :

$$(a - s)2^{-n} q_{n,s}(a) - 1 \in 2^{-n} B ,$$

donc $(a - s)2^{-n+m} q_{n+m,s}(a) - 1 \in 2^{-n} B$.

En passant à la limite suivant B, on obtient

$$(a - s)a_s - 1 \in 2^{-n} B ,$$

donc $(a - s)a_s - 1 = 0$, ce qui prouve que a_s est l'inverse de $(a - s)$; enfin, comme $a_s \in 3B$, $(a - s)^{-1}$ est borné indépendamment de s.

PROPOSITION 2. - _Si_ a _engendre une sous-algèbre unitaire dense, pour que_ s _appartienne au spectre de_ a, _il suffit que tout ensemble de polynômes borné en_ s _soit borné en_ a.

En effet, supposons par l'absurde que s n'appartienne pas au spectre de a, on en déduirait une suite p_n de $\mathbb{C}[X]$ telle que $p_n(a)$ approche $(a - s)^{-1}$, donc un borné B de $\mathfrak{A}$ avec, par exemple : $p_n(a) - (a - s)^{-1} \in 2^{-n} B$, ou $(a - s)p_n(a) - 1 \in 2^{-n}(a - s)B$. Si on pose alors $q_n = 2^n((X - s)p_n - 1)$, il vient

$$q_n(a) \in (a - s)B \qquad \text{et} \qquad q_n(s) = - 2^n ,$$

ce qui montre que la suite q_n est bornée en a sans l'être en s.

On va s'intéresser maintenant à des problèmes de spectre relatif, mais pour des raisons techniques, on va être amené à ne plus supposer les bornologies compatibles avec les structures d'algèbre. $\mathfrak{B}$ désigne maintenant une sous-algèbre unitaire d'une algèbre à unité $\mathfrak{A}$ munie d'une bornologie de type convexe. On considère un élément a de $\mathfrak{B}$ et un point s tel que $(a - s)$ soit inversible dans $\mathfrak{A}$. $\overline{\mathfrak{B}}$ désigne l'adhérence de $\mathfrak{B}$ au sens de MACKEY dans $\mathfrak{A}$.

PROPOSITION 3. - _Pour que_ $(a - s)^{-1}$ _soit dans_ $\overline{\mathfrak{B}}$, _il suffit qu'il existe un ensemble borné_ B _de_ $\mathfrak{A}$ _tel que l'ensemble_ P _des polynômes_ p _tels que_ $p(a)$ _soit dans_ $(a - s)B$ _ne soit pas borné en_ s ; _cette condition est nécessaire lorsque la sous-algèbre unitaire engendrée par_ a _est dense dans_ $\mathfrak{B}$.

La preuve de la condition nécessaire est la même que celle de la proposition 2. Pour montrer la condition suffisante, on peut toujours supposer B disqué et choisir alors une suite p_n dans P de façon que $p_n(s) = - 2^n$. On peut alors écrire

$$p_n = - 2^n + (X - s)q_n \qquad \text{avec} \quad q_n \in \mathbb{C}[X] ,$$

d'où $p_n(a) = - 2^n + (a - s)q_n(a)$, $2^{-n} q_n(a) - (a - s)^{-1} \in 2^{-n} B$, soit, par passage à la limite suivant B, $(a - s)^{-1} \in \overline{\mathfrak{B}}$.

3. Ensembles fermés de type croissant.

Considérons toujours une algèbre à unité $\mathfrak{a}$ munie d'une bornologie de type convexe et un élément a de $\mathfrak{a}$. Soit d'autre part S un ensemble fermé du plan complexe.

DÉFINITION 1. - On dira que S est de type croissant pour a , si chaque fois que (f_α) et (g_α) sont deux familles de fonctions rationnelles dont les pôles sont dans le complémentaire de l'ensemble $\Sigma = S \cup \mathrm{Sp}(a)$ et telles que l'on ait $|f_\alpha(s)| \leqslant |g_\alpha(s)|$ pour tout α et tout point s de S , et que (g_α) est bornée en a , alors f_α l'est aussi.

Dans le cas où $\mathfrak{a}$ est une C^*-algèbre, le calcul symbolique montre que le spectre de a est de type croissant pour a . Un cas important que nous aurons à considérer est celui où la droite réelle $\mathbb{R}$ est de type croissant pour a . Nous allons voir comment les énoncés du paragraphe précédent se modifient lorsqu'on y ajoute la donnée d'un ensemble fermé S de type croissant pour a dans l'algèbre $\mathfrak{a}$.

PROPOSITION 4. - Avec les notations précédentes, s'il existe un point s du complémentaire de $\Sigma = S \cup \mathrm{Sp}_{\mathfrak{a}}(a)$ tel que $(a - s)^{-1}$ n'adhère pas à $\mathfrak{B}$, pour qu'un point t distinct de s du complémentaire de Σ soit tel que $(a - t)^{-1}$ adhère à $\mathfrak{B}$, il suffit qu'il existe un ensemble P de polynômes borné en a et non en t , et cette condition est nécessaire lorsque la sous-algèbre unitaire engendrée par a est dense dans $\mathfrak{B}$.

La condition est suffisante, car si P est borné en a , l'ensemble B des $(a - t)^{-1}\, p(a)$ où p parcourt P , est borné.; en effet, si on pose $q(X) = \dfrac{p(X)}{X - t}$, il est clair que l'on a : $|q(\sigma)| \leqslant \dfrac{|p(\sigma)|}{\alpha(t\ ,\ S)}$ pour tout point σ de S , ce qui montre que l'ensemble des $q(a)$ est borné. Par suite, il existe un ensemble borné B tel que $p(a) \in (a - t)B$, et il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 4.

Pour prouver la condition nécessaire, il suffit, d'après la proposition 4, de voir que $p(t)$ reste borné lorsque $(a - t)^{-1}\, p(a)$ varie dans un ensemble borné ; or s'il en est ainsi $(a - s)^{-1}\, p(a)$ varie aussi dans un ensemble borné, puisque $\sup\limits_{\sigma \in S} \left|\dfrac{\sigma - t}{\sigma - s}\right| < +\infty$. Par suite, $(a - s)^{-1}$ n'étant pas dans $\overline{\mathfrak{B}}$, on sait, toujours par la proposition 4, que $p(s)$ reste borné, donc aussi $(a - s)^{-1}\, p(s)$. Or, on peut écrire

$$p = p(s) + (X - s)q \qquad \text{avec} \quad q \in \mathbb{C}[X]$$

d'où $(a - s)^{-1}\, p(a) = (a - s)^{-1}\, p(s) + q(a)$. Par suite, $q(a)$ reste borné, d'où, par hypothèse, $q(t)$, et enfin, $p(t) = p(s) + (t - s)\, q(t)$.

4. Formes linéaires se ramenant à des intégrales.

Dans ce paragraphe, X désigne un espace localement compact et $\mathcal{A}$ une algèbre de fonctions numériques complexes continues sur X contenant les constantes. On notera $\theta_0(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions continues f sur X telles qu'il existe g dans $\mathcal{A}$ avec $|f| \leq |g|$. Il est clair que $\theta_0(\mathcal{A})$ est stable par homothétie et multiplication, mais ne l'est en général pas par addition. Nous ferons donc cette hypothèse qui se trouvera réalisée dans le cas que nous aurons à considérer grâce au lemme suivant :

LEMME 1. - *Si X est un sous-espace localement compact de $\mathbb{C}$ non partout dense, et $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans un ensemble donné $P \subset \complement X$, $\theta_0(\mathcal{A})$ est une algèbre.*

Nous devons seulement vérifier que, pour toute suite finie $f_1, \ldots, f_n$ de fonctions de $\mathcal{A}$, il existe une fonction g de $\mathcal{A}$ telle $\sum_{i=1}^{n} |f_i(s)| \leq |g(s)|$ pour tout $s \in X$. Soient $s_1, \ldots, s_p$ les pôles qui interviennent dans les f_i, et considérons la fonction $h(s) = s - s_0 + \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{s - s_j}$ où s_0 et les λ_j sont des nombres complexes choisis de façon que h ne s'annule pas sur $\overline{X}$. Voyons qu'un tel choix est possible, en effet, $h(s) = 0$ s'écrit en annulant un polynôme de degré $p + 1$ et si nous trouvons s_0 et des λ_j de façon que h s'annule en $p + 1$ points $t_1, \ldots, t_{p+1}$ distincts et distincts des s_j du complémentaire de $\overline{X}$, le résultat cherché suivra. Or, s_0 et les λ_j sont déterminés par le système d'équations linéaires

$$t_k - s_0 + \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j}{t_k - s_j} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p + 1).$$

Comme il y a autant d'équations que d'inconnues, l'existence d'une solution est assurée par la non nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{t_1 - s_1} & \cdots & \frac{1}{t_1 - s_j} & \cdots & \frac{1}{t_1 - s_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{t_k - s_1} & \cdots & \frac{1}{t_k - s_j} & \cdots & \frac{1}{t_k - s_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{1}{t_{p+1} - s_1} & \cdots & \frac{1}{t_{p+1} - s_j} & \cdots & \frac{1}{t_{p+1} - s_p} \end{vmatrix}$$

Or ce déterminant est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est $p(p + 1) - p = p^2$. Comme il s'annule lorsque deux s_j ou deux t_k sont égaux, il est divisible par $\prod_{j\neq\ell} (s_j - s_\ell) \prod_{k\neq q} (t_k - t_q)$ qui est de degré $\frac{(p-1)p}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = p^2$, donc égal au quotient de ce produit par un polynôme, et par suite non nul, d'après les hypothèses faites sur les s_j et les t_k.

Choisissons un entier N majorant les ordres des pôles a_i et les degrés des parties entières. La fonction $(\sum_{i=1}^{n} |f_i|)/(|h^{N+1}|)$ tend vers zéro à l'infini et au voisinage des a_i, donc est borné sur $\overline{\Omega}$ par un $\lambda > 0$. Il est clair que $g = \lambda h^{N+1}$ convient.

Toujours dans l'hypothèse où $\theta_0(\mathfrak{a})$ est une algèbre, considérons une semi-norme π sur $\mathfrak{a}$. Nous pouvons associer à π une semi-norme π^* sur $\theta_0(\mathfrak{a})$ en posant :

$$\pi^*(f) = \inf_{\substack{g\in\mathfrak{a} \\ |g|\geq|f|}} \pi(g) .$$

π^* est bien une semi-norme, car

$$\pi^*(f_1 + f_2) = \inf_{\substack{g\in\mathfrak{a} \\ |g|\geq|f_1+f_2|}} \pi(g) \leqslant \inf_{\substack{g_1,g_2\in\mathfrak{a} \\ |g_1|\geq|f_1|,|g_2|\geq|f_2|}} \pi(g_1 + g_2)$$

$$\leqslant \inf_{\substack{g_1,g_2\in\mathfrak{a} \\ |g_1|\geq|f_1|,|g_2|\geq|f_2|}} (\pi(g_1) + \pi(g_2)) = \pi^*(f_1) + \pi^*(f_2) .$$

De façon évidente, on a $\pi^* \leqslant \pi$ sur $\mathfrak{a}$ et si π est finie, π^* l'est aussi. Nous dirons qu'une semi-norme π sur $\mathfrak{a}$ est croissante si l'on a $\pi^* = \pi$ sur $\mathfrak{a}$; il revient au même de dire que l'on a $\pi(f) \leqslant \pi(g)$ dès que f, g sont des fonctions de $\mathfrak{a}$ telles que $|f| \leqslant |g|$. En général, π^* est croissante sur $\theta_0(\mathfrak{a})$ et c'est la plus grande semi-norme sur $\theta_0(\mathfrak{a})$ qui soit plus petite que π sur $\mathfrak{a}$.

Lorsque π est une semi-norme finie croissante sur $\mathfrak{a}$, le problème se pose de savoir si pour toute forme linéaire φ continue pour π sur $\mathfrak{a}$, il existe une mesure μ sur X telle que toute fonction f de $\mathfrak{a}$ soit μ-intégrable et que l'on ait $\varphi(f) = \int f(x)\, d\mu(x)$. On peut, lorsque $\theta_0(\mathfrak{a})$ est une algèbre, prolonger φ en une forme linéaire ψ continue pour π^* ; la restriction de ψ à $\mathcal{K}(X)$ définit une mesure de Radon μ, et on est conduit à chercher si ψ est l'intégrale associée à la mesure μ. On peut se ramener au cas où ψ est une forme linéaire réelle positive en écrivant $\psi = \mathrm{Re}\,\psi + i\,\mathrm{Im}\,\psi$, puis en décomposant $\mathrm{Re}\,\psi$ et $\mathrm{Im}\,\psi$ en différences de deux formes linéaires positives, ce qui est possible puisque $\theta_0(\mathfrak{a})$ est un espace vectoriel réticulé sur $\mathbb{R}$; la croissane de π^* assure alors la continuité de chacune des quatre formes obtenues.

On connait une réponse affirmative lorsque $\mathfrak{A}$ contient une application propre ou, plus généralement, lorsque toute fonction f de $\mathfrak{A}$ est dominée à l'infini par une autre fonction de $\mathfrak{A}$, parce qu'alors le cône positif de $\theta_0(\mathfrak{A})$ est adapté (voir [4]). Toutefois, il n'en est en général pas ainsi lorsque X est, par exemple, ouvert et $\mathfrak{A}$ une algèbre de fractions rationnelles. Cependant :

LEMME 2. - <u>On suppose que</u> X <u>est un sous-espace localement compact de</u> $\underset{\sim}{C}$ <u>non partout dense et que</u> $\mathfrak{A}$ <u>est l'algèbre des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans un ensemble donné</u> P <u>disjoint de</u> X <u>mais contenant tous les points de</u> $\overline{X}$ <u>qui ne sont pas dans</u> X. <u>Alors, pour toute semi-norme finie croissante</u> π <u>sur</u> $\mathfrak{A}$, <u>et toute forme linéaire</u> ψ <u>sur</u> $\theta_0(\mathfrak{A})$ <u>continue pour</u> π^*, <u>si</u> μ <u>désigne la mesure de Radon définie par</u> ψ :

(i) <u>Toute fonction de</u> $\theta(\mathfrak{A})$ <u>est</u> μ-<u>intégrable</u> ;

(ii) <u>Si</u> $f \in \theta(\mathfrak{A})$, $\int f(x)\, d\mu(x) = \psi(f)$;

(iii) <u>Si</u> $f \in \theta(\mathfrak{A})$, $\int |f(x)|\,|d\mu|(x) \leqslant \|\psi\|_\pi\, \pi(f)$.

L'énoncé (iii) est une conséquence facile du fait que si $f \in \theta(\mathfrak{A})$, $f \geqslant 0$, on a :

$$\int f(x)\,|d\mu(x)| = \sup_{\substack{|g|\leqslant f \\ g\in\theta_0(\mathfrak{A})}} \int g(x)\, d\mu(x) .$$

Pour voir (i) et (ii), nous avons vu qu'il suffisait de se ramener au cas où ψ était positive ; de plus, il suffira de les vérifier pour des fonctions positives. Si on restreint ψ à l'algèbre $\mathcal{C}_0(\overline{X})$ des fonctions continues sur $\overline{X}$ qui tendent vers zéro à l'infini, on obtient une forme linéaire continue positive, donc une mesure de Radon bornée positive ν . Nous allons d'abord vérifier (i) et (ii) avec la mesure ν . Soit donc f une fonction positive de $\theta_0(\mathfrak{A})$; il est immédiat qu'il existe une fonction $g > 0$ dans $\theta_0(\mathfrak{A})$ telle que f/g tende vers zéro à l'infini, et aux points au voisinage desquels f n'est pas bornée. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc écrire f comme somme de deux fonctions positives f_1 et f_2 où f_1 est dans $\mathcal{C}_0(\overline{X})$ et $f_2/g \leqslant \varepsilon$. Par suite, on aura :

$$\psi(f) - \psi(f_1) \leqslant \varepsilon\psi(g) ,$$

donc $\psi(f) = \sup\limits_{\substack{f_1\leqslant f \\ f_1\in\mathcal{C}_0(\overline{X})}} \psi(f_1) = \sup\limits_{\substack{f_1\leqslant f \\ f_1\in\mathcal{C}_0(\overline{X})}} \nu(f_1)$, et, par BEPPO-LÉVY , f est ν-intégrable et $\int f(x)\, d\nu(x) = \psi(f)$.

La démonstration sera achevée lorsqu'on aura montré qu'on peut remplacer ν par μ , et pour cela que la restriction de ν à $\overline{X} \cap \complement X$ est nulle. Or cette restriction est une mesure positive sur $\underset{\sim}{C}$ telle que $s \longmapsto \dfrac{1}{|s - a|^n}$ soit intégrable pour tout $a \in \underset{\sim}{C}$ et tout entier n , en particulier, pour $n = 2$. Nous allons voir qu'il n'existe pas de telle mesure autre que 0 . Il suffit de voir qu'il n'en existe pas à support compact, puis, par similitude, à support dans le carré K défini par les inégalités :

$$0 \leqslant \operatorname{Re}(s) \leqslant 1 \ , \qquad 0 \leqslant \operatorname{Im}(s) \leqslant 1 \ .$$

Nous allons prouver en fait un résultat plus précis ; pour cela désignons par $K(s\ ;\ t)$ le carré fermé de centre s et de côté t , et posons pour toute mesure positive μ sur K :

$$\mu_*(s) = \inf_{t \geqslant 0} \frac{1}{t^2}\, \mu(K(s\ ;\ t)) \ .$$

μ_* est la densité minimale de μ ; le lemme qui suit permet de relier μ et la densité minimale de μ .

LEMME 3. - <u>Il existe une constante</u> A <u>telle que l'on ait pour toute mesure positive</u> μ <u>sur</u> K :

$$\|\mu\| < A \sup_{s \in K} \mu_*(s) \ .$$

Il faut voir que $\mu(1)$ est majoré sur l'ensemble des mesures positives μ qui vérifient $\mu_*(s) \leqslant 1$ pour tout s . Or, si $\mu_*(s)$ est inférieur à 1 , il existe un nombre strictement positif t tel que l'on ait :

$$\frac{1}{t^2}\, \mu(K(s\ ;\ t)) \leqslant 2 \ ,$$

donc un entier n tel que $\mu(K(s\ ;\ 2^{-n})) \leqslant 2^{-2n+3}$. Pour terminer la démonstration, nous devons nous appuyer sur un autre lemme :

LEMME 4. - <u>On suppose que pour tout point</u> s <u>de</u> K , <u>on s'est donné un carré</u> K_s <u>de centre</u> s <u>et de rayon</u> 2^{-n} <u>pour un certain entier</u> n . <u>Dans ces conditions, on peut trouver une suite finie</u> s_i <u>dans</u> K <u>de façon que les</u> K_{s_i} <u>recouvrent</u> K <u>et que la somme des volumes des</u> K_{s_i} <u>soit inférieure à</u> 16 .

Désignons d'abord par A_n l'ensemble des s tels que le côté de K_s soit égal à 2^{-n} . On peut trouver une suite s_i^0 dans A_0 de façon que la réunion des carrés H_i^0 de centre s_i et côté 2^{-1} recouvre A_0 et que chaque s_i^0 n'appartienne à aucun carré H_j^0 pour $j \neq i$. Pour cela, on construit la suite s_i^0 par récurrence : si $s_1^0 , \dots , s_p^0$ ont été choisis de façon que chaque s_i^0 n'appartienne à aucun H_j^0 pour $i \leqslant p$, $j \leqslant p$ et $j \neq i$ et si $A_0 \cap \complement \bigcup_{i \leqslant p} H_i^0$ n'est pas vide, on choisit un point arbitraire s_{n+1}^0 dans cet ensemble. Comme les distances mutuelles entre les s_i^0 sont au moins égales à 2^{-1} , il existera un entier q tel que $A_0 \cap \complement \bigcup_{i \leqslant q} H_i^0$ soit vide et la famille $(s_i^0)_{i \leqslant q}$ satisfait les conditions cherchées.

Ce premier pas franchi, on construit pour tout n , par récurrence sur n , une suite finie s_i^n de points de A_n de façon que si H^n est la réunion des carrés H_i^n de centre s_i^n et de côté 2^{-n-1} , la réunion des H^p pour $p \leqslant n$ recouvre la réunion des A_p pour $p \leqslant n$ et que chaque s_i^n n'appartienne à aucun H_j^p pour $i \neq j$ ou $p < n$. Supposons, en effet, les s_i^p construites jusqu'à l'ordre $n - 1$ de façon à satisfaire les conditions ci-dessus. On considère alors

$$B_n = A_n \cap \complement \bigcup_{p<n} H^p ,$$

et par une construction semblable à celle faite pour $n = 0$, on peut trouver une suite s_i^n dans B_n de façon que les H_i^n recouvrent B_n et que pour $i \neq j$, x_i^n n'appartienne pas à H_j^n .

Il est immédiat que lorsque i et n varient, les H_i^n forment un recouvrement de K , donc aussi les $\overset{o}{K}{}_{s_i}^n$: on peut donc extraire une suite finie s_i de l'ensemble des s_i^n de façon que les carrés K_{s_i} recouvrent K . Mais, il résulte de la construction de s_i^n , des carrés L_i^n de centre s_i^n et de côté 2^{-n-2} sont d'intérieurs disjoints. Donc

$$\sum_i \operatorname{vol}(K_{s_i}) \leqslant 16 \sum_{i,n} \operatorname{vol}(L_i^n) \leqslant 16 .$$

La démonstration du lemme 4 est achevée.

Pour terminer celle du lemme 3, il suffit de prendre pour K_s un carré de centre s et de côté 2^{-n} pour un entier n tel que sa mesure soit inférieure à 2^{-2n+3} . Par suite, on a successivement :

$$\mu(1) \leqslant \sum_i \mu(K_{s_i}) \leqslant 8 \sum_i \operatorname{vol}(K_{s_i}) \leqslant 128 .$$

Voyons enfin comment s'achève la preuve du lemme 2. Si on suppose que $s \longmapsto \dfrac{1}{|s - a|^2}$ est μ-intégrable, on voit facilement que $\mu_*(s) = 0$ et si $\mu_* = 0$, le lemme 3 montre que $\mu = 0$.

Remarque. - Pour prouver le lemme 2, on aurait pu, au lieu de la densité inférieure, considérer seulement la fonction $s \longmapsto \limsup_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\, \mu(K(s\, ;\, t))$.

5. Semi-normes fondamentales.

Dans la théorie classique des poids fondamentaux, on peut, au lieu de considérer l'approximation en norme infinie, considérer l'approximation en norme $\mathcal{L}^p$. Par exemple, H. POLLARD [12] a prouvé dans ces deux cas une condition nécessaire et suffisante pour qu'un poids sur $\underset{\sim}{R}$ soit fondamental. Comme je l'ai fait remarquer dans [5], on peut plus généralement se poser un problème d'approximation pour une semi-norme finie quelconque. De plus, on ne se limitera plus à $\underset{\sim}{R}$, et on considérera un ensemble fermé S de $\underset{\sim}{C}$. σ désignera l'injection canonique de S dans $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ l'algèbre des polynômes en σ et $R(S)$ l'algèbre des fractions rationnelles régulières sur S .

DÉFINITION 2. - Si S est un ensemble fermé de $\underset{\sim}{C}$, on dira qu'une semi-norme finie π sur $R(S)$ est fondamentale si $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ est dense dans $R(S)$ pour π .

Lorsque π est une semi-norme finie croissante définie seulement sur $\underset{\sim}{C}[\sigma]$, on dira encore que π est fondamentale si π^* qui est définie sur $\theta_0(\underset{\sim}{C}[\sigma])$, qui contient $R(S)$ puisque S est fermé, est fondamentale.

Il faut tout d'abord voir le lien entre la définition précédente et la notion classique de poids fondamental ou encore celle de semi-norme fondamentale introduite dans les paragraphes précédents. Rappelons que, dans [5], une semi-norme **finie** π **sur** $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ était dite fondamentale si $\underset{\sim}{C}[\xi]$ était dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ pour π . On vérifie que pour qu'un poids w sur $\underset{\sim}{R}$ ne s'annulant pas soit fondamental, il est nécessaire et suffisant que la semi-norme $f \longmapsto \|fw\|$ soit fondamentale dans le sens de [5], $\|fw\|$ désignant $\|fw\|_\infty$ dans le problème de Bernstein classique et $\|fw\|_p$ dans le cas de l'approximation pondérée en norme $\mathcal{L}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. La définition 2 sera alors justifiée par la proposition qui suit :

PROPOSITION 5. - Soit π une semi-norme finie croissante sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$. Pour que la restriction de π à $R(\underset{\sim}{R})$ soit fondamentale, il faut et il suffit que $\underset{\sim}{C}[\xi]$ soit dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ pour π .

Il suffit de voir que $R(\underset{\sim}{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ pour π . On remarque d'abord que $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ pour π , puis que $R(\underset{\sim}{R}) \cap \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ en norme uniforme, d'après STONE-WEIERSTRASS. Or, si π est finie croissante, la convergence uniforme entraîne la convergence pour π puisqu'alors $\sup_{|f| \leqslant 1} \pi(f) \leqslant \pi(1)$.

On utilisera la condition suivante, a priori plus faible que la définition qui assure qu'une semi-norme π est fondamentale.

PROPOSITION 6. - Soient S un ensemble fermé de $\mathbb{C}$ et π une semi-norme finie sur $R(S)$. Si la convergence uniforme sur S entraîne la convergence pour π et, en particulier, si π est croissante, pour que π soit fondamentale, il suffit que l'adhérence de $\mathbb{C}[\sigma]$ dans $R(S)$ pour π contienne toutes les fonctions $\frac{1}{\sigma - s}$ où s varie dans $\complement S$.

En effet, si la condition est vérifiée, l'adhérence de $\mathbb{C}[\sigma]$, étant un espace vectoriel, contient toutes les fractions rationnelles en σ à pôles simples hors de S . De plus, il suffit de voir que l'on peut approcher les fractions rationnelles en σ à pôles hors de S qui tendent vers zéro à l'infini. Or, on peut approcher uniformément sur S ces fractions par des fractions à pôles simples hors de S qui tendent vers zéro à l'infini.

Dans le cas où $S = \mathbb{R}$, l'algèbre $R(\mathbb{R})$ est involutive. On peut remarquer que toute semi-norme croissante sur $R(\mathbb{R})$ est compatible avec l'involution, puisqu'elle ne dépend que du module.

Si on considère deux ensembles fermés S et S' avec $S \subset S'$ et si π est une semi-norme finie sur $R(S)$, il est clair que par restriction π définit une semi-norme finie π' sur $R(S')$. On voit immédiatement que si π est croissante, π' l'est aussi, et que si π est fondamentale, il en est de même pour π' .

6. Premier théorème d'approximation.

Nous allons voir, dans le cas d'un ensemble S convexe non borné, un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'une semi-norme finie croissante sur $R(S)$ soit fondamentale.

THÉORÈME 1. - Soient S un ensemble fermé convexe non borné de $\mathbb{C}$ et π une semi-norme finie croissante sur $R(S)$. Pour que π soit fondamentale, il suffit que pour toute composante connexe Ω de $\complement S$, l'une des conditions qui suivent soit vérifiée, où ω désigne l'injection canonique de Ω dans $\mathbb{C}$:

(i) Il existe une suite (p_n) de polynômes telle que $(p_n(\sigma))$ tende vers zéro pour π et que pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive φ dans Ω , e^{φ} ne majore qu'un nombre fini de termes de la suite $(|p_n(\omega)|)$.

(ii) Il existe une suite (p_n) de polynômes telle que $(p_n(\sigma))$ soit de Cauchy pour π et que pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive φ dans Ω , e^{φ} ne majore qu'un nombre fini de termes de la suite $(|p_n(\omega)|)$.

(iii) <u>Il existe une suite</u> (p_n) <u>de polynômes telle que</u> $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(p_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$ <u>et que pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive</u> φ <u>dans</u> Ω, e^{φ} <u>ne majore pas la suite</u> $(|p_n(\omega)|)$.

<u>Preuve</u>. - Il est d'abord clair que les conditions avec l'épithète surharmonique entraînent les conditions avec l'épithète harmonique. Inversement, la réciproque est vraie, car si φ est une fonction surharmonique positive dans Ω telle que e^{φ} majore une famille $(|f_\alpha|)$ où f_α est holomorphe dans Ω, φ majore la famille (g_α) où $g_\alpha = \log |f_\alpha|$ de fonctions sousharmoniques, et si on désigne alors par ψ la borne inférieure des fonctions surharmoniques positives qui majorent la famille (g_α), il est clair que ψ est harmonique, comme on le voit facilement en utilisant les propriétés de la réduite. Cela étant, pour prouver que chacune des conditions (i), (ii) et (iii) est suffisante, introduisons la condition technique :

(iv) <u>Il existe une suite</u> (p_n) <u>de polynômes telle que</u> $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(p_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$ <u>et que pour toute fonction surharmonique (resp. harmonique) positive</u> φ <u>dans</u> Ω, e^{φ} <u>ne majore pas la suite</u> $(|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|)$.

Il est clair que (i) entraîne (ii). D'autre part, (ii) entraîne (iv) car de toute suite r_n de $R(S)$ qui est de Cauchy pour π, on peut extraire une sous-suite r'_n telle que la suite $r''_n = r'_{n+1} - r'_n$ vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r''_n))^{1/3} < \infty$. Enfin, (iii) entraîne aussi (iv) d'après l'inégalité évidente $|r_m| \leqslant |\sum_{n=0}^{m} r_n| + |\sum_{n=0}^{m-1} r_n|$. Il suffit donc de prouver le caractère suffisant de la condition (iv) avec l'épithète surharmonique. De plus, on pourra supposer $S \neq \mathbb{C}$, car $R(S) = \mathbb{C}[\sigma]$ si $S = \mathbb{C}$.

Supposons par l'absurde que π ne soit pas fondamentale. Il existe alors d'après la proposition 6 un point a de $\complement S$ tel que $(\sigma - a)^{-1}$ n'adhère pas à $\mathbb{C}[\sigma]$ pour π, puis, d'après le théorème de Hahn-Banach, une forme linéaire φ sur $R(S)$ continue pour π, nulle sur $\mathbb{C}[\sigma]$ et non nulle en $(\sigma - a)^{-1}$. D'après le lemme 2, φ est l'intégrale associée à une mesure μ sur S. Nous pouvons toujours supposer que φ est de norme 1 pour π ; il en résulte que pour toute fonction r de $R(S)$, la mesure $|r\mu|$ est bornée et de masse totale inférieure à $\pi(r)$. Introduisons pour toute mesure bornée ν sur S une fonction holomorphe h_ν dans la composante connexe Ω de a dans $\complement S$, en posant pour tout s de Ω : $h_\nu(s) = \int \frac{d\nu(u)}{u - s}$. Pour tout polynôme p, on a $p(\omega)h_\mu = h_{p(\sigma)\mu}$; il nous faut en effet vérifier que pour tout s de Ω, on a :

$$p(s) \int \frac{d\mu(u)}{u - s} = \int \frac{p(u)\, d\mu(u)}{u - s} ,$$

ou encore que $\int \frac{p(u) - p(s)}{u - s} d\mu(u) = 0$, ce qui résulte de ce que $\frac{p(\sigma) - p(s)}{\sigma - s}$ appartient à $\underset{\sim}{C}[\sigma]$. Nous poserons $h_\mu = h$; on a clairement $h(a) \neq 0$.

Il nous faut prouver que si (p_n) est une suite de polynômes telle que $\sum_{n=0}^{m} (\pi(p_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$, il existe une fonction surharmonique positive φ dans Ω telle que e^φ majore la suite $(|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|)$. Nous utiliserons l'inégalité suivante dans laquelle $\log^+$ désigne comme d'habitude $\sup(0 , \log)$:

$$\text{(a)} \qquad \log^+|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)| \leq \sum_{n=0}^{m} \log(1 + |p_n(\omega)h|) + \log(1 + |h|) - \log|h| .$$

Pour la vérifier, remarquons que le premier membre est majoré par $\log(1+|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|)$, tandis que, par la sous-additivité de la fonction $s \longmapsto \log(1 + x)$ sur $\underset{\sim}{R}_+$, le premier terme du second membre est minoré par $\log(1 + \sum_{n=0}^{m} |p_n(\omega)h|)$, puis par $\log(1 + |\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)h|)$. Tout revient donc à prouver l'inégalité entre nombres réels positifs : $\log(1 + x) \leq \log(1 + xy) + \log(1 + y) - \log y$, laquelle se ramène immédiatement à $(1 + x)y \leq (1 + xy)(1 + y)$.

De l'inégalité (a), en utilisant la majoration pour x réel positif de $\log(1+x)$ par $x^{1/3}$, on déduit l'inégalité :

$$\text{(b)} \qquad \log^+|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)| \leq \sum_{n=0}^{m} |p_n(\omega)h|^{1/3} + |h|^{1/3} - \log|h| .$$

La démonstration sera achevée lorsqu'on aura prouvé que le membre de droite est majoré indépendamment de m par une fonction surharmonique φ ; en effet, φ majorera en particulier $\log^+|p_n(\omega)|$ et sera donc positive. Comme elle majorera $\log^+|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|$ donc $\log|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|$, e^φ majorera $|\sum_{n=0}^{m} p_n(\omega)|$. De plus, Ω étant connexe et h holomorphe non nulle dans Ω , $-\log|h|$ est surharmonique, et il suffira de majorer par une fonction surharmonique l'expression

$$\sum_{n=0}^{m} |p_n(\omega)h|^{1/3} + |h|^{1/3}$$

que l'on peut encore écrire $\sum_{n=0}^{m+1} |p'_n(\omega)h|^{1/3}$ si l'on a posé $p'_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $p'_n = p_{n-1}$. La suite p'_n vérifie encore $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(p'_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$.

Or, on a vu que $p'_n(\omega)h$ était encore $h_{p'_n(\sigma)\mu}$ et que la norme de $p'_n(\sigma)\mu$ était majorée par $\pi(p'_n(\sigma))$. Si on écrit la décomposition de $p'_n(\sigma)\mu$ en quatre mesures positives $p'_n(\sigma)\mu = (\mathrm{Re}(p'_n(\sigma)\mu))^+ - (\mathrm{Re}(p'_n(\sigma)\mu))^- + i(\mathrm{Im}(p'_n(\sigma)\mu))^+ - i(\mathrm{Im}(p'_n(\sigma)\mu))^-$, on est ramené, par la sous-additivité de la fonction $x \mapsto x^{1/3}$ sur $\underset{\sim}{R}_+$, à majorer une somme $\sum_{n=0}^{m} |h_{\nu_n}|^{1/3}$ où ν_n est une suite de mesures positives sur S telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\nu_n\|^{1/3} < \infty .$$

Pour cela, nous allons démontrer au préalable qu'un ensemble S convexe fermé non borné vérifie la propriété :

(A) Pour toute composante connexe Ω de $\complement S$, il existe un point a de Ω et un nombre réel positif k tel que pour toute mesure μ positive bornée de norme 1 sur S, il existe une fonction harmonique positive ℓ dans Ω vérifiant $\ell(a) \leq k$ et $\ell(s) \geq |\int \frac{d\mu(u)}{u-s}|^{1/3}$ pour tout s de Ω.

Remarquons tout de suite qu'il revient au même de dire que pour toute mesure μ positive bornée de norme ≤ 1 sur S, il existe une fonction harmonique positive ℓ dans Ω vérifiant $\ell(a) \leq k\|\mu\|^{1/3}$ et $\ell(s) \geq |\int \frac{d\mu(u)}{u-s}|^{1/3}$ pour tout s de Ω.

Pour montrer la propriété (A), considérons une composante connexe Ω de $\complement S$ et une mesure μ positive bornée de norme 1 sur S et remarquons que le convexe non borné S possède une direction à l'infini correspondant à un argument α ; par suite h_μ ne prend jamais l'argument $\beta = -\bar{\alpha}$. En effet, pour tout s de Ω il existe un demi-plan ouvert affine P contenant S et non s, et $\sigma - s$ prend ses valeurs dans le demi-plan ouvert P' translaté de P adhérent à l'origine. Par suite, $\frac{1}{\sigma - s}$ prend ses valeurs dans le demi-plan ouvert P" conjugué de P et $h_\mu(s)$ est dans P". Or, comme P' contient α, P" contient $\bar{\alpha}$ et, étant saillant, ne peut contenir β. Considérons la détermination de $Z^{1/3}$ définie pour Z non réel positif ayant un argument $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$, et posons

$$\ell = 2 \operatorname{Re}(e^{-i\pi/3}(-\beta h_\nu)^{1/3}) .$$

On voit facilement que ℓ est harmonique positive et que $|h_\nu|^{1/3} \leq \ell$. D'autre part, si a est un point quelconque de Ω, on a $\ell(a) \leq 2|h(a)|^{1/3}$ et $|h(a)| \leq \int \frac{|d\mu|(u)}{|u-s|} \leq \frac{1}{d(s\ ,\ S)}$.

Voyons maintenant comment la démonstration s'achève grâce à la propriété (A). Soit f_n une fonction harmonique positive dans Ω telle que $f_n \geq |h_{\nu_n}|^{1/3}$ et $f_n(a) \leq k\|\nu_n\|^{1/3}$. La série (f_n) est convergente et sa somme f est une fonction harmonique positive qui majore les sommes $\sum_{n=0}^{m} |h_{\nu_n}|^{1/3}$.

7. Second théorème d'approximation.

Nous allons maintenant essayer d'étendre les résultats du paragraphe 6 à des ensembles S plus généraux. Pour cela, posons la définition suivante :

DÉFINITION 3. - Soit S un ensemble fermé de $\mathbb{C}$; on dira que S est un ensemble d'approximation si pour toute semi-norme croissante π sur $R(S)$ qui vérifie l'une quelconque des conditions du type (i) pour une composante connexe Ω de $\complement S$, l'adhérence pour π de $\mathbb{C}[\sigma]$ contient les fractions rationnelles à pôles dans Ω (i. e. la restriction de π à $R(\complement\Omega)$ est fondamentale).

On voit facilement que tout ensemble compact et simplement connexe est un ensemble d'approximation parce qu'il y a déjà approximation uniforme. Nous verrons qu'il peut y avoir des ensembles d'approximation non simplement connexes, mais alors la condition (i) ne sera en général pas vérifiée.

Au cours de la démonstration du théorème 1, ont été en réalité prouvées les deux propositions qui suivent :

PROPOSITION 7. - Tout ensemble fermé de $\mathbb{C}$ qui possède la propriété (A) est un ensemble d'approximation.

PROPOSITION 8. - Tout ensemble fermé convexe non borné de $\mathbb{C}$ possède la propriété (A).

Nous allons voir que la propriété (A) se conserve par réunions finies. De façon précise :

PROPOSITION 9. - Tout ensemble fermé S de $\mathbb{C}$ qui est réunion d'une famille finie $(S_i)_{i=1,\dots,n}$ d'ensembles fermés vérifiant la propriété (A), vérifie lui-même la propriété (A).

Remarquons d'abord que si les inégalités de la propriété (A) sont vérifiées pour un point a de Ω, elles le sont encore pour un autre point de Ω, à condition de changer la constante k. Considérons donc une composante connexe Ω de $\complement S$ et un point a de Ω. Pour chaque i, soit Ω_i la composante connexe de $\complement S_i$ contenant Ω et k_i une constante relative au point a pour S_i. Toute mesure positive bornée de norme $\leqslant 1$ sur S peut s'écrire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ où μ_i est positive bornée de norme $\leqslant 1$ et portée par S_i. Pour chaque i, il existe une fonction harmonique positive h_i sur Ω_i vérifiant $h_i(a) \leqslant k_i$ et $h_i(s) \geqslant \left|\int \frac{d\mu_i(u)}{u-s}\right|^{1/3}$ pour tout s de Ω_i.

Si l'on pose $h(s) = \sum_{i=1}^{n} h_i(s)$, on en déduit aussitôt que $h(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i$ et $h(s) \geqslant |\int \frac{d\mu(u)}{u-s}|^{1/3}$ pour tout s de Ω , ce qui prouve que S possède la propriété (A).

Il faut noter, en particulier, que tout ensemble fermé de $\underset{\sim}{C}$ qui est réunion finie d'ensembles convexes non bornés est un ensemble d'approximation. Sont donc ensembles d'approximation tous les angles saillants ou non. Cette conséquence évidente nous sera utile.

Le théorème qui suit prouve que les ensembles suffisamment réguliers sont d'approximation.

THÉORÈME 2. - Soit S un ensemble fermé de $\underset{\sim}{C}$ vérifiant les deux conditions qui suivent :

(a) Le bord ∂S de S est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa courbure est bornée supérieurement.

(b) Il existe une constante strictement positive a telle que pour tout point x de ∂S , la boule de centre x et de rayon a rencontre ∂S suivant un ensemble connexe.

S est dans ces conditions un ensemble d'approximation.

D'après la proposition 7, il suffit de prouver que S possède alors la propriété (A). Soit donc Ω une composante connexe de $\complement S$, a un point de Ω et μ une mesure positive bornée de masse totale 1 sur Ω . Soit d'autre part k une constante positive majorant la courbure de ∂S . Désignons par U_1 (resp. U_2 , U_3) l'ensemble des nombres complexes de module 1 dont l'argument est dans l'intervalle $[0 , \frac{2\pi}{3}[$ (resp. $[\frac{2\pi}{3} , \frac{4\pi}{3}[$, $[\frac{4\pi}{3} , 2\pi[$), puis par S_1 (resp. S_2 , S_3) l'ensemble des points de ∂S où la normale à ∂S orientée vers Ω a une direction dans U_1 (resp. U_2 , U_3). Désignons encore par T_1 (resp. T_2 , T_3) l'ensemble des points de S dont la distance à S_1 (resp. S_2 , S_3) est inférieure ou égale à $b = \inf(\frac{a}{4} , \frac{1}{40k})$ et par T_4 l'ensemble des points de S dont la distance à ∂S est supérieure ou égale à b .

On peut décomposer μ en une somme $\sum_{i=1}^{4} \mu_i$ de mesures positives bornées où chaque μ_i a son support dans T_i . Il suffit maintenant de trouver des fonctions h_i , $i = 1 , 2 , 3 , 4$, harmoniques positives dans Ω de façon que h_i et μ_i vérifient les inégalités de la condition (A), puisqu alors on pourra prendre $h = \sum_{i=1}^{4} h_i$. Pour $i = 4$, c'est immédiat, car pour tout s de Ω ,

$$|\int \frac{d\mu_4(u)}{u-s}| \leqslant \frac{1}{b} \int d\mu_4(u) \leqslant \frac{1}{b} ,$$

et il suffit de prendre $h = 1/\sqrt[3]{b}$. Etudions maintenant les autres cas et prenons par exemple $i = 2$. Considérons un point s de Ω dont la distance à T_2 est inférieure ou égale à b ; sa distance à S_2 est donc majorée par $2b$. Si on abaisse de s une perpendiculaire à ∂S et si on désigne par x son pied, il est clair que $d(s , x) \leqslant 2b$, donc $d(x , S_2) \leqslant 4b \leqslant a$. Il en résulte alors, grâce aux hypothèses (a) et (b) que l'angle entre les normales dirigées vers Ω en x et en un point s_2 de S_2 tel que $d(s_2 , S_2) \leqslant 4b$ est au plus égal à $\frac{\pi}{12}$, et par suite que $s - x$ a un argument compris entre $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$. Nous aurons maintenant besoin du lemme technique suivant :

LEMME 5. - <u>La composante de</u> $\int \frac{d\mu_2(u)}{u - s}$ <u>suivant la direction de</u> $\overline{s - x}$ <u>est majorée par</u> $\frac{1}{2b}$.

Pour simplifier le calcul, ramenons-nous au cas où $x = 0$ et où s est réel positif. Il résulte aussitôt des hypothèses (a) et (b) que si on pose

$$R = \inf\left(\frac{a}{2} , \frac{1}{k}\right) ,$$

le cercle de centre R et de rayon R ne peut contenir aucun point de S en son intérieur. Autrement dit, pour tout point $u = x + iy$ de S , on doit avoir : $(x - R)^2 + y^2 - R^2 \geqslant 0$. Par suite :

$$\operatorname{Re} \int \frac{d\mu_2(u)}{u - s} = \int \frac{x - s}{(x - s)^2 + y^2}\, d\mu_2(u) \leqslant \frac{x}{y^2}\, d\mu_2(u) .$$

D'où, comme $y^2 \geqslant R^2 - (x - R)^2$, pour tout $x \leqslant R$:

$$\operatorname{Re} \int \frac{d\mu_2(u)}{u - s} \leqslant \int \frac{x}{R^2 - (x - R)^2}\, d\mu_2(u) = \int \frac{1}{2R - x}\, d\mu_2(u) .$$

Le second membre est lui-même majoré par $\frac{1}{R}$, donc par $\frac{1}{2b}$. D'autre part, pour $x > R$, comme $s = d(x , s)$ est majoré par $2b$, donc par R , on a $|u - s| > R$ et $\left|\int \frac{d\mu_2(u)}{u - s}\right| \leqslant \frac{1}{R}$.

Le lemme étant prouvé, si on pose $c = 1/(2b\cos\frac{5\pi}{12})$, on voit aussitôt que la fonction $f(s) = \int \frac{d\mu_2(u)}{u - s} + c$ ne peut pas prendre l'argument $-\pi$ pour les points s de Ω distants de moins de b de T_2 . D'autre part, si la distance de s au support de μ_2 est supérieure à b , on a $\left|\int \frac{d\mu_2(u)}{u - s}\right| \leqslant \frac{1}{b} \leqslant c$, de sorte que $f(s)$ ne peut être réel négatif. Par suite, la fonction $h(s) = 2\operatorname{Re}(e^{-i\pi/3}(-f(s))^{1/3} + \sqrt[3]{c}$ est une fonction harmonique positive dans Ω telle que l'on ait successivement :

$$|\int \frac{d\mu_2(u)}{u - s}|^{1/3} \leqslant |f(s)|^{1/3} + c^{1/3} \leqslant h(s) \ .$$

Enfin, $h(a)$ est majoré par $\sqrt[3]{c} + 2|f(a)|^{1/3}$, donc par $3\sqrt[3]{c} + |\int \frac{d\mu_2(u)}{u - a}|^{1/3}$, soit encore par $3\sqrt[3]{c} + (\frac{1}{d(a\ ,\ S)})^{1/3}$.

8. Applications.

Nous allons maintenant ajouter aux conditions du type (i) une nouvelle condition (v) qui dans le cas particulier où $S = \mathbb{R}$ et où π est une semi-norme associée à un poids permet de retrouver la partie suffisante de la condition classique de H. Pollard (voir [12]). Mais on peut étendre le calcul au cas où S est un angle et obtenir de la sorte une condition plus fine que celle que l'on peut trouver par exemple dans [7].

PROPOSITION 10. - *Si S est un ensemble d'approximation, pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $R(S)$ soit fondamentale, il suffit que pour toute composante connexe Ω de S :*

(v) *il existe un point a de Ω tel que :*

$$\sup_{p\in\mathbb{C}[\sigma],\ \pi(p)\leqslant 1} \int \log^+|p(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) = +\infty$$

où $d\mu_a^{\Omega}$ désigne la mesure harmonique de a dans Ω.

En particulier, lorsque $S = \mathbb{R}$, la condition s'écrit :

(v) $$\sup_{p\in\mathbb{C}[\xi],\ \pi(p)\leqslant 1} \int \log^+|p(u)|\ \frac{du}{1 + u^2} = +\infty \ .$$

Montrons que si la condition (v) est satisfaite, il en est par exemple de même de la condition (iii). En effet, si l'on a $\sup_{\pi(p)\leqslant 1} \int \log^+|p(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) = +\infty$, il existe une suite (p_n) de polynômes telle que $\pi(p_n(\sigma)) \leqslant 1$ et $\int \log^+|p_n(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) \geqslant 2n$. Si l'on pose alors $q_n = 2^{-n}\, p_n$ et $r_n = q_{n+1} - q_n$, r_n vérifie les hypothèses de la condition (iii). En effet,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(r_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$$

et d'autre part,

$$\int \log^+|q_n(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) \geqslant \int \log^+|p_n(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) - n \log 2 \int d\mu_a^{\Omega}(u) \geqslant (2 - \log 2)n \ .$$

Par suite, pour toute fonction φ harmonique positive dans Ω telle que e^{φ} majore les $|q_n(\omega)|$, si on pose pour tout u de $\partial\Omega$, $\psi(u) = \liminf_{\substack{s\to u\\ s\in\Omega}} \varphi(s)$, on doit avoir pour tout u de $\partial\Omega$: $\psi(u) \geqslant \log^+|q_n(u)|$, par la semi-continuité inférieure de $\log^+|q_n|$. D'où

$$\int \log^+|q_n(u)|\ d\mu_a^{\Omega}(u) \leqslant \int \psi(u)\ d\mu_a^{\Omega}(u) \leqslant \varphi(a) ,$$

puis $(2 - \log 2)n \leqslant \varphi(a)$ pour tout n , ce qui est absurde.

Nous laissons au lecteur le soin de déduire de la proposition 10, par des calculs d'un type classique, les corollaires qui suivent :

COROLLAIRE 1. - _Si S est un angle d'ouverture α , avec $0 < \alpha < 2\pi$, et de sommet s_0 , pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $P(S)$ soit fondamentale, il suffit que l'on ait_

$$\sup_{p\in \underset{\sim}{C}[\sigma],\ \pi(p)\leqslant 1} \int_{\partial S} \log^+|p(u)|\ \frac{|u - s_0|^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}}{1 + |u|^{(2\pi)/(2\pi-\alpha)}}\ |du| = +\infty .$$

COROLLAIRE 2. - _Avec les mêmes hypothèses, si de plus, on a posé $A_n = \pi((\sigma - s_0)^n)$ lorsque $\pi((\sigma - s_0)^n) \neq 0$, sinon A_n désigne n'importe quel nombre > 0 , et $\gamma = e^{-i(\beta+\alpha)}$, il suffit que l'on ait_

$$\sup_{p\in \underset{\sim}{N}} \int_{\partial S} \log^+\Big| \sum_{n=0}^{p} \frac{\gamma^n(u - s_0)^n}{A_n}\Big|\ \frac{|u - s_0|^{(\alpha-\pi)/(2\pi-\alpha)}}{1 + |u|^{(2\pi)/(2\pi-\alpha)}}\ |du| = +\infty .$$

COROLLAIRE 3. - _Avec les notations précédentes, si encore on a posé_

$$a_n = A_n^{(2\pi)/((2\pi-\alpha)n)}$$

_et si b_n désigne la plus grande minorante croissante de a_n , il suffit que la série $1/b_n$ diverge._

9. Une condition nécessaire.

On sait que la condition de H. Pollard [12] dont la partie suffisante est généralisée par la proposition 10 est également nécessaire. Dans ce paragraphe, nous développons dans un cas particulier une réciproque à cette proposition.

PROPOSITION 11. - _On suppose que S est le demi-plan $\mathrm{Im}(s) \leqslant 0$. Pour qu'une semi-norme finie π sur $P(S)$, entraînant la convergence compacte sur R , soit_

<u>fondamentale, il est nécessaire que l'on ait</u>

$$\sup_{p \in \underset{\sim}{C}[\sigma],\ \pi(p) \leqslant 1} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du = +\infty .$$

<u>De plus, dans le cas contraire,</u> $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ <u>est fermé dans</u> $R(S)$ <u>pour</u> π .

Supposons, en effet, par l'absurde que $\int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du$ soit un nombre fini A . On a alors pour tout polynôme p et tout $s = x + iy$ tel que $y > 0$, par sous-harmonicité de la fonction $s \longmapsto \log^+|p(s)|$, l'inégalité

$$\log^+|p(s)| \leqslant \int \frac{y \log^+|p(u)|}{y^2 + (u-x)^2}\, du .$$

Considérons maintenant l'ensemble compact K du demi-plan $\mathrm{Im}(s) \geqslant 0$ défini par les équations : $-B \leqslant x \leqslant B$, $0 \leqslant y \leqslant C$, où B et C sont deux nombres positifs. Pour tout s de K et tout p tel que $\pi(p) \leqslant 1$, écrivons :

$$\int \frac{y \log^+|p(u)|}{y^2 + (u-x)^2}\, du = \int_{-2B}^{+2B} \frac{y \log^+|p(u)|}{y^2 + (u-x)^2} + \int_{|u| \geqslant 2B} \frac{y \log^+|p(u)|}{y^2 + (u-x)^2}\, du .$$

La seconde intégrale du second membre est majorée par

$$A.C. \sup_{\substack{|u| \geqslant 2B \\ |x| \leqslant B}} \frac{1+u^2}{(u-x)^2}$$

expression elle-même majorée par $A.C.(\frac{1}{B} + 9)$ comme le montre un calcul facile. D'autre part, π entraînant la convergence compacte sur $\underset{\sim}{R}$, il existe une constante D telle que la première intégrale soit majorée par

$$D \int_{-2B}^{2B} \frac{y}{y^2 + (u-x)^2}\, du ,$$

ou encore par

$$D \int \frac{y\varphi(u)}{y^2 + (u-x)^2}\, du ,$$

si φ est une fonction continue positive sur $\underset{\sim}{R}$ à support compact majorant 1 sur l'intervalle $[-2B , 2B]$. Si alors ψ désigne la fonction continue dans le demi-plan $\mathrm{Im}(s) \geqslant 0$, harmonique à l'intérieur qui prolonge φ , la première intégrale se trouve majorée par $D\psi(x , y)$ qui est borné sur K .

On en déduit que, pour $\pi(p) \leqslant 1$, $\log^+|p(s)|$, donc $|p(s)|$, est borné uniformément sur tout compact du demi-plan $\mathrm{Im}(s) \geqslant 0$. Par conséquent π entraîne la convergence compacte dans le demi-plan $Im(s) \geqslant 0$ et on ne peut approcher pour π que des fonctions continues sur R qui sont prolongeables en des fonctions continues dans le demi-plan $Im(s) \geqslant 0$ et holomorphes dans le demi-plan $Im(s) > 0$. En particulier, on ne peut pas approcher les fractions rationnelles de $R(S)$ ayant au moins un pôle, ce qui prouve que $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ est fermé pour π dans $R(S)$ et que π n'est pas fondamentale.

On déduit immédiatement de la proposition 11, le résultat suivant :

COROLLAIRE 4. - Pour qu'une semi-norme π sur $\underset{\sim}{R}$ entraînant la convergence compacte soit fondamentale, il est nécessaire que l'on ait

$$\sup_{p \in \underset{\sim}{C}[\xi],\ \pi(p) \leq 1} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du = + \infty .$$

De plus, dans le cas contraire, $\underset{\sim}{C}[\xi]$ est fermé dans $R(\underset{\sim}{R})$ pour π .

Nous allons maintenant apporter une précision à la proposition 11 qui sera utile par la suite.

PROPOSITION 11 bis. - On suppose que S est $\underset{\sim}{R}$ ou le demi-plan $Im(s) \leqslant 0$. Soit π une semi-norme sur $P(S)$ entraînant la convergence compacte sur $\underset{\sim}{R}$ et soit A une partie de la boule unité B de π restreinte à $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ telle que l'enveloppe disquée fermée de A contienne B . Dans ces conditions, pour que π soit fondamentale, il est nécessaire que l'on ait :

$$\sup_{p \in A} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du = + \infty .$$

En effet, en reprenant l'argument de la proposition 11, on voit que si $\sup_{p \in A} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+ |p(u)|}{1 + u^2}\, du < + \infty$, l'ensemble A est borné uniformément sur tout compact du demi-plan $Im(s) \geqslant 0$. Or, tout polynôme p de B peut s'écrire $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n p_n$ où p_n est dans A , et où λ_n est une suite de $\underset{\sim}{C}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leqslant 1$. Il en résulte immédiatement que B est également uniformément borné sur tout compact du demi-plan $Im(s) \geqslant 0$, et la démonstration s'achève comme pour la proposition 11.

10. Semi-normes sur $\underset{\sim}{C}[X]$ entraînant la convergence compacte.

Les conditions des propositions 10 et 11 ne font apparaître que les valeurs de la semi-norme π sur les polynômes. Il est donc naturel de se poser un problème d'approximation pour des semi-normes définies seulement sur $\underset{\sim}{C}[X]$. Soit S un ensemble fermé infini de $\mathbb{C}$, et π une semi-norme finie sur $\mathbb{C}[X]$ entraînant la convergence compacte sur S . Dans ces conditions, le complété $\widehat{\mathbb{C}[X]}^{\pi}$ de $\mathbb{C}[X]$ pour π s'envoie canoniquement par une application continue dans l'espace $\mathcal{C}_K(S,\mathbb{C})$ des fonctions numériques complexes continues sur S , muni de la convergence compacte. Nous dirons encore que π est fondamentale relativement à S si l'image de $\widehat{\mathbb{C}[X]}^{\pi}$ contient les fractions rationnelles de $R(S)$. Il est immédiat que si π est une semi-norme sur $P(S)$ entraînant la convergence compacte sur S , il revient au même de dire que π est fondamentale ou que la restriction de π à $\mathbb{C}[X]$ est fondamentale relativement à S . En fait, nous nous limiterons au cas où $S = \mathbb{R}$. Il est facile de voir que le corollaire 4 et la proposition 11 bis du paragraphe précédent restent valables dans ce nouveau cadre.

COROLLAIRE 4 bis. - <u>Pour qu'une semi-norme finie</u> π <u>sur</u> $\mathbb{C}[X]$ <u>entraînant la convergence compacte sur</u> $\mathbb{R}$ <u>soit fondamentale relativement à</u> $\mathbb{R}$, <u>il est nécessaire que l'on ait</u>

$$\sup_{\pi(p)\leqslant 1} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du = +\infty \ .$$

<u>En outre, si</u> A <u>est une partie de la boule unité</u> B <u>de</u> π <u>telle que l'enveloppe disquée fermée de</u> A <u>contienne</u> B , <u>il est aussi nécessaire que l'on ait</u>

$$\sup_{p\in A} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du = +\infty \ .$$

<u>Enfin, dans le cas contraire, l'image de</u> $\widehat{\mathbb{C}[X]}^{\pi}$ <u>ne contient d'autre fraction rationnelle que les polynômes</u>.

En effet, on peut remarquer que la même démonstration peut être utilisée ou bien utiliser les résultats précédents sachant que, si π est fondamentale relativement à $\mathbb{R}$, elle se prolonge à $R(\mathbb{R})$.

On peut maintenant chercher à s'abstraire de l'hypothèse que π entraîne la convergence compacte sur S . On pourrait considérer des hypothèses moins fortes permettant de plonger encore le complété de $\mathbb{C}[X]$ dans un espace de fonctions, mais en l'absence d'un tel plongement, la seule notion permettant de rattraper les fractions rationnelles est celle de spectre et on est donc conduit à considérer sur $\mathbb{C}[X]$ des structures compatibles avec la multiplication, en particulier, des bornologies d'algèbre.

Soit $\mathcal{B}$ une bornologie d'algèbre de type convexe sur $\mathbb{C}[X]$. Nous dirons que $\mathcal{B}$ est fondamentale relativement à S , si S contient le spectre de X dans le complété $\widehat{\underset{\sim}{C}[X]}^{\mathcal{B}}$ de $\underset{\sim}{C}[X]$ muni de $\mathcal{B}$. Lorsque S est infini et que $\mathcal{B}$ est plus fine que la bornologie de la convergence compacte sur S , il revient au même de dire que l'image de $\widehat{\underset{\sim}{C}[X]}^{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{C}_K(S , \underset{\sim}{C})$ contient les fractions rationnelles en σ à pôles hors de S .

Le lien avec les semi-normes fondamentales est réalisé par l'énoncé suivant :

PROPOSITION 12. - Soient π une semi-norme finie croissante sur $P(\underset{\sim}{R})$ entraînant la convergence compacte sur $\underset{\sim}{R}$ et $\mathcal{B}$ la bornologie d'algèbre de type convexe sur $\underset{\sim}{C}[X]$ engendrée par la restriction à $\underset{\sim}{C}[X]$ de π . Pour que π soit fondamentale, il faut et il suffit que la bornologie $\mathcal{B}$ le soit.

Il est immédiat que si π est fondamentale, $\mathcal{B}$ l'est aussi. Supposons maintenant π non fondamentale. D'après la proposition 10, si $\mathcal{B}$ désigne la boule unité de la restriction de π à $\underset{\sim}{C}[X]$, on doit avoir :

$$\sup_{p\in\mathcal{B}} \int \frac{\log^+|p(u)|}{1 + u^2}\, du < +\infty .$$

Par suite, du fait que $\log^+|ab| \leqslant \log^+|a| + \log^+|b|$, on a clairement pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\sup_{p\in B^n} \int \frac{\log^+|p(u)|}{1 + u^2}\, du < +\infty .$$

Il en résulte alors, par le corollaire 4 bis, que si l'on désigne par ρ_n la jauge de l'enveloppe convexe de B^n , l'image de $\widehat{\underset{\sim}{C}[X]}^{\rho_n}$ dans $\mathcal{C}_K(S , \underset{\sim}{C})$ ne contient d'autre fraction rationnelle que les polynômes. Par suite, il en est de même pour l'image de $\widehat{\underset{\sim}{C}[X]}^{\mathcal{B}}$ qui est réunion des images des $\widehat{\underset{\sim}{C}[X]}^{\rho_n}$, ce qui montre que $\mathcal{B}$ ne peut être fondamentale.

Ce dernier résultat montre finalement que le problème de Bernstein est équivalent à un problème formulé uniquement en termes de bornologies d'algèbre sur les polynômes.

11. Le facteur $1 + \xi^2$.

Nous allons voir dans ce paragraphe comment les résultats du paragraphe 3 permettent de compléter les théorèmes d'approximation.

PROPOSITION 13. - Soient S un ensemble d'approximation et π une semi-norme finie croissante sur $R(S)$. L'ensemble des points s de $\mathcal{C}S$ tels que $(\sigma - s)^{-1}$ adhère à $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{C}S$.

Il est facile de voir que cet ensemble est fermé dans $\complement S$, parce que le fait que π est croissante entraîne la continuité de la fonction $s \to (\sigma - s)^{-1}$ sur $\complement S$, mais on ne peut voir de la même façon que cet ensemble est ouvert. Supposons donc par l'absurde qu'il existe dans la même composante connexe Ω de $\complement S$ un point t tel que $(\sigma - t)^{-1}$ adhère à $\underset{\sim}{C}[\sigma]$ et un point s tel que $(\sigma - s)^{-1}$ n'adhère pas à $\underset{\sim}{C}[\sigma]$. Dans ces conditions, d'après la proposition 4 du paragraphe 3, il existe un ensemble de polynômes borné en σ et non en t . Autrement dit, l'ensemble des $p(t)$ lorsque p parcourt la boule unité est non borné. On peut donc trouver une suite (p_n) de polynômes telle que l'on ait $\pi(p_n) \leqslant 1$ et $|p_n(t)| \geq e^n$. Si on pose alors $q_n = 2^{-n} p_n$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} (\pi(p_n(\sigma)))^{1/3} < \infty$, de sorte que, puisque la restriction de π à $P(\complement\Omega)$ n'est pas fondamentale, il existe une fonction harmonique positive φ dans Ω telle que, pour tout n , e^{φ} majore $|q_n|$ dans Ω . Par suite, on a en particulier $e^{\varphi(t)} \geq 2^{-n}|p_n(t)|$, donc $e^{\varphi(t)} \geq e^{n(1-\log 2)}$, ce qui est absurde.

Si maintenant, on considère un ensemble d'approximation S et un ensemble S' fermé, distinct de $\underset{\sim}{C}$, contenant S et tel que $\complement S'$ rencontre toutes les composantes connexes de $\complement S$, il résulte de la proposition 13 que pour qu'une semi-norme finie croissante π sur $P(S)$ soit fondamentale, il faut et il suffit que sa restriction à $P(S')$ le soit.

D'autre part, dans le cas particulier où $S = \underset{\sim}{R}$, on déduit de la proposition 13 que pour toute semi-norme finie croissante sur $\underset{\sim}{R}$, ou bien l'ensemble des points s de $\complement\underset{\sim}{R}$ tels que $(\xi - s)^{-1}$ adhère à $\underset{\sim}{C}[\xi]$ est $\complement\underset{\sim}{R}$ et π est alors fondamentale, ou bien cet ensemble est vide. En effet, il ne peut être égal à un demi-plan puisque l'algèbre $R(\underset{\sim}{R})$ est involutive et que toute semi-norme croissante sur $R(\underset{\sim}{R})$ est compatible avec cette involution.

Nous allons maintenant nous limiter à l'étude du cas $S = \underset{\sim}{R}$. Nous avons vu que si π était une semi-norme finie sur $R(\underset{\sim}{R})$ croissante et entraînant la convergence compacte, une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit fondamentale était que l'on ait

$$\sup_{\pi\in\underset{\sim}{C}[\xi],\ \pi(p)\leqslant 1} \int \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\,du = +\infty .$$

D'autre part, il découle immédiatement des résultats de H. POLLARD [12] que cette condition reste valable lorsque la semi-norme π est définie par : $\pi(f) = \|fw\|_p$ où $1 < p < \infty$ et où w est un poids au sens de $\mathcal{L}^p$ (i. e. w est dans $\mathcal{L}^p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ ainsi que $\xi^n w$ pour tout n) ne s'annulant pas.

PROPOSITION 14. - Soit π une semi-norme finie croissante sur $R(\underset{\sim}{R})$ entraînant la convergence compacte ou définie par $\pi(f) = \|fw\|_p$ où $1 < p < \infty$ et où w est un poids au sens de $\mathcal{L}^p$ ne s'annulant pas, et soit q un polynôme de $\underset{\sim}{C}[\xi]$ ne s'annulant pas. Dans ces conditions, la semi-norme ρ définie par $\rho(f) = \pi(qf)$ est fondamentale en même temps que π .

Il est d'abord clair que si ρ est fondamentale, π l'est aussi. Pour voir que ρ est fondamentale lorsque π l'est, il suffit d'étudier le cas où $q = \xi - s$, s étant non réel (et on peut même choisir $s = i$), le cas général s'en déduisant par itération. La démonstration s'achève grâce au lemme suivant :

LEMME 6. - Soient π une semi-norme finie croissante sur $R(\underset{\sim}{R})$ et s non réel. Pour que la semi-norme ρ définie par $\rho(f) = \pi((\xi - s)f)$ soit fondamentale, il faut et il suffit que l'on ait

$$\sup_{p \in \underset{\sim}{C}[\xi],\ \pi(p) \leqslant 1} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du = +\infty .$$

Prouvons d'abord la condition suffisante. Il est clair que ρ est croissante ; par suite, d'après les propositions 6 et 13, si ρ n'est pas fondamentale, pour tout t non réel, $(\xi - t)^{-1}$ n'adhère pas à $\underset{\sim}{C}[\xi]$ et en particulier $(\xi - s)^{-1}$. Il en résulte alors de la proposition 3 que si B est la boule unité de ρ , l'ensemble des polynômes en ξ appartenant à $(\xi - s)B$ est borné en s . Or, écrire que p est dans $(\xi - s)B$ revient à écrire $\rho(\frac{p}{\xi - s}) \leqslant 1$, soit $\pi(p) \leqslant 1$. Désignons par E l'ensemble des polynômes p en ξ tels que $\pi(p) \leqslant 1$, et pour tout p de E , écrivons la décomposition $p = p(s) + (\xi - s)q$. Nous avons vu que lorsque p parcourt E , $p(s)$ reste borné. Il en est de même pour $\rho(q)$ qui est majoré par $\pi(p) + \pi(p(s))$. Au contraire, $\int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|q(u)|}{1+u^2}du$ ne reste pas borné, sinon il en serait de même pour $\int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|(u - s)q(u)|}{1+u^2}du$, d'après l'inégalité $\log^+|ab| \leqslant \log^+|a| + \log^+|b|$, puis pour $\int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}du$, d'après l'inégalité $\log^+|a| \leqslant \log^+|b| + \log(1 + |a - b|)$. La contradiction est alors apportée par la proposition 10.

Enfin, la preuve de la condition nécessaire est immédiate, car si $\int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}du$ est borné sur l'ensemble des polynômes p de $\underset{\sim}{C}[\xi]$ tels que $\pi(p) \leqslant 1$, il en est de même de $p(i)$, puisque par sousharmonicité

$$\log^+|p(i)| \leqslant \int_R \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du .$$

Ainsi $p(i)$ est borné sur l'ensemble des polynômes p de $\mathbb{C}[\xi]$ appartenant à $(\xi - s)B$, mais aussi sur l'ensemble des p appartenant à $(\xi - i)B$, puisque $(\xi - i)/(\xi - s)$ reste borné sur $\mathbb{R}$. Par suite, d'après la proposition 3, ρ ne peut être fondamentale.

En explicitant la proposition 14 dans le cas d'une semi-norme associée à un poids, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5. - <u>Soit</u> w <u>un poids au sens ordinaire (resp. au sens de</u> $\mathcal{L}^p$) $(1 < p < \infty)$ <u>ne s'annulant pas. Pour tout polynôme</u> q <u>de</u> $\mathbb{C}[\xi]$ <u>ne s'annulant pas, les poids</u> w <u>et</u> qw <u>sont fondamentaux en même temps</u>.

Si w est un poids fondamental au sens ordinaire, on en déduit que, pour tout p, $1 \leq p < \infty$, w est un poids fondamental au sens de $\mathcal{L}^p$, puisque $(1 + \xi^2)w$ est fondamental et que l'on a :

$$\|fw\|_p \leq \|f(1 + \xi^2)w\|_\infty \, \|(1 + \xi^2)^{-1}\|_p \, .$$

12. Application aux classes quasi-analytiques.

On sait que certains résultats de la théorie des poids fondamentaux peuvent se déduire des théories classiques sur les classes quasi-analytiques. Nous allons voir comment inversement les résultats précédents peuvent conduire à de nouveaux théorèmes de quasi-analyticité. Nous dirons qu'une fonction numérique complexe f indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie la propriété (Q) si $f = 0$ ou s'il n'existe aucun point de $\mathbb{R}$ où f s'annule avec toutes ses dérivées. Nous dirons de même qu'un sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vérifie la propriété (Q) si chacune de ses fonctions la vérifie. Dans les mémoires classiques, on étudie les sous-ensembles de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définis par des inégalités du type $\|f^{(n)}\| \leq A_n$, $n \in \mathbb{N}$. On peut plus généralement se donner une semi-norme finie π sur $\mathbb{C}[X]$ et étudier le sous-ensemble de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par les inégalités $\|D_p(f)\| \leq \pi(p)$, $p \in \mathbb{C}[X]$ où D_p désigne l'opérateur différentiel $p(\frac{1}{2\pi i}, \frac{d}{dx})$. Le cas classique correspond évidemment à la semi-norme $\sum a_n X^n \to \frac{1}{(2\pi)^n} |a_n| A_n$.

PROPOSITION 15. - <u>Soit</u> π <u>une semi-norme finie croissante sur</u> $\mathbb{C}[\xi]$. <u>Si la semi-norme</u> ρ <u>définie par</u> $\rho(f) = \pi((\xi - i)f)$ <u>est fondamentale, l'ensemble des fonctions</u> f <u>de</u> $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ <u>vérifiant</u> $\|D_p(f)\|_2 \leq \pi(p(\xi))$ <u>pour tout polynôme</u> p, <u>vérifie la condition</u> (Q)

En effet, l'ensemble étudié étant invariant par translation, on peut supposer par l'absurde qu'il contient une fonction $f \neq 0$ telle que l'on ait $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout entier n. Du fait que, π étant finie, f appartient à $\mathcal{D}\mathcal{L}^2$, le produit de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f avec toute fonction de $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ sera dans $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$. Considérons alors sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ la forme linéaire φ définie par $\varphi(g) = \int_{\underset{\sim}{R}} g(u)\, \hat{f}(u)\, du$. On a par l'inégalité de Schwarz :

$$\|g\hat{f}\|_1 \leqslant \|g(\xi - i)\hat{f}\|_2 \, \|(\xi - i)^{-1}\|_2 .$$

D'où

$$\|g\hat{f}\|_1 \leqslant \|(\xi - i)^{-1}\|_2 \inf_{p \in \underset{\sim}{C}[X],\ |p(\xi)| \geqslant |g|} \|p(\xi)(\xi - i)\hat{f}\|_2 .$$

Or, pour tout polynôme p, on a par PLANCHEREL $\|p(\xi)(\xi - i)\hat{f}\|_2 = \|D_{p(X-i)}(f)\|_2$, d'où encore

$$\|g\hat{f}\|_1 \leqslant \|(\xi - i)^{-1}\|_2 \inf_{p \in \underset{\sim}{C}[\xi],\ |p| \geqslant |g|} \rho(p) .$$

Soit $\|g\hat{f}\|_1 \leqslant \|(\xi - i)^{-1}\|_2 \, \rho^*(g)$ où ρ^* est le prolongement de ρ à $\theta_0(\underset{\sim}{C}[\xi])$ défini au paragraphe 4. Or par définition, l'hypothèse que ρ est fondamentale signifie que ρ^* l'est, et d'après la proposition 5, $\underset{\sim}{C}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ pour ρ^*. Comme φ s'annule sur $\underset{\sim}{C}[\xi]$, puisque $f^{(n)}(0) = 0$ entraîne $\int_{\underset{\sim}{R}} u^n \, \hat{f}(u)\, du = 0$, et que φ est continue pour ρ^*, puisque

$$|\varphi(g)| \leqslant \|(\xi - i)^{-1}\|_2 \, \rho^*(g) ,$$

φ s'annule aussi sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$, ce qui montre que $\hat{f} = 0$, puisque $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C}) \cap \mathcal{L}^2(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$, et finalement que $f = 0$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE 6. - <u>Soit</u> π <u>une semi-norme finie sur</u> $\underset{\sim}{C}[X]$. <u>Pour que l'ensemble des fonctions</u> f <u>de</u> $\mathcal{C}^\infty(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$, <u>telles que l'on ait</u> $\|D_p(f)\|_2 \leqslant \pi(p)$ <u>pour tout polynôme</u> p, <u>vérifie la propriété (Q), il suffit que</u> π <u>vérifie la condition suivante</u> :

$$\sup_{p \in \underset{\sim}{C}[X],\ \pi(p) \leqslant 1} \int \frac{\log^+|p(u)|}{1 + u^2}\, du = + \infty .$$

Identifions $\underset{\sim}{C}[X]$ et $\underset{\sim}{C}[\xi]$ pour simplifier l'écriture. Si la condition ci-dessus est vérifiée pour π, elle l'est aussi pour la semi-norme croissante π^* associée à π, puisque sur $\underset{\sim}{C}[\xi]$ on a $\pi^* \leqslant \pi$. D'après le lemme 6, cette condition exprime que la semi-norme ρ définie par $\rho(f) = \pi^*((\xi - i)f)$ est fondamentale. On pourra appliquer la proposition 20 si l'on prouve que toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ vérifiant $\|D_p(f)\|_2 \leqslant \pi(p)$ vérifie aussi $\|D_p(f)\|_2 \leqslant \pi^*(p)$.

Or, cela résulte de ce que la semi-norme $p \to \|D_p(f)\|_2$ est elle-même croissante puisque, par PLANCHEREL, $\|D_p(f)\|_2 = \|p\hat{f}\|_2$.

COROLLAIRE 7. - <u>Pour qu'une fonction</u> f <u>de</u> $\mathcal{C}^\infty(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ <u>vérifie la propriété (Q), il suffit que</u> f <u>appartienne à</u> $\mathcal{D}\mathcal{L}^2(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ <u>et que l'on ait</u>

$$\sup_{p \in \underset{\sim}{C}[X],\ \|D_p(f)\|_2 \leq 1} \int \frac{\log^+|p(u)|}{1+u^2}\, du = +\infty .$$

Ce corollaire se déduit immédiatement du précédent, puisque si f est dans $\mathcal{D}\mathcal{L}^2$, la semi-norme $p \to \|D_p(f)\|_2$ est finie.

On obtient enfin une conséquence qui résume les liens entre quasi-analyticité et poids fondamentaux :

THÉORÈME 3. - <u>La transformée de Fourier d'un poids fondamental au sens de</u> $\mathcal{L}^2$ <u>vérifie la propriété (Q)</u>.

En effet, soient w un poids fondamental au sens de $\mathcal{L}^2$ et $\hat{w}$ sa transformée de Fourier. On sait, d'après le corollaire 5, que $(\xi - i)w$ est aussi un poids fondamental au sens de $\mathcal{L}^2$ et donc que la semi-norme $f \to \|f(\xi - i)w\|_2$ est fondamentale. D'autre part, on a, par PLANCHEREL, $\|D_p(\hat{w})\|_2 = \|p(\xi)w\|_2$, ce qui permet d'appliquer la proposition 15 à la semi-norme associée à w .

PROPOSITION 16. - <u>Soit</u> π <u>une semi-norme finie croissante sur</u> $\underset{\sim}{C}[\xi]$. <u>Si l'ensemble des fonctions</u> f <u>de</u> $\mathcal{C}^\infty[\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C}]$, <u>vérifiant</u> $\|D_p(f)\|_\infty \leq \pi(p(\xi))$ <u>pour tout polynôme</u> p , <u>vérifie la propriété (Q), alors</u> π <u>est fondamentale</u>.

En effet, si π n'est pas fondamentale, il existe une forme linéaire $\varphi \neq 0$ sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{C})$ continue pour π^* et nulle sur $\underset{\sim}{C}[\xi]$. On sait que φ est une intégrale relative à une mesure bornée μ . Soit $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ . On a clairement $\hat{\mu}^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n et :

$$\|D_p(\hat{\mu})\|_\infty = \|\widehat{p(\xi)\mu}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\pi\, \pi(p(\xi)) .$$

Par suite $(\hat{\mu})/(\|\varphi\|_\pi)$ appartient à l'ensemble étudié et ne vérifie pas la propriété (Q).

13. Ensembles spectraux fondamentaux.

Nous voulons aborder maintenant le problème initial qui était de donner des conditions, pour que, étant donnée une algèbre complète à unité $\mathfrak{A}$, une sous-algèbre $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ et un élément a de $\mathfrak{B}$ que l'on supposera dans le centre de $\mathfrak{A}$, on ait l'égalité entre $Sp_{\mathfrak{A}}(a)$ et $Sp_{\mathfrak{B}}(a)$. En réalité, dans le cas des algèbres bornologiques, la notion classique de spectre est insuffisante, et on doit avoir recours à celle d'ensemble spectral au sens de L. WAELBROECK qui a été rappelée au paragraphe 2. Nous utiliserons le calcul fonctionnel en un élément non régulier (voir à ce sujet [14] ou [15]). Rappelons que pour toute partie S de $\underset{\sim}{C}$, on définit une fonction δ_S en posant $\delta_S(s) = \inf((1 + |s|^2)^{-1/2} , d(s , \complement S))$. D'autre part, pour toute fonction δ , réelle positive sur $\underset{\sim}{C}$, lipschiztienne, et telle que, si γ désigne l'application identique de $\underset{\sim}{C}$, $\gamma\delta$ soit uniformément bornée, on définit une algèbre complète $\theta(\delta , \mathfrak{A})$ ou plus simplement $\theta(\delta)$. Les ensembles bornés de $\theta(\delta)$ sont les ensembles B de fonctions holomorphes dans l'ensemble ouvert $\delta^{-1}(]0 , \to[)$, tels qu'il existe un entier n tel que $\delta^n u$ reste uniformément borné lorsque u parcourt B . On sait, d'après L. WAELBROECK, que pour qu'une partie S de $\underset{\sim}{C}$ soit spectrale pour a , il faut et il suffit qu'il existe un morphisme d'algèbres bornologiques de $\theta(\delta_S)$ dans $\mathfrak{A}$ qui applique unité sur unité et γ sur a ; un tel morphisme, s'il existe, est unique.

DÉFINITION 4. - Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre complète à éléments unité et a un élément de $\mathfrak{A}$. On dira qu'un ensemble S spectral pour a est fondamental, s'il est spectral pour toute sous-algèbre fermée unitaire de $\mathfrak{A}$ contenant a .

THÉORÈME 4. - Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre complète à éléments unité, a un élément de $\mathfrak{A}$, S un ensemble spectral pour a tel que $\overset{\circ}{\bar{S}} \subset S$. Pour que S soit fondamental, il suffit que pour toute composante connexe Ω de $\complement\bar{S}$, il existe un entier N tel que l'une des conditions suivantes soit satisfaite, ω désignant l'injection canonique de Ω dans $\underset{\sim}{C}$:

(vi) $\sup\limits_{p\in\underset{\sim}{C}[\gamma],\ \|p\delta_S^N\|\leqslant 1} (|p \circ \omega|)$ n'est majoré par aucune fonction e^{φ} où φ est surharmonique (resp. harmonique) positive dans Ω .

(v) Il existe un point a de Ω tel que :

$$\sup_{p\in\underset{\sim}{C}[\gamma],\ \|p\delta_S^N\|\leqslant 1} \int \log^+|p(u)|\, d\mu_a^{\Omega}(u) = +\infty .$$

Il est facile de voir que la condition (v) entraîne la condition (vi), parce que, comme on l'a vu au paragraphe 8, elle entraîne la condition (iii), laquelle entraîne trivialement la condition (v). Supposons donc (v) satisfaite. Pour voir que S est fondamental, il suffit de voir qu'il est spectral pour a dans la sous-algèbre fermée unitaire $\mathfrak{B}$ engendrée par a et, pour cela, de voir que $(a - s)^{-1}$ est dans $\mathfrak{B}$ pour tout s de $\complement\bar{S}$, puisque l'intérieur d'un ensemble spectral est spectral. Or, d'après le calcul fonctionnel de L. WAELBROECK, il suffit encore de prouver que pour tout s de $\complement\overline{S}$, $(\gamma - s)^{-1}$ appartient à l'adhérence de $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ dans l'algèbre $\theta(\delta_S)$, ce qui a lieu en particulier lorsque $(\gamma - s)^{-1}$ adhère à $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ pour la semi-norme π sur $\mathcal{C}(\overline{S}\ , \underset{\sim}{C})$ définie par $\pi(f) = \|f\delta^{N+2}\|$. Or, d'après HAHN-BANACH, si $(\gamma - s)^{-1}$ n'adhère pas à $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ pour π , il existe une forme linéaire φ sur le sous-espace de $\mathcal{C}(\overline{S}\ , \underset{\sim}{C})$ sur lequel π est finie, continue pour π , s'annulant sur $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ et non nulle en $(\gamma - s)^{-1}$. Il est facile de voir que la restriction de φ au sous-espace H de $\mathcal{C}(S\ , \underset{\sim}{C})$ sur lequel la semi-norme $f \longmapsto \|f\delta^{N+1}\|$ est finie est l'intégrale associée à une mesure bornée non nulle μ sur S . Pour tout s de Ω , la fonction $u \longmapsto \frac{1}{u - s}$ est majorée par δ_S^{-1} qui est μ-intégrable. Introduisons encore la fonction analytique h dans Ω définie par

$$h(s) = \int \frac{d\mu(u)}{u - s} ,$$

et écrivons l'inégalité :

$$\text{(c)} \qquad \log^+|p \circ \omega| \leqslant \log^+|(p \circ \omega)h| + \log^+|h| - \log|h| ,$$

de laquelle on déduit aussitôt l'inégalité :

$$\text{(d)} \qquad \log^+|p \circ \omega| \leqslant |(p \circ \omega)h| + |h| - \log|h| .$$

La démonstration sera achevée si on peut majorer $|(p \circ \omega)h|$ sur l'ensemble des p de $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ tels que $\|p\delta_S^N\| \leqslant 1$, une majoration du même type s'appliquent alors au terme $|h|$ et le terme $-\log|h|$ étant surharmonique. Or, pour tout s de Ω et tout p de $\underset{\sim}{C}[\gamma]$ tel que $\|p\delta_S^N\| \leqslant 1$, la fonction $u \to \frac{p(u)}{u - s}$ est majoré par δ_S^{-1-N} qui est μ-intégrable, et on a

$$p(s)\ h(s) = \int \frac{p(u)\ d\mu(u)}{u - s} ,$$

d'où

$$|p(s)\ h(s)| \leqslant \int \delta_S^{-1-N}(u)\,|d\mu|(u) ,$$

et enfin

$$|p(s)\ h(s)| \leqslant \|\varphi\|_\pi .$$

Il faut remarquer qu'il n'a pas été nécessaire de faire ici des hypothèses sur la régularité de la frontière de S , comme pour les théorèmes 1 et 2. Les hypothèses (v) ou (vi) expriment que l'ensemble spectral S n'est pas loin d'être borné : il doit être suffisamment fin vers l'infini pour que δ_S y décroisse assez vite. Donnons un exemple de cette situation :

PROPOSITION 17. - Avec les hypothèses du théorème 4, si de plus S est contenu dans une bande d'équation $-y_0 \leqslant \mathrm{Im}(s) \leqslant y_0$ et si $\complement S$ n'a que deux composantes connexes, pour que S soit fondamental il suffit qu'il existe une suite (A_p) de nombres strictement positifs telle que la suite $(A_p^{1/p})$ soit croissante, la série $(A_p^{-1/p})$ divergente et que $\|\gamma^p\ \delta_S^N\| \leqslant A_p$.

Considérons la suite $p_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{\gamma^p}{2^p\ A_p}$. On a clairement $\|p_n\ \delta_S^N\| \leqslant 1$. Il suffit donc de voir que l'on a :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\partial\Omega_j} \log^+|p_n(u)|\ d\mu_{a_j}^{\Omega_j}(u) = +\infty \qquad (j = 1\ ,\ 2)\ ,$$

où Ω_1 (resp. Ω_2) est l'ouvert $\mathrm{Im}(s) > y_0$ (resp. $\mathrm{Im}(s) < -y_0$) et $a_1 = 2iy_0$ (resp. $a_2 = -2iy_0$). Par le changement de variable $u = y_0(v + 1)$ (resp. $u = y_0(v - 1)$), on se ramène à prouver que l'on a, si $u = x + iy$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \log^+|p_n(y_0(v + \varepsilon))|\ \frac{dv}{1 + v^2} = +\infty \qquad (\varepsilon = \pm 1)\ .$$

Si on pose alors $B_n = (\frac{2}{y_0})^n\ A_n$ et $q_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{\gamma^p}{B_p}$, on obtient :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \log^+|q_n(v + \varepsilon)|\ \frac{dv}{1 + v^2} = +\infty \qquad (\varepsilon = \pm 1)\ .$$

Tout résulte alors du lemme suivant :

LEMME 7. - Soit (A_n) une suite de nombres strictement positifs telle que la suite $(A_n^{1/n})$ soit croissante et la série $(A_n^{-1/n})$ divergente. Dans ces conditions,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \int_0^\infty \log\left|\sum_{n=0}^{m} \frac{(x + i)^n}{A_n}\right| \frac{dx}{1 + x^2} = +\infty\ .$$

Posons $a_n = A_n^{1/n}$; on peut toujours supposer $a_0 \geqslant 1$. On va d'abord se ramener au cas où $a_n \geqslant 10n$; il suffit encore de voir que l'on peut supposer $a_n \geqslant n$. En effet, si $a_n < n$ pour tout n , on minore le premier membre en remplaçant A_n par n^n et la série $1/n$ est divergente. On raisonne de même si on a $a_n < n$ à partir d'un certain rang. Il reste à étudier le cas où il existe une suite (n_p) croissante d'entiers n tels que $a_n < n$ et $a_{n-1} \geqslant n - 1$. Posons $b_n = n_{p+1}$ pour n entre $n_p + 1$ et n_{p+1} . On a $a_n \leqslant b_n$ car si n est entre $n_p + 1$ et n_{p+1} , $a_n < a_{n_{p+1}} < n_{p+1} = b_n$. Nous allons voir que la suite (b_n^{-1}) diverge et pour cela, par récurrence sur q , que $\sum b_n^{-1} > \frac{q}{2}$. Supposons donc cette inégalité vraie jusqu'à l'ordre q : il existe un entier n tel que $\sum_{\ell=0}^{n} b_\ell^{-1} > \frac{q}{2}$ et on peut le choisir de la forme $n_p - 1$. Il existe alors p' tel que $n \leqslant \frac{1}{2}(n_{p'} - 1)$. Or

$$\sum_{\ell=n}^{n_{p'}-1} b_\ell^{-1} \geqslant \frac{1}{n_{p'}}(n_{p'} - 1 - n) \geqslant \frac{1}{2} .$$

Par suite, $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell^{-1} > \frac{q}{2} + \frac{1}{2} = \frac{q + 1}{2}$. On écrit alors l'inégalité

$$\int_0^\infty \log\left|\sum_{n=0}^{m} \frac{(x + i)^n}{A_n}\right| \frac{dx}{1 + x^2} \geqslant \sum_{n=1}^{m} \int_{ea_n}^{ea_{n+1}} n \log(\frac{x}{a_n}) \frac{dx}{1 + x^2} - \pi \log 4 ,$$

qui permet, par un calcul classique de conclure. Pour voir cette inégalité, remarquons que si $x < \frac{a_q}{4}$, $\left|\frac{x + i}{a_q}\right| \leqslant \frac{2}{3}$, donc $\sum_{\substack{q\leqslant p \\ a_q>4x}} \frac{|x + i|^q}{A_q} \leqslant \sum_{q=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^q = 3$.

D'autre part, si $x \geqslant \frac{a_q}{4}$, l'argument de $(x + i)^q$ est majoré par $q \frac{\varepsilon}{x}$, donc par $\frac{1}{2}$. Par suite,

$$\left|\sum_{q=0}^{m} \frac{(x + i)^q}{A_q}\right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{\substack{q\leqslant p \\ a_q\leqslant 4x}} \frac{x^q}{A_q} - 3 \geqslant \frac{1}{4} \frac{x^n}{A_n} .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKHIEZER (N. I.). - Theory of approximation. Translated by C. J. Hyman. - New York, F. Ungar publishing Company, 1956.

[2] CARLEMAN (Torsten). - Les fonctions quasi-analytiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1926 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[3] CARLESON (Lennart). - On Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 953-961.

[4] CHOQUET (Gustave). - Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 1re année, 1961/62, n° 4, 10 p.

[5] FERRIER (Jean-Pierre). - Approximation dans les algèbres bornologiques, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 5e année, 1965/66, n° 1, 14 p.

[6] FERRIER (Jean-Pierre). - Travaux récents de L. Nachbin sur l'approximation polynomiale pondérée, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, 2e année, 1962/63, n° 3, 17 p.

[7] MALLIAVIN (Paul). - L'approximation polynomiale pondérée sur un espace localement compact, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 605-612.

[8] MANDELBROJT (Szolem). - Séries adhérentes, Régularisation des suites, Applications. - Paris, Gauthier-Villars, 1952 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[9] MERGELJAN (S. N.). - Représentation des fonctions par des séries de polynômes sur des ensembles fermés [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 78, 1951, p. 405-408.

[10] NACHBIN (Leopoldo). - Elements of approximation theory, University of Rochester, 1964.

[11] NACHBIN (Leopoldo). - Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions : Real and self-adjoint complex cases, Annals of Math., t. 81, 1965, p. 289-302.

[12] POLLARD (Harry). - The Bernstein approximation problem, Proc. Amer. math. Soc., t. 6, 1955, p. 402-411.

[13] Séminaire BANACH, Ecole Normale Supérieure, 1963 (non publié).

[14] WAELBROECK (Lucien). - Etude spectrale des algèbres complètes, Acad. royale Belg., Cl. Sc. Mém. Série 2, t. 31, 1960, n° 7, 142 p.

[15] WAELBROECK (Lucien). - Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes. - Montréal, Université de Montréal, 1962 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 2).