Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Paul Penot

La notion d'application analytique

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 6, nº 1 (1966-1967), exp. nº 3, p. 1-41
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1966-1967__6_1_A3_0>

LA NOTION D'APPLICATION ANALYTIQUE

par Jean-Paul PENOT

(d'après la thèse d'Adrien DOUADY [11])

Cet exposé est le premier d'une série consacrée à la thèse d'Adrien DOUADY. Celui-ci n'est qu'une introduction à la théorie des fonctions analytiques dans les espaces vectoriels de dimension infinie. A la différence de la différentiabilité, l'analyticité dans les espaces de Banach n'est pas encore entrée très largement dans les moeurs. Ce fait tient plus à des circonstances historiques qu'à des difficultés inhérentes au cadre des espaces de Banach : l'introduction des fonctions analytiques dans ces espaces est apparue avec quelques décades de retard sur celle des fonctions dérivables dans ces espaces (A. D. MICHAL et R. S. MARTIN [23], FANTAPPIÉ [13], A. E. TAYLOR [33]). Pour un historique, consulter HILLE et PHILLIPS [17] et MICHAL [25].

Le même écart se retrouve dans l'intérêt suscité par des généralisations aux espaces vectoriels topologiques non normables de ces notions : la littérature sur la dérivabilité dans les espaces non normables est abondante (voir A. BASTIANI [1] et FRÖLICHER et BUCHER [14] pour quelques références), ce qui est loin d'être le cas pour l'analyticité (A. GROTHENDIECK [15], L. BONGART [4], SEBASTIÃO E SILVA [31]). En vue d'applications ultérieures, notre tentative est ici placée dans le cadre des espaces vectoriels semi-topologiques ; le lecteur peut, sans inconvénient, se limiter aux espaces vectoriels topologiques localement convexes.

Sommaire.

1. Définitions.

A. Espaces vectoriels semi-topologiques.

Dans ce paragraphe, tous les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur un même corps valué K .

DÉFINITION 1.1. - Nous appelons semi-norme (il faudrait dire semi-norme généralisée ou pseudo-semi-norme) sur un espace vectoriel E sur K , une application $\alpha : E \to [0, +\infty]$, notée le plus souvent $x \mapsto |x|_\alpha$, telle que :

1° $|x|_\alpha = 0$ pour $x = 0$;

2° Pour tout $(\lambda, x) \in K \times E$, si $|x|_\alpha$ est fini, $|\lambda x|_\alpha$ l'est aussi et $|\lambda x|_\alpha = |\lambda| \, |x|_\alpha$, où $|\lambda|$ est la valuation de λ ;

3° Pour tout $(x, y) \in E \times E$, si deux des trois termes $|x|_\alpha$, $|y|_\alpha$ et $|x+y|_\alpha$ sont finis, le troisième l'est aussi, et $|x+y|_\alpha \leqslant |x|_\alpha + |y|_\alpha$.

DÉFINITION 1.2. - Nous appelons espace vectoriel semi-topologique, un couple $(E, \mathfrak{A})$ où E est un espace vectoriel, $\mathfrak{A}$ une famille de semi-normes sur E stable par homothétie positive et telle que :

1° Si $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{A}$, alors $\sup(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}$;

2° Si $\alpha \in \mathfrak{A}$ et si β est une semi-norme majorée par α , alors $\beta \in \mathfrak{A}$;

3° Pour tout $x \in E$, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ telle que $\alpha(x) < +\infty$.

Les semi-normes de $\mathfrak{A}$ munissent E d'une structure uniforme, donc aussi d'une topologie. L'espace E est un groupe topologique pour cette topologie sous-jacente, mais n'est pas en général un espace vectoriel topologique pour cette topologie.

Un morphisme $u : (E, \mathfrak{A}) \to (F, \mathfrak{B})$ d'espaces vectoriels semi-topologiques est une application linéaire de E dans F telle que, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ avec $|u(x)|_\beta \leqslant |x|_\alpha$, pour tout $x \in E$; les morphismes sont donc les applications linéaires uniformément continues.

La condition 3° de la définition 1.2 écarte les topologies grossières. Nous exclurons aussi dans la suite les espaces vectoriels semi-topologiques dont la topologie n'est pas séparée, c'est-à-dire les espaces $(E, \mathfrak{A})$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lequel $|x|_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{A}$ est une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E , vérifiant la condition 3° de la définition 1.2, nous pouvons trouver une famille $\tilde{\mathfrak{A}}$ contenant $\mathfrak{A}$, satisfaisant les propriétés 1°, 2° et 3° de cette définition, et minimale pour ces propriétés ; nous dirons que $\widetilde{\mathcal{A}}$ est la famille engendrée par $\mathcal{A}$, et que $(E , \widetilde{\mathcal{A}})$ est l'espace vectoriel semi-topologique canonique associé à $(E , \mathcal{A})$. Le plus souvent, nous parlerons par abus de langage de l'espace vectoriel semi-topologique $(E , \mathcal{A})$ pour désigner cet espace $(E , \widetilde{\mathcal{A}})$.

Exemples d'espaces vectoriels semi-topologiques.

(a) La famille des semi-normes continues sur un espace vectoriel topologique localement convexe munit cet espace d'une structure d'espace vectoriel semi-topologique.

L'ensemble E_0 des éléments x d'un espace vectoriel semi-topologique $(E , \mathcal{A})$ tels que $|x|_\alpha < +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ est un espace vectoriel topologique localement convexe pour la topologie induite par celle de E . Les espaces vectoriels topologiques localement convexes sont les espaces vectoriels semi-topologiques $(E , \mathcal{A})$ tels que $E_0 = E$. L'espace E_0 associé à l'espace $\mathcal{C}(T , \underset{\sim}{R})$ muni de la structure d'espace vectoriel semi-topologique décrite ci-dessous, où T est un espace topologique métrisable, coïncide avec $\mathcal{K}(T , \underset{\sim}{R})$, espace des fonctions continues à support compact, et la topologie de E_0 est la topologie usuelle sur $\mathcal{K}(T , \underset{\sim}{R})$ si T est de plus localement compact.

(b) Tout espace vectoriel semi-topologique $(E , \mathcal{A})$ est muni canoniquement d'une quasi-topologie au sens de [1] : un filtre $\mathfrak{F}$ converge pour cette quasi-topologie vers un point x de E si, et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ tel que $|x|_\alpha$ soit fini et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F_0 \in \mathfrak{F}$ tel que, pour tout $F \subset F_0$, $|y - x|_\alpha < \varepsilon$ pour tout $y \in F$. Cette quasi-topologie est évidemment moins fine que celle qui est induite par la topologie de E .

Tout espace vectoriel pseudo-topologique au sens de G. MARINESCU [22] peut être considéré comme l'espace vectoriel muni de la quasi-topologie sous-jacente à un espace vectoriel semi-topologique $(E , \mathcal{A})$. Supposons en effet que E soit réunion pseudo-topologique des espaces vectoriels topologiques localement convexes $(E_i)_{i \in I}$. Soit $\mathcal{A}_i$ la famille des semi-normes continues sur E_i . Pour $\alpha \in \mathcal{A}_i$, $x \in E$, posons

$$|x|_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} |x|_\alpha , & \text{si } x \in E_i , \\ +\infty , & \text{si } x \notin E_i , \end{cases}$$

et notons $\mathcal{A}$ la famille engendrée par les semi-normes $\bar{\alpha}$ ainsi définies sur E , α parcourant la réunion des $\mathcal{A}_i$. On constate facilement que la quasi-topologie induite par cette famille $\mathcal{A}$ sur E coïncide avec la quasi-topologie décrite par G. MARINESCU.

(c) Soient $(E , \mathcal{E})$ et $(F , \mathcal{F})$ des espaces vectoriels semi-topologiques. Nous pouvons munir l'espace $L(E , F)$ des applications linéaires continues de E dans F d'une famille de semi-normes ; la quasi-topologie associée à cette structure d'espace vectoriel semi-topologique sur $L(E , F)$ s'avère parfois plus intéressante que la topologie associée (elle est plus fine que celle qui résulte des $\mathfrak{S}$-topologies, si $\mathfrak{S}$ est une famille de bornés de E, mais moins fine que la topologie associée à la famille de semi-normes). Pour $(\alpha , \beta) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ et pour $u \in L(E , F)$, posons

$$|u|_{\beta,\alpha} = \sup_{|x|_\alpha \leq 1} \{ |u(x)|_\beta \} .$$

Pour toute application $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ et tout $\beta \in \mathcal{F}$, posons

$$|u|_{\beta,\varphi} = \begin{cases} \sup |u|_{\beta,\varphi(\beta)} , & \text{si, pour tout } \gamma \in \mathcal{F} , \ |u|_{\gamma,\varphi(\gamma)} < +\infty , \\ +\infty , & \text{sinon} . \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}(E , F)$ la famille engendrée par l'ensemble des semi-normes $u \longmapsto |u|_{\beta,\varphi}$ pour $(\beta , \varphi) \in \mathcal{F} \times \Phi$, avec $\Phi = \mathcal{E}^{\mathcal{F}}$.

Ce qui précède s'applique notamment au cas où E et F sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes, et peut s'étendre aux espaces d'applications multilinéaires continues.

(d) Soient T un espace topologique, $(E , \mathcal{E})$ un espace semi-topologique, et soit $\mathcal{C}(T , E)$ l'ensemble des applications continues de T dans E ; c'est un espace vectoriel (car l'application $x \to \lambda x$ est continue de E dans E, pour tout λ dans K). Soit $\mathfrak{A}$ la famille des fonctions réelles positives continues définies sur T. Posons, pour $f \in \mathcal{C}(T , E)$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}$,

$$|f|_{\alpha,\varepsilon} = \sup_{t\in T} \frac{|f(t)|_\varepsilon}{\alpha(t)} \in \overline{\underset{\sim}{R}_+} .$$

Nous obtenons ainsi un espace semi-topologique $(\mathcal{C}(T , E) , \mathfrak{A} \times \mathcal{E})$ dont la topologie est plus fine que celle de la convergence compacte (et qui coïncide avec celle-ci si T est compact, et seulement si T est compact, lorsqu'on suppose $(E , \mathcal{E})$ séparé et T complètement régulier).

Cet exemple admet de nombreuses variantes : en prenant pour T un ouvert d'un espace normé réel, on peut prendre des applications m-fois dérivables de T dans E, avec des semi-normes analogues, faisant intervenir les dérivées jusqu'à l'ordre m $(m \in \underset{\sim}{N})$. On peut aussi considérer les sections d'un espace fibré vectoriel, chaque fibre étant munie d'une norme compatible avec sa topologie, comme c'est le cas avec une structure de Finsler sur un fibré vectoriel localement trivial ([29]).

B. Polynômes.

Dans une première partie, strictement algébrique, les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur un même corps K de caractéristique zéro. A partir du théorème 1.8, le corps K est supposé valué non discret.

DÉFINITION 1.3. - Une application $f : E \to F$ d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est dite polynomiale homogène de degré n, s'il existe une application n-linéaire $u : E^n \to F$ telle que

$$f(x) = u(x , \dots , x) \quad .$$

Nous écrirons aussi $f(x) = u(x)^n$, ou $f = u \circ \delta^n$, en désignant par δ^n l'application diagonale de E dans E^n. Nous dirons aussi, pour abréger, que f est un polynôme homogène de degré n.

DÉFINITION 1.4. - Une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels E, F est dite polynomiale (et de degré $\leqslant n$), s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et des applications polynomiales homogènes $f_0 , \dots , f_n$, f_k étant de degré k, telles que

$$f = f_0 + \dots + f_n \quad .$$

Nous conviendrons de dire que l'application nulle est un polynôme de degré $-\infty$.

Nous verrons que la donnée de f détermine les f_k, que nous appellerons les composantes homogènes du polynôme f.

Si h est une application quelconque de E dans F, et si a est un point arbitraire de E, posons

$$(\Delta_a h)(x) = \frac{1}{2} [h(x + a) - h(x - a)] \quad .$$

L'application $\Delta_a h$ de E dans F ainsi définie est appelée la différence première de h. On définit par récurrence les différences successives de h.

On vérifie facilement la commutativité de la formation de ces différences successives : $\Delta_b(\Delta_a f) = \Delta_a(\Delta_b f)$, pour $a , b \in E$.

THÉORÈME 1.5. - Pour tout polynôme $f = f_0 + \dots + f_n$ de E dans F, de degré $\leqslant n$, $n \in \underset{\sim}{N}$, on a :

(a) La différence première de f est un polynôme de degré $\leq n - 1$;

(b) La différence n-ième de f est une constante, et pour toute application u, n-linéaire symétrique telle que $f_n(x) = u(x)^n$,

$$(\Delta_{y_1} \dots \Delta_{y_n} f)(x) = n!\, u(y_1, \dots, y_n) \quad .$$

COROLLAIRE 1.6. - Les composantes homogènes $f_0, \dots, f_n$ d'un polynôme $f = f_0 + \dots + f_n$ sont déterminées de manière unique par f.

Déduisons d'abord ce corollaire du théorème 1.5, par une récurrence sur le degré n de f. Le corollaire étant évident pour $n = 0$, il suffit de le montrer pour le degré n, supposant qu'il ait été établi jusqu'au degré $n - 1$. Le théorème montre que f_n est déterminé par f ; les composantes homogènes $f_0, \dots, f_{n-1}$ sont alors déterminées par $f - f_n = f_0 + \dots + f_{n-1}$.

Une autre conséquence du théorème 1.5 est que, pour tout polynôme homogène p de degré n, il existe une application n-linéaire symétrique unique, notée $\widetilde{p}$, telle que $p = \widetilde{p} \circ \delta^n$. On peut exprimer ce résultat en disant qu'une application n-linéaire symétrique est déterminée par sa restriction à la n-diagonale.

Prouvons le théorème 1.5 par récurrence sur n. A l'ordre zéro, le théorème n'est qu'une conséquence triviale des conventions selon lesquelles un polynôme de degré zéro est une constante et que l'application nulle est un polynôme de degré $-\infty$. A l'ordre 1, nous avons, pour $f = f_0 + f_1$,

$$(\Delta_y f)(x) = \frac{1}{2}\left[f_0 + f_1(x + y) - f_0 - f_1(x - y)\right] = f_1(y) \quad ,$$

ce qui établit (a) et (b) à la fois. Supposons le théorème établi jusqu'à l'ordre $n - 1$, $n \geq 2$. Soient $f = f_0 + \dots + f_n$, $g = f_0 + \dots + f_{n-1}$, $f_n = u \circ \delta^n$, u étant une application n-linéaire symétrique. Le polynôme en x

$$(\Delta_y f_n)(x) = \frac{1}{2}\left[u(x + y)^n - u(x - y)^n\right] = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2} C_n^p (1 - (-1)^p)\, u(x)^{n-p} (y)^p$$

est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, pour tout $y \in E$ fixé. Comme $\Delta_y g$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 2$, d'après l'hypothèse de récurrence, la proposition (a) est établie.

Appliquons maintenant l'hypothèse de récurrence (b) au polynôme $\Delta_y f$ (pour $y \in E$), qui est de degré $n - 1$, comme nous venons de le voir. Si v est une application n-linéaire, symétrique de E dans F, telle que $v(x)^{n-1}$ soit égale à la composante homogène de degré $n - 1$, $nu(x, \dots, x, y)$, de $\Delta_y f$, nous avons

$$\Delta_{y_1} \cdots \Delta_{y_{n-1}}(\Delta_y f)(x) = (n-1)!\, v(y_1, \ldots, y_{n-1}) \quad ,$$

pour tous $x \in E$, $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in E^{n-1}$. En prenant

$$v(y_1, \ldots, y_{n-1}) = nu(y_1, \ldots, y_{n-1}, y) \quad ,$$

nous obtenons l'assertion (b).

La preuve du théorème suivant, strictement algébrique, est exposée dans HILLE ([17], chap. IV).

THÉORÈME 1.7. - Etant donnée une application $f : E \to F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est une application polynomiale de degré $\leqslant n$;

(b) Pour toute droite affine paramétrée $D = \{a + \lambda b \mid \lambda \in K\}$ de E, l'application f_D de K dans F définie par $f_D(\lambda) = f(a + \lambda b)$ s'écrit sous la forme $f_D(\lambda) = c_0 + \lambda c_1 + \ldots + \lambda^n c_n$, pour des éléments $c_i \in F$, $i = 0, \ldots, n$ (dépendants de D).

Rappelons que, si f est une application polynomiale homogène de degré n, nous notons $\tilde{f}$ l'application multilinéaire symétrique telle que $f(x) = \tilde{f}(x)^n$.

THÉORÈME 1.8. - Soient $(E, \mathfrak{A})$ et $(F, \mathfrak{B})$ des espaces vectoriels semi-topologiques, et $f = f_1 + \ldots + f_n$ une application polynomiale E dans F, f_k étant homogène de degré k (f est sans terme constant). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Les applications $\tilde{f}_k$ sont continues en 0 $(k = 1, \ldots, n)$;

(b) Les applications f_k sont continues en 0 $(k = 1, \ldots, n)$;

(c) L'application f est continue en 0 ;

(d) Pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, pour tout $r \in \underset{\sim}{R}_+^*$, et pour tout $M \in \underset{\sim}{R}_+^*$, il existe α dans $\mathfrak{A}$ tel que $|f(x)|_\beta \leqslant M$, pour $|x|_\alpha \leqslant r$.

Si, de plus, $(E, \mathfrak{A})$ est un espace vectoriel topologique, on peut remplacer, dans les assertions (a), (b) et (c), la continuité en 0 par la continuité en tout point de E.

La dernière proposition résulte du fait que les applications $\tilde{f}_k$ sont continues en tout point de E si, et seulement si, elles sont continues en 0, pourvu que les semi-normes de $\mathfrak{A}$ soient finies.

Les implications (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) sont évidentes ; l'implication

(c) $\Longrightarrow$ (d) provient de la stabilité de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$ par homothétie positive. Montrons (d) $\Longrightarrow$ (a). D'après le théorème 1.3 (b),

$$\tilde{f}_n(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{n!}(\Delta_{y_1} \ldots \Delta_{y_n} f)(0)$$

est une somme de 2^n termes de la forme

$$\frac{1}{n!}\frac{1}{2^n} f(\varepsilon_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_n y_n) \quad ,$$

avec $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, obtenus en développant cette différence n-ième. Si, pour tous $\beta \in \mathfrak{B}$, $r \in \underset{\sim}{R}_+^*$, $M \in \underset{\sim}{R}_+^*$, nous pouvons trouver $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $|f(x)|_\beta \leqslant M$, pour $|x|_\alpha < r$, nous avons

$$|\tilde{f}_n(y_1, \ldots, y_n)|_\beta \leqslant \frac{M}{n!} \qquad \text{pour} \quad |y_1|_\alpha < \frac{r}{n}, \ldots, |y_n|_\alpha < \frac{r}{n} \quad ,$$

ce qui montre la continuité de $\tilde{f}_n$ en zéro. Le polynôme $f - f_n$ vérifie l'assertion (d) ; le théorème s'achève par une récurrence sur n, l'implication (d) $\Longrightarrow$ (a) étant évidente pour $n = 1$.

Si $|\tilde{f}_n|_{\beta,\alpha}$ désigne la borne supérieure des nombres $|\tilde{f}_n(x_1, \ldots, x_n)|_\beta$ pour $|x_1|_\alpha \leqslant 1, \ldots, |x_n|_\alpha \leqslant 1$, et si $|f_n|_{\beta,\alpha}$ désigne la borne supérieure des nombres $|f_n(x)|_\beta$ pour $|x|_\alpha \leqslant 1$, nous avons, d'après l'homogénéité de f_n et ce qui précède,

$$|f_n|_{\beta,\alpha} \leqslant |\tilde{f}_n|_{\beta,\alpha} \leqslant \frac{n^n}{n!}|f_n|_{\beta,\alpha} \quad .$$

C. Dérivabilité dans les espaces vectoriels semi-topologiques.

DÉFINITION 1.9. - Une application $r : U \to F$ d'un ouvert U d'un espace vectoriel semi-topologique $(E, \mathfrak{A})$ dans un espace vectoriel semi-topologique $(F, \mathfrak{B})$, est dite un reste d'ordre n en un point a de U, si, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a dans U pour lequel $a + h \in V$ implique

$$|r(a + h)|_\beta \leqslant \varepsilon(|h|_\alpha)^n \quad .$$

Ainsi, pour tout β de $\mathfrak{B}$, il existe α dans $\mathfrak{A}$ tel que la fonction $r_{\alpha\beta} : U \to \overline{\underset{\sim}{R}_+}$ définie par

$$r_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{|r(x)|_\beta}{(|x - a|_\alpha)^n}, & \text{si} \quad |x - a|_\alpha \notin \{0, +\infty\} \quad , \\ 0, \quad \text{si} & |x - a|_\alpha \in \{0, +\infty\} \quad , \end{cases}$$

soit continue en a.

DÉFINITION 1.10. - Une application $f : U \to F$ d'un ouvert U d'un espace vectoriel semi-topologique $(E , \mathfrak{A})$ dans un espace vectoriel semi-topologique $(F , \mathfrak{B})$ est dite n-différentiable en un point a de U, s'il existe un polynôme p de degré $\leq n$ et un reste r d'ordre n en a tels que

$$f(a + h) = p(h) + r(a + h) \quad .$$

PROPOSITION-DÉFINITION 1.11. - Si f est n-différentiable en a, le polynôme p (donc aussi le reste r) est unique ; on l'appelle le développement limité de f à l'ordre n en a, ou le développement de Taylor de f à l'ordre n en a.

Il résulte alors du corollaire 1.6 que les composantes homogènes de p sont déterminées de façon unique. La composante de degré k de p $(1 \leq k \leq n)$ est appelée la k-ième différentielle de f en a. Pour prouver la proposition 1.11, il suffit de montrer qu'un polynôme de degré $\leq n$ qui est un reste d'ordre n en 0 est identiquement nul. Pour $n = 0$, c'est évident (F est supposé séparé, comme tous les espaces considérés). Soit $p = p_0 + \dots + p_n$, et supposons notre assertion établie jusqu'à l'ordre $n - 1$. Nous avons

$$\tilde{p}_n(x_1 , \dots , x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n} p(0) \quad ,$$

donc, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $\alpha' \in \mathfrak{A}$ tel que $|x_1|_{\alpha'} + \dots + |x_n|_{\alpha'} < 1$ entraîne

$$n! |\tilde{p}_n(x_1 , \dots , x_n)|_\beta = |(\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n} p)(0)|_\beta \leq \varepsilon(|x_1|_\alpha + \dots + |x_n|_\alpha)^n \quad .$$

Puisque $\tilde{p}_n$ est homogène de degré n, cette inégalité est vérifiée pour tout $(x_1 , \dots , x_n) \in E^n$. Ainsi $\tilde{p}_n$ est nul, et, d'après l'hypothèse de récurrence, $p - p_n$ est nul.

PROPOSITION 1.12. - Une application n-différentiable en un point a de U est m-différentiable en a pour tout m tel que $1 \leq m \leq n$, et en particulier, est continue en a.

Il suffit, en effet, d'observer que tout polynôme homogène de degré $k \geq m + 1$ est un reste d'ordre m en 0.

D. Définition d'une application analytique.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre des espaces normés (toujours sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

DÉFINITION 1.13. - Soient E , F deux espaces normés, U un ouvert de E . Une application $f : U \to F$ est dite analytique en un point a de U , si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes homogènes continus de E dans F , f_n étant de degré n , et un nombre réel $r > 0$, tels que

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\| \, r^n < \infty \quad ;$$

(ii) Pour x assez petit,

$$f(a + x) = \sum_{n\geqslant 0} f_n(x) \quad .$$

Dans cette définition, $\|f_n\|$ désigne la borne supérieure de $\|f_n(x)\|$ pour x parcourant la boule unité de E . Si $\tilde{f}_n$ est l'application n-linéaire symétrique associée à f , et si nous posons

$$\|\tilde{f}_n\| = \sup\|\tilde{f}_n(x_1 \, , \, \ldots \, , \, x_n)\| \qquad \text{pour} \quad \|x_1\| \leqslant 1 \, , \, \ldots \, , \, \|x_n\| \leqslant 1 \quad ,$$

les majorations

$$\|f_n\| \leqslant \|\tilde{f}_n\| \leqslant \frac{n^n}{n!} \|f_n\|$$

montrent que (i) équivaut à l'existence d'un nombre $\tilde{r} > 0$ tel que

$$(\tilde{\text{i}}) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \|\tilde{f}_n\| \, \tilde{r}^n < +\infty \quad .$$

La borne supérieure R des nombres r vérifiant (i) est appelée le rayon de convergence de f en a ; la borne supérieure $\tilde{R}$ des nombres $\tilde{r}$ vérifiant ($\tilde{\text{i}}$) est appelée le rayon de convergence strict de f en a . Les majorations rappelées et la formule de Stirling qui fournit une majoration de $\frac{n^n}{n!}$ montrent que R et $\tilde{R}$ vérifient

$$\frac{R}{e} \leqslant \tilde{R} \leqslant R \quad .$$

DOUADY donne des exemples montrant que ces majorations ne peuvent pas être raffinées.

Plaçons-nous maintenant dans le cadre des espaces vectoriels semi-topologiques sur K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) . Les définitions que nous introduirons devront :

(a) Coïncider avec la précédente quand on les restreint aux espaces vectoriels normables ;

(b) Préserver les propriétés usuelles des applications analytiques.

La condition (b) n'a évidemment de sens qu'en fonction de l'usage que l'on veut faire de la notion d'application analytique. Nous considérons ici comme essentielle la règle de composition ; le choix de la terminologie qui suit découle de cette option.

Dans ce qui suit, $(E, \mathfrak{a})$ et $(F, \mathfrak{B})$ sont des espaces vectoriels semi-topologiques, a un point de E, f une application de E dans F.

DÉFINITION 1.14. - L'application f est dite semi-analytique au point a, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes homogènes continus de E dans F, f_n étant de degré n, et une application $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{a}$, tels que

$$\sum_{n\geqslant 1} |f_n|_{\beta,\varphi} < \infty \quad ;$$

(ii) Il existe un voisinage V de 0 dans E tel que, pour tout x de V, la famille $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ soit sommable et de somme $f(a+x)$.

Rappelons que $|f_n|_{\beta,\varphi}$ est égal à $|f_n|_{\beta,\varphi(\beta)}$ si $|f_n|_{\gamma,\varphi(\gamma)}$ est fini pour tout $\gamma \in \mathfrak{B}$, et vaut $+\infty$ dans le cas contraire. D'après les inégalités

$$|f_n|_{\beta,\alpha} \leqslant |\tilde{f}_n|_{\beta,\alpha} \leqslant \frac{n^n}{n!} |f_n|_{\beta,\alpha} \quad ,$$

la condition (i) équivaut à la condition :

($\tilde{\text{i}}$) Il existe une suite $(\tilde{f}_n)_{n\geqslant 0}$ d'applications n-linéaires continues de E dans F, et une application $\tilde{\varphi} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{a}$, tels que $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\tilde{f}_n|_{\beta,\tilde{\varphi}} < +\infty$.

L'application φ (resp. $\tilde{\varphi}$) sera appelée l'indicatrice de convergence absolue (resp. de convergence stricte absolue) de la série $(f_n)_{n\geqslant 0}$ (resp. de la série $(\tilde{f}_n)_{n\geqslant 0}$). Nous verrons que la série $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est unique ; nous l'appellerons le développement de f en a.

DÉFINITION 1.15. - L'application f est dite uni-analytique au point a, ou fortement analytique au point a, si f est semi-analytique en a et s'il existe une indicatrice de convergence absolue du développement de f en a qui est constante.

DÉFINITION 1.16. - L'application f est dite analytique au point a, s'il existe une application $\psi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{a}$ appelée indicatrice de convergence de f en a, et une suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes continus de E dans F, p_n étant de degré au plus n, tels que :

(iii) <u>Pour tout</u> $\beta \in \mathcal{B}$ <u>et pour tout</u> $\varepsilon \in \underset{\sim}{R}_+^*$, <u>il existe un voisinage</u> $V(\beta, \varepsilon)$ <u>de zéro dans</u> E <u>tel que, pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$ <u>et pour tout</u> $x \in V(\beta, \varepsilon)$,

$$|f(a+x) - p_n(x)|_\beta \leqslant \varepsilon(|x|_{\psi(\beta)})^n \quad .$$

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $r_n(x) = f(x) - p_n(x)$ est ainsi un reste d'ordre n en 0 , et pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, les applications $(s_n^\beta)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ définies par

$$s_n^\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{|r_n(x)|_\beta}{(|x|_{\varphi(\beta)})^n} , & \text{pour } |x|_{\varphi(\beta)} \in \underset{\sim}{R}_+^* , \\ 0 , & \text{pour } |x|_{\varphi(\beta)} \in \{0 , \infty\} , \end{cases}$$

forment une famille équicontinue en zéro.

Les définitions qui précèdent ne dépendent que du germe de f en a . Par suite, elles s'étendent aux applications définies sur un voisinage U de a dans E ; nous prolongerons toujours une telle application par zéro sur $E - U$ pour nous ramener à une application partout définie. Une application analytique (resp. semi-analytique, uni-analytique) en tout point d'un ouvert U de E est dite analytique (resp. semi-analytique, resp. uni-analytique) sur U .

Si f est semi-analytique en a , et a fortiori si f est uni-analytique en a , f est analytique en a , et une indicatrice de convergence absolue du développement de f en a peut servir d'indicatrice de convergence de f en a . Inversement, supposons f analytique en a , et, pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)$. La série $(f_n)_{n\geqslant 1}$ possède une indicatrice de convergence absolue. En effet, soit ψ une indicatrice de convergence de f en a . Pour $\beta \in \mathcal{B}$, soit $\alpha' = \psi'(\beta)$ une semi-norme de $\mathfrak{A}$ telle que $B'_{\alpha'} = \{x , |x|_{\alpha'} \leqslant 1\}$ soit contenu dans le voisinage $V(\beta , \frac{1}{2})$ de la condition (iii). Alors

$$|f_n(x)|_\beta = |r_{n-1}(x) - r_n(x)|_\beta \leqslant 1 \qquad \text{pour } |x|_{\alpha'} \leqslant 1 \quad .$$

Soit $k \in \,]0 , 1[$; posons $\alpha = \varphi(\beta) = k^{-1} \sup(\psi(\beta) , \psi'(\beta))$. Alors

$$\sum_{n\geqslant 1} |f_n|_{\beta,\alpha} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} k^n < +\infty \quad ,$$

donc

$$\sum_{n\geqslant 1} |f_n|_{\beta,\varphi} < \infty \quad .$$

Les définitions 1.14, 1.15 et 1.16 coïncident dès que F est un espace normable. En effet, si f est analytique en a, et si β désigne une norme compatible avec la topologie de F, la famille $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est sommable pour $x \in B_{\psi(\beta)} \cap V(\beta\ ,\ 1)$, où $B_{\psi(\beta)} = \{x\ ,\ |x|_{\psi(\beta)} < 1\}$, et de somme $f(a + x)$, et, comme nous l'avons vu, il existe une indicatrice de convergence absolue du développement de f en a, de sorte que f est semi-analytique en a, et même uni-analytique en a. Les trois définitions 1.14, 1.15 et 1.16 coïncident avec la définition 1.13 si E et F sont des espaces normés.

L'ensemble $\mathcal{H}_a(E\ ,\ F)$ (resp. $\mathcal{H}'_a(E\ ,\ F)$, resp. $\mathcal{H}''_a(E\ ,\ F)$) des germes en a d'applications analytiques (resp. semi-analytiques, resp. uni-analytiques) en a de E dans F forme un espace vectoriel sur K. On peut le munir d'une structure d'espace vectoriel semi-topologique au moyen des semi-normes

$$|\underset{\sim}{f}|_{\beta,\varphi} = \sum_{n\geqslant 0} |f_n|_{\beta,\varphi}\ ,$$

où $(\beta\ ,\ \varphi) \in \mathcal{B} \times \mathfrak{A}^{\mathcal{B}}$, $\underset{\sim}{f} \in \mathcal{H}_a(E\ ,\ F)$, $(f_n)_{n\geqslant 0}$ étant le développement en série entière d'un représentant du germe $\underset{\sim}{f}$.

L'espace $\mathcal{H}'_a(E\ ,\ F)$, et a fortiori l'espace $\mathcal{H}_a(E\ ,\ F)$, contient l'espace des polynômes continus de E dans F. C'est aussi le cas pour $\mathcal{H}''_a(E\ ,\ F)$, si l'un des espaces E ou F est normable.

E. <u>Exemples d'applications analytiques.</u>

1° Si A est une algèbre de Banach **unitaire**, l'ensemble G_A des éléments inversibles de A est ouvert, et l'application $a \longmapsto a^{-1}$ est une application analytique de G_A dans lui-même.

De façon un peu plus générale, soit $(A\ ,\ \mathfrak{A})$ une algèbre unitaire munie d'une famille de semi-normes telle que $\mathfrak{A}$ induise une structure d'espace vectoriel semi-topologique sur l'espace vectoriel sous-jacent à A et que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(a) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe $(\beta\ ,\ \gamma) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $(x\ ,\ y) \in A \times A$, on ait $|x.y|_\alpha \leqslant |x|_\beta . |y|_\gamma$;

(b) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe $\alpha' \in \mathfrak{A}$ tel que, pour tout $n \in \underset{\sim}{N}^*$ et pour tout $x \in A$, on ait $|x^n|_\alpha \leqslant (|x|_{\alpha'})^n$;

(c) $1 + u$ est inversible pour u dans un voisinage V de 0 ;

(d) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe un voisinage $U(\alpha)$ de 0 contenu dans V tel que $|(1 + u)^{-1}\ u|_\alpha \leqslant 1$ pour tout $u \in U(\alpha)$.

Alors l'application $x \longmapsto x^{-1}$, définie au voisinage de 1 , est analytique en 1 . En effet, si pour $u \in V$, nous posons

$$(1 + u)^{-1} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n u^n + r_m(u) \qquad \text{pour } m \in \underset{\sim}{N} ,$$

(avec la convention $u^0 = 1$), nous avons

$$r_m(u) = (-1)^{m+1} (1 + u)^{-1} u^{m+1} ,$$

et la condition (iii) de la définition 1.14 est assurée par les propriétés (a), (b), (d).

Si les translations multiplicatives de A sont continues, l'ensemble G_A des éléments inversibles de A est ouvert : si $a \in G_A$, $(a + x)^{-1} = (1 + a^{-1} x)^{-1} a^{-1}$ pour $x \in aV$. Les propriétés (a), (b), (c), (d), sont vérifiées pour l'algèbre $A = \mathcal{C}(T , B)$ des applications continues d'un espace topologique T dans une algèbre de Banach unitaire B , lorsqu'on munit cet espace des semi-normes introduites dans l'exemple (d) du § 1, A, et en particulier pour une algèbre de Banach (cas où $T = \{t_0\}$).

2° Soit L une algèbre de Lie banachique $(\|[x , y]\| \leqslant \|x\|.\|y\|)$. La série de Campbell-Hausdorff ([18], [32]) converge dans un voisinage de l'origine. Elle définit une application analytique qui permet de construire un tronçon de groupe analytique (ou groupe local) ([2], [35]), d'algèbre de Lie L .

Si G est un groupe différentiable d'algèbre de Lie L ([21]), l'application exponentielle établit un isomorphisme d'un sous-tronçon du tronçon défini par L sur un voisinage de l'élément neutre dans G ; il en résulte que G est un groupe analytique.

3° Soient A une algèbre de Banach complexe, unitaire, a un élément de A , U un ouvert de $\underset{\sim}{C}$ contenant le spectre $\mathrm{Sp}\, a$ de a . Pour toute fonction f de l'algèbre $\mathcal{H}(U)$ des fonctions holomorphes sur U , on sait définir $f(a)$. L'application $f \longmapsto f(a)$ est un homomorphisme d'algèbres topologiques. Fixons $f \in \mathcal{H}(U)$, et étudions l'application $\hat{f} : a \longmapsto f(a)$. Son ensemble de définition U_A est ouvert dans A : $U_A = \{a , \mathrm{Sp}\, a \subset U\}$. En effet, si nous munissons l'ensemble $k(X)$ des compacts d'un espace métrique X de la distance de Hausdorff, le sous-ensemble $k(U)$ des compacts de $\underset{\sim}{C}$ contenus dans U est ouvert dans $k(\underset{\sim}{C})$, et l'application $a \longmapsto \mathrm{Sp}\, a$ est continue de A dans $k(\underset{\sim}{C})$. Si $a \in U_A$, et si C est un contour approprié de U ,

$$\hat{f}(a) = \int_C f(z)\ (z1 - a)^{-1}\, dz \quad .$$

Pour x assez voisin de zéro dans A, on peut calculer $\hat{f}(a + x)$ en utilisant le même contour (car $a \longmapsto \operatorname{Sp} a$ est continue) :

$$\hat{f}(a + x) = \int_C f(z)\ (z1 - (a + x))^{-1}\, dz \quad .$$

Le second membre de cette expression est une fonction analytique de x, d'après l'exemple 1° et les propriétés de l'intégrale vectorielle.

4° Soient (E , p , B) et (F , q , B) des fibrés vectoriels localement triviaux, de base un espace topologique paracompact B, et de fibres banachisables. Soit $f : E \to F$ une application fibrée $(q \circ f = p)$ telle que, pour tout $b \in B$, sa restriction f_b à la fibre E_b au-dessus de b soit une application analytique de E_b dans F_b, et telle que, pour tout entier n, la n-dérivée verticale de f définie par $(DV)^n f(e) = D^n f_b(e)$ pour $b = p(e)$ soit une application fibrée continue de E dans $L^n(E , F)$.

Sous ces hypothèses, f induit une application f_* de $\mathbb{S}(E)$, ensemble des sections continues de (E , p , B), dans $\mathbb{S}(F)$, ensemble des sections continues de (F , q , B). Si $\mathbb{S}(E)$ et $\mathbb{S}(F)$ sont munis des structures d'espaces vectoriels semi-topologiques déduites de structures de Finsler arbitraires sur (E , p , B) et (F , q , B), telles qu'elles ont été esquissées dans l'exemple (d) du § 1, A, on peut montrer que l'application f_* est analytique. Si B est compact, $\mathbb{S}(E)$ et $\mathbb{S}(F)$ sont des espaces banachisables, mais il n'en est pas ainsi dans le cas général.

Cet exemple peut être particularisé au cas de fibrés vectoriels triviaux : si E et F sont des espaces de Banach, B un espace topologique paracompact, $\varphi : E \to F$ une application analytique, l'application de composition $\varphi_* : \mathcal{C}(B , E) \to \mathcal{C}(B , F)$ est analytique, lorsque $\mathcal{C}(B , E)$ et $\mathcal{C}(B , F)$ sont munis des semi-topologies de l'exemple (d) du § 1, A.

2. Propriétés générales des applications analytiques.

Nous groupons, dans ce paragraphe, les principales propriétés des applications analytiques. Dans le cadre des espaces de Banach, notamment, elles généralisent très étroitement les propriétés classiques des fonctions holomorphes (consulter aussi [5], [17] et [36]).

PROPOSITION 2.1. - Une application $f : E \to F$, analytique en un point a de E , où E et F sont des espaces vectoriels semi-topologiques, est indéfiniment dérivable en a , et si $(f_n)_{n\geq 0}$ est le développement de f en a ,

$$D^m f(a) = m!\, \tilde{f}_m \quad .$$

Cette assertion est évidente, compte-tenu des définitions ; elle vaut a fortiori pour les applications semi-analytiques et uni-analytiques en a .

COROLLAIRE 2.2. - Une application analytique en a est continue en a .

COROLLAIRE 2.3. - Le développement $(f_n)_{n\geq 0}$ d'une application $f : E \to F$ analytique en a est déterminé de façon unique.

THÉORÈME 2.4. - Soient $(E , \mathfrak{A})$, $(F , \mathfrak{B})$, $(G , \mathfrak{C})$ des espaces vectoriels semi-topologiques, a un point de E , $f : E \to F$ une application analytique en a , $g : F \to G$ une application analytique en $b = f(a)$. L'application composée $h = g \circ f$ est analytique en a .

(a) La composée de deux applications m-dérivables est m-dérivable : Gardons les notations de l'énoncé en supposant seulement f et g m-dérivables (avec $m \in \underset{\sim}{N}^*$), et écrivons les développements de Taylor de f et g à l'ordre m :

$$f(a + x) = b + \sum_{n=1}^{m} \tilde{f}_n(x)^n + r_m(x) \quad ,$$

$$g(b + y) = c + \sum_{n=1}^{m} \tilde{g}_n(y)^n + s_m(y) \quad .$$

Portons la valeur $y = f(a + x) - b$ dans le développement de g :

$$g(f(a + x)) = c + \sum_{p=1}^{m} \tilde{g}_p\Big(\sum_{n=1}^{m} \tilde{f}_n(x)^n + r_m(x)\Big)^p + s_m(f(a + x) - b)$$

$$= c + \sum_{p=1}^{m} \sum_{\substack{1\leq n_i\leq m \\ n_1+\dots+n_p\leq m}} \tilde{g}_p(\tilde{f}_{n_1}(x)^{n_1} , \dots \tilde{f}_{n_p}(x)^{n_p}) + t_m(x) \quad .$$

L'expression $t_m(x)$ ainsi définie est un reste d'ordre m , comme on le voit facilement, ce qui utilise en particulier le fait que, pour toute semi-norme β de $\mathfrak{B}$, on sait trouver une semi-norme α de $\mathfrak{A}$ telle que, pour x assez petit dans E , on ait $|f(a + x) - b|_\beta \leqslant |x|_\alpha$. Les premiers termes de la dernière égalité constituent un polynôme continu de degré m , donc $g \circ f$ est m-dérivable en a . Nous noterons h_m le polynôme homogène de degré m dans le développement de h .

(b) <u>La série</u> $(h_n)_{n\geqslant 1}$ <u>possède une indicatrice de convergence absolue stricte</u> : Soit $\widetilde{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ une indicatrice de convergence absolue stricte de $(\widetilde{f}_n)_{n\geqslant 1}$, $\widetilde{\psi} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ une indicatrice de convergence de $(\widetilde{g}_n)_{n\geqslant 1}$. On peut supposer que $\sum_{n\geqslant 1} |\widetilde{f}_n|_{\beta,\widetilde{\varphi}} < 1$ pour tout $\beta \in \mathcal{B}$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$ et $n \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}^*$, on a

$$|\widetilde{h}_n|_{\gamma,\alpha} \leqslant \sum_{1\leqslant p\leqslant n} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_p=n \\ n_1\geqslant 1,\dots,n_p\geqslant 1}} |\widetilde{g}_p|_{\gamma,\beta}\, |\widetilde{f}_{n_1}|_{\beta,\alpha} \cdots |\widetilde{f}_{n_p}|_{\beta,\alpha} ,$$

où $\beta = \widetilde{\psi}(\gamma)$, $\alpha = \widetilde{\varphi}(\beta)$. Ainsi $|\widetilde{h}_n|_{\gamma,\widetilde{\varpi}\circ\widetilde{\psi}}$ est majoré par le coefficient du terme général de la série entière

$$\sum_{p\geqslant 1} |\widetilde{g}_p|_{\gamma,\widetilde{\psi}} \Big(\sum_{q\geqslant 1} |\widetilde{f}_q|_{\beta,\widetilde{\varphi}} X^q\Big)^p ,$$

qui converge pour $X = 1$. Ainsi,

$$\sum_{n\geqslant 1} |\widetilde{h}_n|_{\gamma,\widetilde{\varphi}\circ\widetilde{\psi}} \leqslant \sum_{p\geqslant 1} |\widetilde{g}_p|_{\gamma,\widetilde{\psi}} \Big(\sum_{q\geqslant 1} |\widetilde{f}_q|_{\beta,\widetilde{\varpi}}\Big)^p \leqslant \sum_{p\geqslant 1} |\widetilde{g}_p|_{\gamma,\widetilde{\psi}} < +\infty .$$

(c) h <u>est analytique en</u> a : Pour cela, il faut vérifier la condition (iii) avec les polynômes $c + \sum_{k=1}^{m} h_k$ et l'application $\widetilde{\chi} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$. Décomposons le reste $t_m(x) = h(a + x) - (c + \sum_{k=1}^{m} h_k(x))$ en

$$t_m(x) = s_m(f(a + x) - b) + u_m(x) .$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et $\gamma \in \mathcal{C}$. Montrons qu'il existe un voisinage $U(\gamma , \varepsilon)$ de 0 dans E tel que, pour tout $m \in \underset{\sim}{\mathbb{N}}$,

$$|s_m(f(a + x) - b)|_\gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (|x|_\alpha)^m \qquad \text{pour } x \in U(\gamma , \varepsilon) .$$

Puisque $|\widetilde{f}_1|_{\beta,\widetilde{\varpi}} < 1$, pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, nous pouvons trouver un voisinage $U(\beta)$ de 0 dans E tel que, pour $x \in U(\beta)$,

$$|f(a + x) - b|_\beta = |f_1(x) + r_1(x)|_\beta \leqslant |x|_{\widetilde{\varpi}(\beta)} .$$

Soit $V(\gamma , \varepsilon)$ un voisinage de 0 dans F tel que $|s_m(y)|_\gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (|y|_{\tilde{\psi}(\gamma)})^m$ pour $y \in V(\gamma , \varepsilon)$, $m \in \underset{\sim}{N}$. Nous pouvons prendre pour $U(\gamma , \varepsilon)$ l'ensemble des x de $U(\tilde{\psi}(\gamma))$ tels que $f(a + x) - b \in V(\gamma , \varepsilon)$.

Avant de majorer de façon analogue $u_m(x)$, remarquons que, pour tout $\beta \in \mathcal{B}$, il existe un voisinage $U'(\beta)$ de 0 dans E tel que

$$|r_m(x)|_\beta = |\sum_{k=m+1}^{n} \tilde{f}_k(x)^k + r_n(x)|_\beta \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |\tilde{f}_k|_{\beta,\tilde{\varphi}} (|x|_{\tilde{\varphi}(\beta)})^k + (|x|_{\tilde{\varphi}(\beta)})^n$$

pour $x \in U'(\beta)$ et $n > m$. Par suite, si $\alpha = \tilde{\varphi}(\beta)$, $B_\alpha = \alpha^{-1}([0 , 1[)$, et si $x \in U'(\beta) \cap B_\alpha$,

$$|r_m(x)|_\beta \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} |\tilde{f}_k|_{\beta,\tilde{\varphi}} (|x|_\alpha)^k \quad .$$

L'expression de $u_m(x)$ montre que si $\beta = \tilde{\psi}(\gamma)$, et si $x \in U'(\beta) \cap B_\alpha$, $|u_m(x)|_\gamma$ est majoré par le reste d'ordre m de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} H_n X^n = \sum_{p\geqslant 1} |\tilde{g}_p|_{\gamma,\tilde{\psi}} (\sum_{q\geqslant 1} |\tilde{f}_q|_{\beta,\tilde{\varphi}} X^q)^p \quad ,$$

pour la valeur $X = |x|_\alpha$. Nous en déduisons qu'il existe $k \in]0 , 1[$ tel que, pour $x \in U'(\beta) \cap kB_\alpha$, et pour $m \in \underset{\sim}{N}$,

$$|u_m(x)|_\gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{2} (|x|_\alpha)^m \quad .$$

Ainsi, pour $x \in U(\gamma , \varepsilon) \cap U'(\beta) \cap kB_\alpha$, et pour tout $m \in \underset{\sim}{N}$, $|t_m(x)|_\gamma \leqslant \varepsilon(|x|_\alpha)^m$.

La démarche précédente est fréquemment appelée "méthode des séries majorantes".

Le théorème précédent montre que l'on peut parler de la catégorie des espaces vectoriels semi-topologiques pointés et des applications analytiques pointées.

Pour les applications semi-analytiques, mis à part le cas particulier trivial de la composition avec une application linéaire continue, on ne dispose que de la propriété suivante.

PROPOSITION 2.5. - <u>Soient</u> $(E , \mathcal{A})$, $(F , \mathcal{B})$ <u>et</u> $(G , \mathcal{C})$ <u>des espaces vectoriels semi-topologiques,</u> G <u>étant semi-complet (i. e. toute suite de Cauchy est convergente). Soit</u> a <u>un point de</u> E , <u>et soient</u> $f : E \to F$ <u>et</u> $g : F \to G$ <u>des applications analytiques en</u> a <u>et</u> $b = f(a)$ <u>respectivement. Si l'une ou l'autre des applications</u> f <u>et</u> g <u>est uni-analytique en</u> a <u>ou</u> b <u>respectivement, l'application</u> $h = g \circ f$ <u>est uni-analytique en</u> a .

Les parties (a) et (b) de la démonstration qui précède cette proposition nous assurent déjà qu'il existe une série $(\widetilde{h}_n)_{n\geqslant 1}$ candidate pour faire un développement de h en a qui possède une indicatrice de convergence absolue stricte. Il nous suffit donc de montrer que, pour x assez petit,

$$h(a + x) = h(a) + \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{h}_n(x) \quad .$$

Soit $\alpha = \widetilde{\chi}(\mathcal{C}) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}(\mathcal{C})$ la valeur constante de l'indicatrice de convergence absolue stricte de $(\widetilde{h}_n)_{n\geqslant 1}$. Pour $|x|_\alpha < 1$, la famille

$$\sum_\nu \widetilde{g}_p(\widetilde{f}_{n_1}(x)^{n_1} , \ldots , \widetilde{f}_{n_p}(x)^{n_p}) \ , \quad \text{où} \quad \nu = (n_1 , \ldots , n_p) \ , \quad n_1 \geqslant 1 , \ldots , n_p \geqslant 1, \ p \geqslant 1$$

est absolument sommable (en un sens facile à préciser), donc sommable puisque G est semi-complet et puisque l'ensemble d'indices est dénombrable. D'après l'associativité de la somme et la continuité de $\widetilde{g}_p$, la somme de cette série est

$$\sum_{p\geqslant 1} \widetilde{g}_p(f(a + x) - b , \ldots , f(a + x) - b) \quad ,$$

lorsque x est assez petit pour que $f(a + x) - b = \sum_{n\geqslant 1} \widetilde{f}_n(x)^n$. C'est encore

$$g(f(a + x)) - g(b) = h(a + x) - c \quad ,$$

pourvu que $f(a + x) - b$ soit assez petit, ce qui est le cas si x est assez voisin de zéro. D'autre part, toujours d'après la propriété d'associativité, la somme de cette famille égale la somme $\sum_{n\geqslant 0} h_n(x)$.

Le prestige des applications uni-analytiques se trouve rehaussé par les propositions suivantes.

PROPOSITION 2.6. - <u>Soient</u> $(E , \mathfrak{A})$, $(F , \mathfrak{B})$ <u>deux espaces vectoriels semi-topologiques</u>, E <u>étant un espace vectoriel topologique</u>, F <u>étant semi-complet, et soit</u> a <u>un point de</u> E . <u>Une application</u> $f : E \to F$ <u>uni-analytique en</u> a <u>est uni-analytique sur un voisinage de</u> a .

Rappelons que, si φ est une application de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$, nous désignons par $L^p_\varphi(E , F)$ l'espace vectoriel des applications u , p-linéaires de E dans F , telles que

$$|u|_{\beta,\varphi} = |u|_{\beta,\varphi(\beta)} = \sup\{|u(x_1 , \ldots , x_p)|_\beta \ , \quad |x_1|_{\varphi(\beta)} \leqslant 1 , \ldots , |x_p|_{\varphi(\beta)} \leqslant 1\}$$

soit fini pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$. Nous le munissons de la semi-topologie engendrée par les semi-normes $u \longmapsto |u|_{\beta,\varphi}$ où β parcourt $\mathcal{B}$; c'est un espace semi-complet, si F est semi-complet.

Soit φ une indicatrice de convergence absolue stricte, de valeur constante $\alpha \in \mathfrak{A}$, pour le développement $(\tilde{f}^a_n)_{n \geq 0}$ de f en a. Nous pouvons supposer α choisie de telle manière que $\sum_{n \geq 0} \tilde{f}^a_n(x)^n$ soit sommable, do somme $f(a + x)$ lorsque x appartient à la semi-boule B_α (i. e. $|x|_\alpha < 1$). Pour p et q entiers naturels et $x \in E$, notons $\tilde{f}^a_{p+q}(x)^q$ l'élément de $L^p_\varphi(E, F)$ défini par

$$\tilde{f}^a_{p+q}(x)^q (y_1, \ldots, y_p) = \tilde{f}^a_{p+q}(x, \ldots, x, y_1, \ldots, y_p) \quad .$$

Soit $x_0 \in B_\alpha$; posons $b = a + x_0$. Pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$, la série

$$\frac{1}{p!} \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \tilde{f}^a_{p+q}(x_0)^q \quad ,$$

qui converge absolument, définit un élément $\tilde{f}^b_p$ de $L^p_\varphi(E, F)$; nous avons

$$\tilde{f}^b_p(y)^p = \frac{1}{p!} \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \tilde{f}^a_{p+q}(x_0)^q (y)^p \qquad \text{pour tout } y \in E \quad .$$

La famille

$$\sum_{(p,q) \in \underset{\sim}{N} \times \underset{\sim}{N}} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \tilde{f}^a_{p+q}(x_0)^q (x - x_0)^p$$

est absolument sommable, donc sommable, pour $|x - x_0|_\alpha < 1 - |x_0|_\alpha$. Sa somme vaut

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \tilde{f}^a_n(x_0)^{n-p} (x - x_0)^p = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}^a_n(x_0 + x - x_0)^n = f(a + x) \quad ,$$

et aussi

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \tilde{f}^a_{p+q}(x_0)^q (x - x_0)^p = \sum_{p \geq 0} \tilde{f}^b_p(x - x_0)^p \quad .$$

Si nous posons $y = a + x - b = x - x_0$, nous avons donc

$$f(b + y) = \sum_{p \geq 0} \tilde{f}^b_p(y)^p \qquad \text{pour } |y|_\alpha < 1 - |x_0|_\alpha \quad .$$

De plus,

$$\sum_{p \geq 0} |\tilde{f}^b_p|_{\beta,\alpha} (1 - |x_0|_\alpha)^p < +\infty \qquad \text{pour tout } \beta \in \mathcal{B} \quad ,$$

ce qui montre que $\beta \longmapsto (1 - |x_0|_\alpha)\alpha$ est une indicatrice de convergence absolue stricte du développement de f en b, et que f est uni-analytique en tout point b de $a + B_\alpha$.

Remarque : Si E est un espace normé, le rayon de convergence stricte $\tilde{R}_b$ en b vérifie $\tilde{R}_b \geqslant \tilde{R}_a - \|b - a\|$.

La démonstration précédente établit immédiatement la proposition que voici.

PROPOSITION 2.7. - Sous les hypothèses de la proposition précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée de f (qui existe sur un voisinage U de a, d'après cette proposition) est une application uni-analytique de U dans $L^p_\varphi(E, F)$, où φ est l'indicatrice de convergence absolue stricte de f en a.

La proposition suivante découle immédiatement des définitions.

PROPOSITION 2.8. - Si f et g sont deux applications de E dans F (E, F espaces vectoriels semi-topologiques) semi-analytiques en un point a de E, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f et g ont même germe en a ;
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n g(a) = D^n f(a)$.

THÉORÈME 2.9. - Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, U un ouvert de E, F un espace vectoriel semi-topologique semi-complet. L'ensemble des points où deux applications uni-analytiques f et g de U dans F ont même germe est un ouvert et un fermé de U.

COROLLAIRE 2.10 (Principe du prolongement analytique). - Sous les hypothèses du théorème précédent, si f et g coïncident sur un ensemble ouvert non vide V de U, f et g coïncident sur la réunion des composantes connexes de U dont l'intersection avec V est non vide.

Soit $\tilde{U}_0$ l'ensemble des points de U où f et g ont même germe, et pour $n \in \mathbb{N}$, soit U_n l'ensemble des points de U où les dérivées d'ordre n de f et g coïncident. D'après la proposition 2.8, $\tilde{U}_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Soit a un point de U adhérent à $\tilde{U}_0$. Nous pouvons supposer que f et g ont une même indicatrice de convergence stricte absolue en a, φ, de valeur constante α. Sur un voisinage V de a dans U, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les dérivées $D^n f$ et $D^n g$ définissent des applications continues de V dans $L^n_\varphi(E, F)$. Puisque a est adhérent à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $D^n f(a) = D^n g(a)$ et $a \in \tilde{U}_0$, ce qui prouve le théorème, $\tilde{U}_0$ étant évidemment ouvert.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous ne considérons que des espaces vectoriels complexes. Le théorème suivant est fort important.

THÉORÈME 2.11. - Soient E et F des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés sur $\mathbb{C}$, F étant semi-complet, et soit U un ouvert de E . Pour une application localement bornée $h : U \to F$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) h est uni-analytique sur U ;

(b) h est semi-analytique sur U ;

(c) h est analytique sur U ;

(d) h est dérivable sur U ;

(e) h est scalairement dérivable sur U (i. e. pour toute forme linéaire continue f^* sur F , $f^* \circ h$ est dérivable) ;

(f) h est scalairement-Gâteaux-dérivable sur U (i. e. pour toute droite affine paramétrée $D = a + \mathbb{C}b$, avec $a , b \in E$, et pour toute forme linéaire continue f^* sur F , la fonction $z \longmapsto \langle f^* , h(a + zb)\rangle$ définie sur l'ouvert U_D des $z \in \mathbb{C}$ tels que $a + zb \in U$ est une fonction dérivable si $U_D \neq \emptyset$).

Il suffit d'établir l'implication de (f) à (a) . Cette implication est connue lorsque E est de dimension finie et lorsque $F = \mathbb{C}$. Soient a un point de E , V un voisinage convexe équilibré de 0 dans E tel que $h(a + V)$ soit borné. Guidés par le cas particulier indiqué, posons

$$h_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta} x)\, e^{-in\theta}\, d\theta \qquad \text{pour} \quad x \in V \ .$$

L'intégrale vectorielle précédente a un sens puisque F est semi-complet. Pour montrer que la restriction de h_n à un sous-voisinage V' de zéro dans V coïncide avec la restriction à V' d'une application n-linéaire continue de E dans F , il nous suffit d'établir que

$$\Delta_{y_1} \cdots \Delta_{y_n} h_n(0) \qquad \text{pour} \quad y_1 , \dots , y_n \in V'$$

est une fonction linéaire de chaque y_i $(i = 1 , \dots , n)$, et que

$$h_n(x) = \Delta_x \cdots \Delta_x h_n(0) \qquad \text{pour} \quad x \in V' \ .$$

Prenons $V' = \frac{1}{n} V$. Ces vérifications ne font intervenir que des sous-espaces de dimension finie de E . De surcroît, nous pouvons nous ramener au cas particulier connu, en composant avec des formes linéaires continues sur F , grâce au théorème de Hahn-Banach et à la permutabilité de l'intégrale et des applications linéaires continues. Les applications polynomiales (que nous notons encore h_n) qui prolongent les h_n sont continues. En effet, pour toute semi-norme β définissant la topologie de F , si M_β est un majorant de $|h(a+v)|_\beta$ pour $v \in V$, nous avons $|h_n(x)|_\beta \leqslant M_\beta$ pour $x \in V$, comme nous le voyons en appliquant aux deux membres de la relation définissant $h_n(x)$ une forme linéaire f^* sur F , majorée par β , prenant en $h_n(x)$ la valeur $|h_n(x)|_\beta$. Alors, si α est une semi-norme définissant la topologie de E telle que kB_α soit contenue dans V , pour $k \in]1, +\infty[$, $|h_n|_{\beta,\alpha} \leqslant \frac{M_\beta}{k^n}$. Nous avons donc

$$\sum_{n \geqslant 0} |h_n|_{\beta,\varphi} < +\infty \quad ,$$

où φ est l'application de valeur constante α . La majoration précédente montre que, pour $x \in B_\alpha$, la série $\sum_{n \geqslant 0} h_n(x)$ est sommable ; sa somme est $h(x)$, comme on le voit en appliquant le théorème de Hahn-Banach et en se restreignant à la droite passant par a et $a + x$. Nous avons ainsi établi que h est uni-analytique en tout point a de U .

COROLLAIRE 2.12 (Principe du maximum). - Soit $h : U \subset E \to F$ une application analytique localement bornée sur U , E et F étant des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, F étant semi-complet, U étant un ouvert connexe de E . Pour toute semi-norme continue β sur F , ou bien $x \longmapsto |h(x)|_\beta$ ne possède aucun maximum sur U , ou bien $|h(x)|_\beta$ est constant.

Supposons que $x \longmapsto |h(x)|_\beta$ atteigne un maximum local en un point a de U ; soit V un voisinage de a contenu dans U tel que $h(V)$ soit borné et que $|h(x)|_\beta \leqslant B = |h(a)|_\beta$ pour tout $x \in V$; nous pouvons supposer $V - a$ équilibré.

La démonstration précédente a montré que

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta}(x-a)) \, d\theta \qquad \text{pour } x \in V \ .$$

Si f^* est une forme linéaire continue sur F telle que $\langle f^*, h(a) \rangle = |h(a)|_\beta$, $|\langle f^*, y \rangle| \leqslant |y|_\beta$, nous avons

$$|h(a)|_\beta \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(a + e^{i\theta}(x-a))|_\beta \, d\theta \quad ,$$

ce qui implique l'égalité $|h(a)|_\beta = |h(x)|_\beta$. Un argument de connexité (l'ensemble des points u de U tels que $|h(u)|_\beta = B$ est ouvert et fermé) termine la preuve du corollaire, lorsque h atteint un maximum global sur U en a .

COROLLAIRE 2.13 (Théorème de Liouville). - Soit $h : E \to F$ une fonction analytique, E et F étant toujours des espaces vectoriels topologiques complexes localement convexes séparés, et F semi-complet. Si $h(E)$ est borné, h est constante.

Si a et b sont deux points de E, pour toute forme linéaire continue f^* sur F, la fonction $z \longmapsto \langle f^*, h(a + z(b - a))\rangle$ est holomorphe et bornée, donc constante ; le corollaire résulte alors du théorème de Hahn-Banach.

COROLLAIRE 2.14. - Soit $h : E \to F$ une fonction analytique localement bornée, E et F étant des espaces vectoriels topologiques complexes localement convexes, F semi-complet. Si, pour toute semi-norme continue β sur F, il existe une semi-norme continue α sur E et une constante M_β telle que

$$|h(x)|_\beta \leqslant M_\beta(|x|_\alpha)^n$$

pour un certain entier n, h est un polynôme de degré $\leqslant n$.

En effet, le développement en série entière de f à l'origine est alors donné par

$$h_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(a + e^{i\theta} x)\, e^{-ip\theta}\, d\theta \quad .$$

Pour $p > n$, nous avons $|h_p(x)|_\beta \leqslant M_\beta(|x|_\alpha)^n$, donc $|h_p(x)|_\beta = 0$ par homogénéité, et $h_p(x) = 0$. Puisque h est uni-analytique, le corollaire résulte du principe du prolongement analytique.

Remarquons que, dans le corollaire 2.12, si F est un espace de Banach, l'application $h : U \to F$ peut ne pas être constante bien que $\|h\|$ atteigne son maximum sur U. L'application $h : U \to F$ du disque unité ouvert U de $\underset{\sim}{C}$ dans l'espace de Banach $F = \underset{\sim}{C}^2$, doté de la norme $\|(z_1 , z_2)\| = \max(|z_1| , |z_2|)$ définie par $h(z) = (1 , z)$, donne un contre-exemple. E. THORP et R. WHITLEY [34] donnent une condition nécessaire et suffisante portant sur la boule unité de F pour que cette version du théorème du maximum ait lieu pour les fonctions analytiques à valeurs dans F. Voir [7] pour un autre point de vue.

3. Variétés analytiques.

Les ouverts d'espaces vectoriels semi-topologiques et les applications analytiques entre ceux-ci forment, d'après le théorème 2.4, une catégorie que l'on peut prendre comme catégorie de modèles ; cette catégorie peut être élargie en une catégorie locale, qui est celle des variétés analytiques modelées sur des espaces vectoriels semi-topologiques (cf. H. CARTAN et S. EILENBERG [9]). Comme dans l'exposé oral, pour lequel cette voie fut choisie en vue de l'introduction aux espaces analytiques, on peut aussi considérer les variétés analytiques comme des espaces $\mathcal{K}$-fonctés dont tout point admet un voisinage isomorphe à un modèle lisse (voir l'exposé suivant, de MIGNOT [24]). Moins savamment, on peut remarquer que les homéomorphismes analytiques, ainsi que leurs inverses entre ouverts d'espaces vectoriels semi-topologiques, forment un pseudo-groupe de transformations ; on peut alors construire les variétés analytiques (ou C^{ω}-variétés) à l'aide de la notion d'atlas compatible avec ce pseudo-groupe (cf. KOBAYASHI et NOMIZU [19]). Plus naïvement encore, nous supposerons connues les constructions des objets de la géométrie différentielle que nous introduirons, et nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que ces constructions, telles qu'elles sont exposées par exemple dans le livre de LANG ([20]), peuvent être étendues au cadre dans lequel nous nous plaçons. Nous parlerons ainsi de C^r-variétés, de C^r-fibrés vectoriels, etc., avec $r \in \underset{\sim}{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$, et nous nous contenterons de donner des exemples.

A. L'espace projectif d'un espace vectoriel localement convexe.

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, sur $K = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$, pour une famille de semi-normes $\mathfrak{A}$. Désignons par $P(E)$ (ou $P_{n-1}(K)$ si $E = K^n$, avec $n \in \underset{\sim}{N}^*$, $K = \underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$) l'espace topologique quotient de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence $(x \mathcal{R} y) \iff (\exists \lambda \in K$ tel que $x = \lambda y)$. On constate aisément que $P(E)$ est compact si, et seulement si, E est de dimension finie.

Soit I l'ensemble des couples (e , H) où e est un vecteur non nul de E, H un hyperplan fermé supplémentaire (topologique) de Ke. Pour $i = (e , H)$, désignons par U_i l'ensemble des classes d'équivalence $\dot{e}' \in P(E)$ dont un représentant e' engendre un supplémentaire (topologique) de H ; c'est un ouvert de $P(E)$, dont l'image réciproque par la projection canonique $p : E - \{0\} \to P(E)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $ke + h$ avec $k \in K - \{0\}$, $h \in H$. Soit φ_i la bijection de U_i sur H définie par $\varphi_i(p(e + h)) = h$; φ_i est un homéomorphisme. Les intersections $U_i \cap U_j$ pour $(i , j) \in I \times I$ sont ouvertes, et les changements de cartes sont analytiques. La vérification de cette assertion, triviale pour $i = (e , H)$, $j = (e' , H)$, se ramène au cas $i = (e , H)$, $j = (e , G)$. Si f est une forme linéaire continue sur E, nulle sur G, et prenant en e la valeur 1, G est l'ensemble des éléments de la forme $h - f(h)e$ pour $h \in H$. L'ensemble ouvert $U_{i,j} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est constitué des $h \in H$ tels que $f(h) \neq -1$, et le changement de cartes $\varphi_{j,i} : U_{i,j} \to \varphi_j(U_j)$ est l'application

$$h \longmapsto g = (1 + f(h))^{-1} (h - f(h)e) \ ;$$

elle est analytique comme composée d'applications analytiques.

Si E est un espace de Hilbert réel, on peut encore construire $P(E)$ comme quotient de la sphère unité $S = \{x \ , \ \|x\| = 1\}$ par la relation antipodale. La sphère S est une sous-variété de $E - \{0\}$ comme image réciproque de $\{1\}$ par la C^{ω}-submersion $x \longmapsto \|x\|^2$. L'espace $P(E)$ est le quotient de S par le groupe $\underset{\sim}{Z}/(2)$ opérant de façon proprement discontinue sur S, c'est donc une C^{ω}-variété.

Si X est une variété analytique modelée sur des espaces vectoriels topologiques localement convexes, on peut construire une nouvelle variété analytique $\widehat{X}_a$ en faisant "éclater" un point a de X. Explicitons ce processus. Si V est un voisinage ouvert de 0 dans un espace vectoriel topologique localement convexe E, $\widehat{V}_0$ est le sous-espace $(\{0\} \times P(E)) \cup G$ de $E \times P(E)$, où G est le graphe de la restriction à $V - \{0\}$ de la projection $p : E - \{0\} \to P(E)$; $\widehat{V}_0$ possède une structure naturelle de C^{ω}-variété. Si X est une C^{ω}-variété arbitraire, et si a est un point de X, soit (U , φ , E) une carte de X en a, avec $\varphi(a) = 0$; posons $V = \varphi(U)$, et considérons la variété obtenue en recollant $\widehat{V}_0$ et $X - \{a\}$ le long de $\widehat{V}_0 - P(E)$ et de $U - \{a\}$ au moyen de la carte φ. Il est facile de voir que la variété ainsi obtenue est indépendante de la carte φ choisie (à un C^{ω}-isomorphisme près) ; on dit que c'est la variété $\widehat{X}_a$ obtenue à partir de X en faisant éclater le point a.

B. Grassmannienne d'un espace de Banach.

Soit E un espace de Banach sur $\underset{\sim}{R}$ ou $\underset{\sim}{C}$. Désignons par $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des sous-espaces directs de E, c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces vectoriels qui admettent un supplémentaire topologique ; c'est encore le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des sous-espaces fermés de E qui admettent un supplémentaire algébrique fermé.

Si G est un élément de $\mathcal{S}(E)$, notons U_G l'ensemble des sous-espaces H de E admettant G comme supplémentaire topologique. Pour $H \in U_G$, notons p_G^H la projection de E sur G parallèlement à H, i_G l'injection de G dans E, I_G l'application identique de G, et I l'application identique sur E. Nous avons les relations

(1) $$i_G \circ p_G^H + i_H \circ p_H^G = I \ ,$$

(2) $$p_G^H \circ i_H = p_H^G \circ i_G = 0 \ ,$$

(3) $$p_G^H \circ i_G = I_G \ , \qquad p_H^G \circ i_H = I_H \ ,$$

entre ces projecteurs et ces injections, les groupements équivalents (1) et (2) ou (1) et (3) suffisant à caractériser les applications p_G^H et p_H^G comme des projecteurs.

Pour F et H dans U_G, il existe un automorphisme linéaire de E laissant G stable et appliquant H sur F ; son expression matricielle dans $GL(H \times G)$ au moyen de l'isomorphisme (p_H^G , p_G^H) de E sur $H \times G$ peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} I_H & 0 \\ - p_G^F \circ i_H & I_G \end{pmatrix} .$$

L'image de F dans $H \times G$ par l'isomorphisme (p_H^G , p_G^H) est le graphe de l'application $f = - p_G^F \circ i_H \in L(H , G)$. Nous définissons une bijection de U_G sur $L(H , G)$ en posant $\psi_{H,G}(F) = f$. Etudions le changement de cartes de $(U_G , \psi_{H,G} , L(H , G))$ à $(U_{G'} , \psi_{H',G'} , L(H' , G'))$ pour $U_G \cap U_{G'} \neq \emptyset$. Posons $f = \psi_{H,G}(F)$, $f' = \psi_{H',G'}(F)$, pour $F \in U_G \cap U_{G'}$.

<u>1er cas</u> : $G = G'$. – Alors $\psi_{H,G}(U_G \cap U_{G'})$ est $L(H , G)$, ouvert dans $\psi_{H,G}(U_G)$, et, si nous posons

$$a = p_H^G \circ i_{H'} , \qquad b = - p_G^H \circ i_{H'} ,$$

nous avons

$$f' = f \circ a + b ,$$

ce qui montre que le passage de f à f' est analytique.

<u>2e cas</u> : $H = H'$. – Soit $F \in U_G$; F est dans $U_{G'}$ si, et seulement si, G' est dans U_F, c'est-à-dire si, et seulement si, l'application

$$\alpha(f) = p_G^F \circ i_{G'}$$

est inversible. Or

$$\alpha(f) = p_G^H \circ i_{G'} - f \circ p_H^G \circ i_{G'}$$

est une application affine continue de f. Comme l'ensemble des isomorphismes de G' sur G est ouvert, $\psi_{H,G}(U_G \cap U_{G'})$ est ouvert dans $\psi_{H,G}(U_G)$. Pour $f \in \psi_{H,G}(U_G \cap U_{G'})$, nous avons

$$f' = \alpha(f)^{-1} \circ f ,$$

et le changement de cartes est analytique.

3e cas : Cas général. – Prenons $H'' \in U_G \cap U_{G'}$. Le changement de cartes se décompose alors en deux changements du premier type et un du second :

$$(\psi_{H',G'} \circ \psi_{H,G}^{-1})|\psi_{H,G}(U_G \cap U_{G'})$$

$$= (\psi_{H',G'} \circ \psi_{H'',G'}^{-1}) \circ (\psi_{H'',G'} \circ \psi_{H'',G}^{-1}) \circ (\psi_{H'',G} \circ \psi_{H,G}^{-1})|\psi_{H,G}(U_G \cap U_{G'}) .$$

Pour H fixé dans $\mathcal{G}(E)$ et $G \in U_H$, soit $\lambda_G^H : L(H , G) \longrightarrow L(H , E/H)$ l'isomorphisme induit par la composition avec $\pi^H \circ i_G$, π^H étant la projection canonique de E sur E/H . Pour G , $G' \in U_H$, $u \in L(H , G)$, nous avons, d'après la formule de changement de cartes du second cas,

$$D(\psi_{H,G'} \circ \psi_{H,G}^{-1})(0).u = \alpha(0)^{-1} \circ u = (p_G^H \circ i_{G'})^{-1} \circ u = (p_{G'}^H \circ i_G) \circ u \quad ,$$

donc

$$\pi^H \circ i_{G'} \circ (D(\psi_{H,G'} \circ \psi_{H,G}^{-1})(0).u) = \pi^H \circ i_{G'} \circ p_{G'}^H \circ i_G \circ u = \pi^H \circ i_G \circ u \quad ,$$

ce qui s'écrit encore

$$\lambda_{G'}^H \circ (D(\psi_{H,G'} \circ \psi_{H,G}^{-1})(0)) = \lambda_G^H \quad .$$

Nous pouvons donc prendre $(L(H , E/H) , \lambda_G^H)$ comme amalgamé de $(L(H , G) , \psi_{H,G})_{G \in U_H}$ (voir PALAIS [28] pour la définition) : $L(H , E/H)$ est l'espace tangent à $\mathcal{G}(E)$ en H . Il est facile de vérifier que la norme canonique de $L(H , E/H)$ induit sur $\mathcal{G}(E)$ une structure de Finsler sur $\mathcal{G}(E)$ (voir PALAIS [29] pour la définition d'une structure de Finsler).

La topologie de $\mathcal{G}(E)$ que fournit l'atlas que nous avons décrit, peut être encore induite par la distance

$$d(F , F') = \delta(B_F , B_{F'}) \quad ,$$

où B_F (resp. $B_{F'}$) désigne la boule unité fermée de F (resp. de F'), et où δ désigne la distance de Hausdorff entre les fermés de E :

$$\delta(B_F , B_{F'}) = \max(\sup_{x \in B_F} d(x , B_{F'}) , \sup_{x' \in B_{F'}} d(x' , B_F)) \quad ,$$

et la distance

$$d'(F , F') = \log(1 + \max(\rho(F , F') , \rho(F' , F))) \quad ,$$

où $\rho(F , F')$ est la borne inférieure de $\|u - I_E\|$ sur l'ensemble des $u \in GL(E)$ tel que $u(F) = F'$, ou 1 si cet ensemble est vide.

Ces distances sont définies sur l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des sous-espaces fermés de E ; $\mathcal{S}(E)$ est ouvert et fermé pour la distance d' , et ouvert, mais en général non fermé dans $\mathcal{S}(E)$ pour la distance d . $(\mathcal{S}(E) , d')$ est complet, mais $(\mathcal{S}(E) , d)$ ne l'est pas. Si E est un espace de Hilbert, d et d' coïncident, et si $F , F' \in \mathcal{S}(E)$,

$$d(F , F') = d'(F , F') = \|P_F - P_{F'}\| ,$$

où P_F (resp. $P_{F'}$) est le projecteur orthogonal de E sur F (resp. F') (cf. MASSERA-SCHÄFFER [24], chap. 1, § 13-14).

En réponse à une question de M. CHOQUET, examinons les composantes connexes de $\mathcal{S}(E)$. Désignons par G_1 la composante connexe de I_E **dans** le groupe $GL(E)$ des automorphismes linéaires de E . On voit aisément, en usant du fait que $\mathcal{S}(E)$ est localement connexe par arcs, que la composante connexe de $F \in \mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)$ est l'orbite de F du groupe G_1 opérant de façon naturelle sur $\mathcal{S}(E)$. En général, cette orbite ne coïncide pas avec celle de $GL(E)$, bien qu'il en soit ainsi si E est un espace de Hilbert. En effet, prenons $E = F \oplus H$, où F est l'espace c_0 de Banach, H un espace de Hilbert ; on sait (DOUADY [12]) que $GL(E)$ n'est pas connexe, tandis que $GL(F)$ et $GL(H)$ le sont. L'application $f: GL(E) \to \mathcal{S}(E)$ définie par $f(u) = u(F)$ pour $u \in GL(E)$ est ouverte, et l'image réciproque de tout point de la composante connexe $\mathcal{S}(E)_F$ de F dans $\mathcal{S}(E)$ est connexe, car homéomorphe au groupe d'isotropie de F : il en résulte que $\mathcal{S}(E)_F$ est contenu strictement dans $f(GL(E))$.

Soient E' , E , E'' trois espaces de Banach. Soit $\mathrm{Mon}(E' , E)$ l'ensemble des monomorphismes directs de E' dans E , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues injectives de E' dans E dont l'image admet un supplémentaire topologique. Soit $\mathrm{Epi}(E , E'')$ l'ensemble des épimorphismes directs de E sur E'' , c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues surjectives dont le noyau admet un supplémentaire topologique. Une application u de $L(E' , E)$ (resp. de $L(E , E'')$) est dans $\mathrm{Mon}(E' , E)$ (resp. dans $\mathrm{Epi}(E , E'')$) si, et seulement si, il existe v dans $L(E , E')$ (resp. dans $L(E'' , E)$) tel que $v \circ u = I_{E'}$ (resp. $u \circ v = I_{E''}$).

Il est facile de voir que, si $u \in \mathrm{Mon}(E' , E)$, u induit un plongement $u_* : \mathcal{S}(E') \to \mathcal{S}(E)$ défini par $u_*(F') = u(F')$ pour $F \in \mathcal{S}(E')$, et que si $u \in \mathrm{Epi}(E , E'')$, u induit un plongement $u^* : \mathcal{S}(E'') \to \mathcal{S}(E)$ défini par $u^*(F'') = u^{-1}(F'')$ pour $F'' \in \mathcal{S}(E'')$.

PROPOSITION 3.1.

(a) $\mathrm{Mon}(E', E)$ <u>est ouvert dans</u> $L(E', E)$, <u>et l'application</u>

$$\mathrm{Im} : \mathrm{Mon}(E', E) \to \mathcal{S}(E)$$

<u>associant à une application de</u> $\mathrm{Mon}(E', E)$ <u>son image est une fibration principale sur son image, de groupe structural</u> $GL(E')$.

(b) $\mathrm{Epi}(E, E'')$ <u>est ouvert dans</u> $L(E, E'')$, <u>et l'application</u>

$$\mathrm{Ker} : \mathrm{Epi}(E, E'') \to \mathcal{S}(E)$$

<u>associant à une application de</u> $\mathrm{Epi}(E, E'')$ <u>son noyau est une fibration principale sur son image, de groupe structural</u> $GL(E'')$.

(a) Soit $H \in \mathrm{Im}(\mathrm{Mon}(E', E)) \subset \mathcal{S}(E)$; choisissons un supplémentaire $G \in \mathcal{S}(E)$ de H , et considérons $\mathrm{Im}^{-1}(U_G)$. Pour $u \in \mathrm{Mon}(E', E)$, posons $u_H = p_H^G \circ u$, $u_G = p_G^H \circ u$, $F = u(E')$. Puisque u est injectif, il est équivalent de supposer que F appartienne à U_G , que $p_H^G \circ i_F$ soit inversible, ou que u_H soit inversible (ce qui revient à supposer u_H bijectif, d'après le théorème de Banach). Soit h un isomorphisme de E' sur H . L'application

$$\Psi_{H,G}^h : \mathrm{Im}^{-1}(U_G) \to L(H, G) \times GL(E')$$

donnée par

$$\Psi_{H,G}^h(u) = (u_G \circ (u_H)^{-1}, h^{-1} \circ u_H) ,$$

définit une carte de l'ouvert $\mathrm{Im}^{-1}(U_G)$ de $L(E', E)$. Comme

$$p_1(\Psi_{H,G}^h(u)) = \psi_{H,G}(F) = \psi_{H,G}(\mathrm{Im}(u))$$

et

$$\Psi_{H,G}^h(u \circ g') = (u_G \circ (u_H)^{-1}, h^{-1} \circ u_H \circ g')$$

pour $g' \in GL(E')$, nous avons bien une fibration principale.

(b) Soit $H \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Epi}(E, E'')) \subset \mathcal{S}(E)$; choisissons un supplémentaire $G \in \mathcal{S}(E)$ de H . Pour $u \in \mathrm{Epi}(E, E'')$, posons $F = \mathrm{Ker}\, u$, $u^H = u \circ i_H$, $u^G = u \circ i_G$. Puisque u est surjectif, il est équivalent de supposer que F appartienne à U_G , que $p_H^G \circ i_F$ soit bijectif, ou que u^G soit bijectif. Ainsi, $\mathrm{Ker}^{-1}(U_G)$ est l'ouvert de $L(E, E'')$ des u tels que $u \circ i_G$ soit inversible. Choisissons un isomorphisme k de G sur E'' , et posons, pour $u \in \mathrm{Ker}^{-1}(U_G)$,

$$\Psi_{H,G}^k(u) = (- u_G^{-1} \circ u_H , u_G \circ k^{-1}) = (\psi_{H,G}(F) , u_G \circ k^{-1}) .$$

L'application $\Psi^k_{H,G}$ est une carte, et est équivariante pour l'opération à gauche de $GL(E'')$ sur $Ker^{-1}(U_G)$ et $L(H, G) \times GL(E'')$.

Si E et E' sont deux espaces de Banach, nous notons $\mathcal{D}(E, E')$ l'ensemble des homomorphismes directs de E dans E' (applications linéaires continues dont l'image et le noyau sont des sous-espaces directs). $\mathcal{D}(E, E')$ coïncide avec l'ensemble des éléments u de $L(E, E')$ tels qu'il existe v dans $L(E', E)$, avec $u \circ v \circ u = u$. Dotons $\mathcal{D}(E, E')$ de la topologie image réciproque de celle de $\mathcal{S}(E) \times L(E, E') \times \mathcal{S}(E)$ pour l'application (Ker, I, Im), où I désigne l'injection de $\mathcal{D}(E, E')$ dans $L(E, E')$.

PROPOSITION 3.2. - $\mathcal{D}(E, E')$ <u>possède une unique structure de variété analytique pour laquelle</u> (Ker, I, Im) <u>soit un plongement dans</u> $\mathcal{S}(E) \times L(E, E') \times \mathcal{S}(E')$. <u>L'injection</u> I <u>de</u> $\mathcal{D}(E, E')$ <u>dans</u> $L(E, E')$ <u>est une immersion. Les applications</u> (Ker, I) <u>et</u> (I, Im) <u>sont des plongements de</u> $\mathcal{D}(E, E')$ <u>dans</u> $\mathcal{S}(E) \times L(E, E')$ <u>et</u> $L(E, E') \times \mathcal{S}(E')$ <u>respectivement. L'application</u> (Ker, Im) <u>est une fibration localement triviale de</u> $\mathcal{D}(E, E')$ <u>sur son image dans</u> $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E')$.

Soit $(H, H') = (Ker\, u_0, Im\, u_0)$ pour $u_0 \in \mathcal{D}(E, E')$ et, soient $G \in \mathcal{S}(E)$ et $G' = \mathcal{S}(E')$ des supplémentaires de H et H' respectivement. Posons, pour $u \in \mathcal{D}(E, E')$,

$$(p^{G'}_{H'}, p^{H'}_{G'}) \circ u \circ (p^G_H, p^H_G)^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

et $F = Ker\, u$, $F' = Im\, u$. Il est équivalent de supposer que $F \in U_G$ et $F' \in U_{G'}$, ou que $b = p^{G'}_{H'} \circ u \circ i_G$ soit inversible et $c = d \circ b^{-1} \circ a$. S'il en est ainsi,

$$f = \psi_{H,G}(F) = - b^{-1} \circ a \qquad \text{et} \qquad f' = \psi_{H',G'}(F') = d \circ b^{-1} .$$

La trace de $(Ker, I, Im)(\mathcal{D}(E, E'))$ sur l'ouvert W de $U_G \times L(E, E') \times U_{G'}$ des triplets $\left(F, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, F'\right)$ tels que b soit inversible, est appliquée par la carte

$$\left(F, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, F'\right) \longmapsto (f + b^{-1} \circ a, a, b, c - d \circ b^{-1} \circ a, d, f' - d \circ b^{-1})$$

sur la trace d'un sous-espace direct dans l'image de la carte. Ainsi

$$(Ker, I, Im)(\mathcal{D}(E, E'))$$

est une sous-variété de $\mathcal{S}(E) \times L(E, E') \times \mathcal{S}(E')$, et $\mathcal{D}(E, E')$ possède une unique structure de variété analytique qui fasse de $(\mathrm{Ker}\ ,\ I\ ,\ \mathrm{Im})$ un isomorphisme sur cette sous-variété.

Le fait que I soit une immersion résulte de ce que l'expression de I dans la carte de $\mathbb{O}(E\ ,\ E')$, obtenue par restriction à partir de celle qui a été donnée, est l'application

$$(0\ ,a,\ b\ ,\ 0\ ,\ d\ ,\ 0) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ d\circ b^{-1}\circ a & d \end{pmatrix} .$$

Pour voir que l'application $(\mathrm{Ker}\ ,\ I)$ est un plongement, il suffit de montrer que c'est une application fermée sur son image. Soit $(F\ ,\ u) \in (\mathrm{Ker}\ ,\ I)(\mathbb{O}(E\ ,\ E'))$, et soit $(F_n\ ,\ u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $(\mathrm{Ker}\ ,\ I)(\mathbb{O}(E\ ,\ E'))$ qui converge vers $(F\ ,\ u)$ dans $\mathcal{G}(E) \times L(E\ ,\ E')$. Si G est un supplémentaire de F , et G' un supplémentaire de $F' = u(E)$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour $n \geqslant n_0$, F_n soit dans U_G et b_n soit inversible. Alors $F'_n = u_n(E)$ est dans $U_{G'}$, et $\psi_{F',G'}(F'_n) = d_n \circ b_n^{-1}$ tend vers $\psi_{F,G}(F') = d \circ b$, si nous écrivons $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ la matrice de u_n dans $L(F \times G\ ,\ F' \times G')$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ celle de u $(c = d = 0)$. Ainsi $(F_n\ ,\ u_n\ ,\ F'_n)$ tend vers $(F\ ,\ u\ ,\ F')$. La preuve pour l'application $(I\ ,\ \mathrm{Im})$ est similaire.

Pour $(H\ ,\ H') \in (\mathrm{Ker}\ ,\ \mathrm{Im})(\mathbb{O}(E\ ,\ E'))$ et pour des supplémentaires G , G' de H et H' respectivement, nous avons vu que $(\mathrm{Ker}\ ,\ \mathrm{Im})^{-1}\ (U_G \times U_{G'})$ est l'ensemble des $u \in \mathbb{O}(E\ ,\ E')$ dont la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $L(H \times G\ ,\ H' \times G')$ vérifie les conditions : b est inversible et $c = d \circ b^{-1} \circ a$. Nous définissons une carte fibrée de cet ensemble sur $((\psi_{H,G} \circ \mathrm{Ker}) \times (\psi_{H',G'} \circ \mathrm{Im}))(\mathbb{O}(E\ ,\ E')) \times \mathrm{Iso}(G\ ,H')$, en faisant correspondre à u le triplet $(-\ b^{-1} \circ a\ ,\ d \circ b^{-1}\ ,\ b)$; nous notons ici $\mathrm{Iso}(G\ ,\ H')$ l'ensemble des isomorphismes de G sur H' . La démonstration de la proposition est achevée.

4. Le théorème des fonctions inverses et ses applications.

Nous allons présenter une tentative pour que le théorème des fonctions inverses double le cap des espaces de Banach. L'énoncé que nous obtenons, malgré son apparence insipide, peut s'avérer utile, notamment dans l'étude des variétés d'applications modelées sur des espaces non normables. Un énoncé semblable est valable pour les applications m-dérivables, pour $m \in \mathbb{N}^*$.

THÉORÈME 4.1. - Soient $(E\ ,\ \mathcal{C})$, $(F\ ,\ \mathcal{B})$ des espaces vectoriels semi-topologiques, f une application de E dans F , analytique en un point a de E . Supposons que f induise une bijection d'un voisinage U de a sur un voisinage V de $b = f(a)$ dont l'inverse g soit continue en b, que la dérivée $Df(a)$ de f en a soit un isomorphisme de $(E , \mathfrak{A})$ sur $(F , \mathfrak{B})$, et qu'il existe des applications $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ et $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ telles que :

(a) φ soit une indicatrice de convergence et de convergence stricte absolue du développement de f en a ;

(b) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, $|Df(a)^{-1}|_{\alpha,\psi(\alpha)} < +\infty$;

(c) $\varphi \circ \psi = id_{\mathfrak{A}}$.

Alors g est analytique en b.

La démonstration de ce théorème est proche de celle qui a été donnée pour prouver la règle de composition des applications analytiques.

(a) Le développement de g en b, s'il existe, est déterminé de manière unique. Nous pouvons nous ramener à $a = 0$, $b = 0$. Soient $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$, $(\tilde{g}_n)_{n\geq 1}$ les développements de f et g en a et b respectivement. L'identification du développement de $f \circ g$ et de celui de Id_F donne les relations

$$\tilde{f}_1 \circ \tilde{g}_1 = id_F \quad ,$$

$$\tilde{f}_1 \circ \tilde{g}_n + \sum_{2\leq p\leq n} \sum_{\substack{n_1\geq 1,\dots,n_p\geq 1\\ n_1+\dots+n_p=n}} \tilde{f}_p \circ (\tilde{g}_{n_1} \times \dots \times \tilde{g}_{n_p}) = 0 \quad ,$$

ce qui détermine $\tilde{g}_n$ par récurrence. Les relations

$$\tilde{g}_1 \circ \tilde{f}_1 = id_E \quad ,$$

$$\tilde{g}_n \circ (f_1)^n + \sum_{1\leq p\leq n-1} \sum_{\substack{n_1\geq 1,\dots,n_p\geq 1\\ n_1+\dots+n_p=n}} \tilde{g}_p \circ (\tilde{f}_{n_1} \times \dots \times \tilde{f}_{n_p}) = 0 \quad ,$$

obtenues en identifiant les développements de $g \circ f$ et de id_E, fournissent le même résultat.

(b) Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$ et pour tout $n \geq 1$, $|\tilde{g}_n|_{\alpha,\psi} < \infty$. Ce résultat est vrai pour $n = 1$, et s'il est vrai jusqu'à l'ordre $n - 1$,

$$|\tilde{g}_n|_{\alpha,\psi(\alpha)} \leq |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi(\alpha)} \sum_{2\leq p\leq n} \sum_{\substack{n_1\geq 1,\dots,n_p\geq 1\\ n_1+\dots+n_p=n}} |\tilde{f}_p|_{\psi(\alpha),\alpha} \, |\tilde{g}_{n_1}|_{\alpha,\psi(\alpha)} \cdots |\tilde{g}_{n_p}|_{\alpha,\psi(\alpha)} \, ,$$

car $\varphi \circ \psi(\alpha) = \alpha$. De surcroît, il existe $k \geqslant 1$ tel que

$$\sum_{n\geqslant 1} |\tilde{g}_n|_{\alpha, k\psi} < + \infty \quad .$$

En effet, si $\sum\limits_{n\geqslant 1} F_n^{(\alpha)} X^n$ est une série formelle avec $F_1^{(\alpha)} > 0$,

$$(F_1^{(\alpha)})^{-1} > |f_1^{-1}|_{\alpha, \psi(\alpha)} \ , \qquad \text{et} \qquad F_n^{(\alpha)} \geqslant |\tilde{f}_n|_{\alpha, \varphi} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 2 \ ,$$

et si $\sum\limits_{n\geqslant 1} G_n^{(\alpha)} Y^n$ désigne la série formelle réciproque de $\sum\limits_{n\geqslant 1} F_n^{(\alpha)} X^n$, nous avons

$$|\tilde{g}_n|_{\alpha, \psi(\alpha)} \leqslant G_n^{(\alpha)} \qquad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \quad .$$

Comme le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} G_n^{(\alpha)} Y^n$ est positif si celui de la série $\sum F_n^{(\alpha)} X^n$ l'est, on a bien le résultat annoncé.

(c) Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} \tilde{f}_n(x)^n + r_m(x) \ , \qquad g(y) = \sum_{n=1}^{m} \tilde{g}_n(y)^n + s_m(y) \quad ,$$

et vérifions la condition (iii) pour les restes s_m ainsi définis. Fixons $\alpha \in \mathfrak{A}$, et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi} \leqslant \frac{1}{2}$. Soit $U(\varepsilon , \beta)$ un voisinage de 0 dans U tel que

$$|r_n(x)|_\beta \leqslant \sum_{n\geqslant m+1} |\tilde{f}_n|_{\beta,\varphi} \, (|x|_{\varphi(\beta)})^n$$

pour tout $x \in U(\varepsilon , \beta)$ et pour tout $m \in \underset{\sim}{N}^*$, et tel que $|r_1(x)|_\beta \leqslant \varepsilon |x|_{\varphi(\beta)}$ pour tout $x \in U(\varepsilon , \beta)$. Soit $V(\varepsilon , \beta)$ un voisinage de 0 dans V tel que $g(y) \in U(\varepsilon , \beta)$ pour $y \in V(\varepsilon , \beta)$. Pour $y \in V(\varepsilon , \psi(\alpha))$,

$$\begin{aligned} |g(y)|_\alpha &= |f_1^{-1}(y) - f_1^{-1}(r_1(g(y)))|_\alpha \\ &\leqslant |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi} \, |y|_{\psi(\alpha)} + |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi} \, \varepsilon |g(y)|_{\varphi(\psi(\alpha))} \quad , \end{aligned}$$

donc

$$|g(y)|_\alpha \leqslant \frac{|f_1^{-1}|_{\alpha,\psi}}{1 - \varepsilon |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi}} \, |y|_{\psi(\alpha)} \leqslant 2 |f_1^{-1}|_{\alpha,\psi} \, |y|_{\psi(\alpha)} \quad .$$

De l'expression

$$x = g(f(x)) = \sum_{n=1}^{m} \tilde{g}_n \Big(\sum_{p=1}^{m} \tilde{f}_p(x)^p + r_m(x) \Big) + s_m(f(x)) \quad ,$$

nous déduisons que, pour $y = f(x) \in V(\varepsilon , \psi(\alpha))$,

$$|s_n(y)|_\alpha \leqslant \sum_{p\geqslant 1} \sum_{\substack{n_1\geqslant 1,\dots,n_p\geqslant 1\\ m=n_1+\dots+n_p\geqslant n+1}} |\tilde{g}_p|_{\alpha,\psi} \, |\tilde{f}_{n_1}|_{\psi(\alpha),\alpha} \cdots |\tilde{f}_{n_p}|_{\psi(\alpha),\alpha} \, (|x|_\alpha)^m$$

$$\leqslant \sum_{p\geqslant 1} \sum_{\substack{n_1\geqslant 1,\dots,n_p\geqslant 1\\ m=n_1+\dots+n_p\geqslant n+1}} |\tilde{g}_p|_{\alpha,\psi} \, |\tilde{f}_{n_1}|_{\psi(\alpha),\alpha} \cdots |\tilde{f}_{n_p}|_{\psi(\alpha),\alpha} \, (2|f_1^{-1}|_{\alpha,\psi})^m \, (|y|_{\psi(\alpha)})^m$$

Puisque la série

$$\sum_{p\geqslant 1} \sum_{\substack{n_1\geqslant 1\dots n_p\geqslant 1\\ m=n_1+\dots+n_p\geqslant n+1}} |\tilde{g}_p|_{\alpha,\psi} \, |\tilde{f}_{n_1}|_{\psi(\alpha),\alpha} \cdots |\tilde{f}_{n_p}|_{\psi(\alpha),\alpha} \, X^m$$

a un rayon de convergence non nul, il existe $r > 0$ tel que, pour $y \in V(\varepsilon , \psi(\alpha))$, $|y|_{\psi(\alpha)} \leqslant r$, nous ayons

$$|s_n(y)|_\alpha \leqslant \varepsilon(|y|_{\psi(\alpha)})^n \ .$$

C. Q. F. D.

Il est facile de déduire du théorème précédent un théorème des fonctions implicites. Remarquons que, si $(E , \mathfrak{A})$ et $(F , \mathfrak{B})$ sont des espaces normables, et si $f : E \to F$ est telle que $Df(a)$ soit un isomorphisme et que f induise une bijection de U sur V , dont l'inverse g est continue en $b = f(a)$, nous pouvons trouver des applications φ et ψ satisfaisant aux conditions (a), (b), (c). En effet, il existe alors une bijection $\theta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, et nous pouvons trouver une application $\rho : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\varphi : \beta \longmapsto \rho(\beta)\,\theta^{-1}$ soit une indicatrice de convergence et de convergence stricte de f en a ; comme φ est surjective, il suffit de prendre pour ψ une inverse à droite de φ . Si $(E , \mathfrak{A})$ et $(F , \mathfrak{B})$ sont des espaces banachisables, le fait que f soit analytique en a assure que f est strictement dérivable en a ; si $Df(a)$ est un isomorphisme, nous sommes alors assurés que f induit un homéomorphisme d'un voisinage ouvert U de a sur un voisinage ouvert V de b (cf. par exemple CARTAN [8]). Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

COROLLAIRE 4.2. - Soient E , F des espaces de Banach, $f : E \to F$ une application analytique en un point a de E telle que $Df(a)$ soit un isomorphisme de E sur F (ce qui est le cas si $Df(a)$ est une bijection). Il existe alors des voisinages U et V de a et b dans E et F respectivement, tels que f induise une bijection de U sur V dont l'inverse g soit une application analytique.

Si X et Y sont deux C^r-variétés $(r \in \underset{\sim}{N} \cup \{\infty\} \cup \{\omega\})$, et si $f : X \to Y$ est un C^r-morphisme, nous disons que f est une subimmersion en un point a de X, s'il existe des cartes (U, φ, E) et (V, ψ, F) de X et Y en a et $b = f(a)$ respectivement telles que $f(U) \subset V$ et que l'expression $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f dans ces cartes soit la restriction à U d'un morphisme linéaire continu direct de E dans F.

Le morphisme f est dit une submersion (resp. une immersion, resp. un isomorphisme local) en a, si l'on peut choisir les cartes (U, φ, E), (V, ψ, F) de la définition précédente de telle façon que l'expression $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit la restriction d'un épimorphisme direct (resp. d'un monomorphisme direct, resp. d'un isomorphisme).

Le corollaire précédent exprime qu'un C^ω-morphisme de C^ω variétés banachiques $f : X \to Y$, tel que $T_a f$ soit un isomorphisme de $T_a X$ sur $T_{f(a)} Y$ pour un point a de X, est un C^ω-isomorphisme local en a.

THÉORÈME 4.3. - Soient E, F des espaces de Banach, O un ouvert de E, et $f : O \to F$ un C^r-morphisme $(r \in \underset{\sim}{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\})$ tel que sa dérivée f' soit une application continue de O dans $\mathcal{Q}(E, F)$ (cf. § 3). Alors f est une subimmersion en tout point de O.

Le théorème précédent est certainement connu de nombreux mathématiciens, bien qu'il soit resté inédit jusqu'ici, à ma connaissance du moins. En particulier, M. LAZARD m'a communiqué un énoncé équivalent et une démonstration voisine de la mienne ([21]) ; celle qui suit est un compromis entre ces deux démonstrations.

Preuve. - Soit a un point arbitraire de O ; montrons que f est une subimmersion en a. Posons $E_2 = \operatorname{Ker} f'(a)$, $F_1 = \operatorname{Im} f'(a)$, $u = f'(a)$. Soient E_1 (resp. F_2) un supplémentaire topologique de E_2 (resp. de F_1) dans E (resp. dans F). Posons

$$p_1 = p_{E_1}^{E_2}, \qquad p_2 = p_{E_2}^{E_1}, \qquad q_1 = p_{F_1}^{F_2}, \qquad q_2 = p_{F_2}^{F_1}, \qquad v = q_1 \circ u|_{E_1} .$$

L'application v est un isomorphisme linéaire de E_1 sur F_1. Pour $x \in O$, posons

$$\varphi(x) = ((v^{-1} \circ q_1 \circ f)(x), p_2(x)) .$$

Comme $\varphi'(a) = (v^{-1} \circ q_1 \circ u, p_2) = (p_1, p_2)$, l'application φ induit un C^r-isomorphisme d'un voisinage A de a dans O sur un voisinage $B_1 \times B_2$ de

$(b_1, b_2) = \varphi(a)$, où B_1 et B_2 sont des boules ouvertes de centre b_1 et b_2 dans E_1 et E_2 respectivement. Nous pouvons choisir A, B_1 et B_2 assez petits pour que $Df(x)(E) \in U_{F_2}$ (avec les notations du § 3), c'est-à-dire pour que l'image de $f'(x) = Df(x)$ reste un supplémentaire topologique de F_2 dans F pour tout x dans A. En effet, les applications $f' : O \to \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathrm{Im} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{S}(F)$ sont continues, et U_{F_2} est ouvert.

Pour $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$, posons $g(x_1, x_2) = (f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2)$. Nous avons $q_1(g(x_1, x_2)) = v(x_1)$, de sorte que, en posant $h(x_1, x_2) = q_2(g(x_1, x_2))$ pour $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$, nous pouvons écrire

$$g(x_1, x_2) = v(x_1) + h(x_1, x_2) .$$

Montrons que h ne dépend que de x_1, c'est-à-dire que, si k est le C^r-morphisme de B_1 dans F_2 défini par $k(x_1) = h(x_1, b_2)$, nous avons $h(x_1, x_2) = k(x_1)$ pour tout $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$. Puisque B_2 est convexe, il suffit de prouver pour cela que

$$Dh(x_1, x_2)(0, e_2) = 0 \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2, \quad e_2 \in E_2 .$$

Or, si $x = \varphi^{-1}(x_1, x_2) \in A$,

$$Dh(x_1, x_2)(0, e_2) = Dg(x_1, x_2)(0, e_2) \in Df(x)(E) \cap F_2 .$$

D'après le choix de A, $Df(x)(E) \cap F_2 = (0)$, ce qui établit que

$$h(x_1, x_2) = k(x_1) \qquad \text{pour } (x_1, x_2) \in B_1 \times B_2 .$$

Soient $B = q_1^{-1}(v(B_1))$, qui est ouvert dans F, et $\psi : B \to B$ le C^r-difféomorphisme défini par $\psi(y) = (q_1(y), q_2(y) - (k \circ v^{-1} \circ q_1)(y))$ pour $y \in B$, dont l'inverse est donné par $\psi^{-1}(y) = (q_1(y), q_2(y) + (k \circ v^{-1} \circ q_1)(y))$ pour $y \in B$. L'expression $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f dans les cartes $(A, \varphi, E_1 \times E_2)$ et $(B, \psi, F_1 \times F_2)$ est

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2) = (v(x_1), 0) .$$

C. Q. F. D.

Le théorème précédent peut être formulé globalement dans le cas des variétés, grâce à la remarque selon laquelle un C^r-sous-fibré d'un C^r-fibré (E, τ, X), de fibre type un espace de Banach F, associé à un fibré principal (P, π, X), de groupe structural $GL(F)$, correspond de façon canonique à une C^r-section du fibré associé $P \times_{GL(F)} \mathcal{S}(F)$.

THÉORÈME 4.4. - Soient X et Y des C^r-variétés ($r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$) modelées sur des espaces de Banach, $f : X \to Y$ un C^r-morphisme. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une subimmersion sur X, est que

$$M = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times T_x f(T_x X) \qquad \text{et} \qquad N = \bigcup_{x \in X} (T_x f)^{-1}(0)$$

soient des C^{r-1}-sous-fibrés de $f^* TY$ et TX respectivement (un morphisme vérifiant cette condition est dit direct).

Montrons que le théorème 4.3 est une généralisation du théorème du rang constant.

COROLLAIRE 4.5. - Si f est un C^r-morphisme d'un ouvert O de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dont le rang est localement constant sur O, f est une subimmersion sur O.

En effet, on voit facilement que le rang de f est localement constant sur O si, et seulement si, $x \longmapsto f'(x)$ est une application continue de O dans $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

COROLLAIRE 4.6. - Soient X et Y des C^r-variétés modelées sur des espaces de Banach ($r \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$), et soit $f : X \to Y$ un C^r-morphisme. Si en un point a de X, $T_a f$ est un monomorphisme direct (resp. un épimorphisme direct) de $T_a X$ dans $T_{f(a)} Y$, f est une immersion (resp. une submersion) en a.

Ce corollaire résulte du fait que $\{0\}$ et E sont des points isolés de $\mathcal{G}(E)$, pour tout espace de Banach E, et que par suite, la restriction de f à un voisinage U de a suffisamment petit est un morphisme direct de U dans Y. La démonstration du corollaire 4.6 à partir du théorème des fonctions inverses est d'ailleurs plus indiquée.

Le théorème 4.5 peut être utilisé pour prouver une caractérisation des sous-variétés d'une variété (admettant une gerbe) comme images de rétractions (différentiables ou analytiques). S. NADLER [27] a donné un tel résultat dans le cas des sous-variétés d'un espace euclidien ; sa démonstration, bien qu'entachée d'une légère erreur, peut servir de modèle pour établir le théorème dans le cas général, à l'aide du théorème 4.5.

THÉORÈME 4.7.

(a) Soit Y une C^r-variété banachique paracompacte ($r \geqslant 3$, $r = \infty$) munie d'une C^{r-2}-gerbe, et soit X une C^{r-1}-sous-variété fermée de Y admettant des C^{r-2}-partitions de l'unité. Il existe alors une sous-variété ouverte U de Y contenant X, et une C^{r-2}-rétraction de U sur X.

(b) Soient Y une C^r-variété banachique ($r \in \underset{\sim}{N}^* \cup \{\infty\} \cup \{\omega\}$), U une sous-variété ouverte de Y, et ρ une C^r-rétraction de U sur un sous-ensemble X de U. Alors X est une C^r-sous-variété de Y, fermée dans U.

Les hypothèses de la partie (a) sont en particulier vérifiées, si Y possède des C^{r-2}-partitions de l'unité, et si X est une C^{r-1}-sous-variété fermée de Y ; elles le sont aussi si Y est un espace de Banach, et si X est une C^{r-1}-sous-variété fermée admettant des partitions de l'unité. En fait, il existe une C^{r-2}-rétraction par déformation de U sur X.

Nous espérons donner ultérieurement quelques applications géométriques des notions introduites dans cet exposé. Terminons par des questions qui ne seront pas résolues sans le concours d'analystes.

La théorie des équations différentielles peut être menée pour les fonctions analytiques du point de vue local, soit en complexifiant et en se servant du théorème 2.11 et des théorèmes d'existence dans le cas C^1, soit en utilisant directement la méthode des majorantes. La globalisation se fait par les notions habituelles de flot ou d'application résolvante ([21]). A l'aide du théorème de Frobénius, on peut alors montrer, dans le cas analytique, qu'une structure presque-complexe intégrable sur une variété analytique réelle dérive d'une structure analytique complexe.

(Q_1) En est-il de même dans le cas C^n ($n \in \underset{\sim}{N}^*$) ou dans le cas C^∞ ?

Un énoncé correspondant au théorème de plongement de WHITNEY peut être établi pour les variétés banachiques paracompactes possédant des partitions de l'unité dans le cas différentiable.

(Q_2) Dispose-t-on pour les variétés analytiques réelles (paracompactes) d'un théorème de plongement analogue à celui de Grauert ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASTIANI (Andrée). - Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, J. Anal. math., Jérusalem, t. 13, 1964, p. 1-114.

[2] BIRKHOFF (Garrett). - Analytical groups, Trans. Amer. math. Soc., t. 43, 1938, p. 61-101.

[3] BISHOP (Errett). - Analytic functions with values in a Fréchet space, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 1177-1192.

[4] BONGART (L.). - Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas, Trans. Amer. math. Soc., t. 111, 1964, p. 317-344.

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1333 ; Bourbaki, 33).

[6] BROWDER (Felix E.). - Analyticity and partial differential equations, I, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 666-710.

[7] BROWN (Arlen) and DOUGLAS (R. G.). - On maximum theorems for analytic operator functions, Acta Scient. Math., Szeged, t. 26, 1965, p. 325-327.

[8] CARTAN (Henri). - Mathématiques 2. Notes prises pendant le cours professé à la Faculté des Sciences de Paris, 1965/66. - Paris, Secrétariat de Mathématiques 2e cycle, 1966.

[9] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Foundations of fibre bundles, Symposiun internacional de Topologia algebraica [1956. Mexico], p. 16-23. - Mexico, Universidad nacional autonoma de Mexico, 1958.

[10] CLIFFORD (A. H.) et MICHAL (A. D.). - Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstraits, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 197, 1933, p. 735-737.

[11] DOUADY (Adrien). - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 16, 1966, p. 1-95.

[12] DOUADY (Adrien). - Un espace de Banach dont le groupe linéaire n'est pas connexe, Indag. Math., t. 27, 1965, p. 787-789.

[13] FANTAPPIÉ (Luigi). - I funzionali analitici, Mem. R. Accad. naz. dei Lincei, Serie 6, t. 3, 1929, p. 453-683.

[14] FRÖLICHER (A.) and BUCHER (W.). - Calculus in vector spaces without norms. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 30).

[15] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I, J. für reine und angew. Math., t. 192, 1953, p. 35-64.

[16] GUNNING (Robert) and ROSSI (Hugo). - Analytic functions of several complex variables. - Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[17] HILLE (Einar) and PHILLIPS (Ralph S.). - Functional analysis and semi-groups. - Providence, American mathematical Society, 1957 (American mathematical Society Colloquium Publications, 31).

[18] HOCHSCHILD (G.). - La structure des groupes de Lie. - Paris, Dunod, 1968.

[19] KOBAYASHI (Shoshichi) and NOMIZU (Katsumi). - Foundations of differential geometry, I. - New York, Interscience Publishers, 1963 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 15).

[20] LANG (Serge). - Introduction aux variétés différentiables. - Paris, Dunod, 1967.

[21] LAZARD (M.). - Leçons de calcul différentiel et intégral (à paraître).

[22] MARINESCU (G.). - Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions. - Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963 (Hochschulbücher für Mathematik, 59).

[23] MARTIN (R. S.) and MICHAL (A. D.). - Some expansions in vector spaces, J. Math. pures et appl., t. 13, 1934, p. 69-91.

[24] MASSERA (José Luis) and SCHÄFFER (Juan Jorge). - Linear differential equations and functions spaces. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 21).

[25] MICHAL (Aristotle D.). - Le calcul différentiel dans les espaces de Banach. Vol. 1. - Paris, Gauthier-Villars, 1958.

[26] MIGNOT (Fulbert). - Espaces analytiques banachiques, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 6, 1966/67, n° 4, 12 p.

[27] NADLER (Sam B., Jr). - A caracterization of the differentiable submanifolds of $\mathbb{R}^n$, Proc. Amer. math. Soc., t. 17, 1966, p. 1350-1352.

[28] PALAIS (Richard S.). - Morse theory on Hilbert manifolds, Topology, t. 2, 1963, p. 299-340.

[29] PALAIS (Richard S.). - Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds, Topology, t. 5, 1966, p. 115-132.

[30] RAMIS (Jean-Pierre). - Les théorèmes de Weierstrass pour les anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur un espace vectoriel normé, Séminaire Lelong : Analyse, t. 7, 1966/67, n° 2, 16 p.

[31] SEBASTIÃO E SILVA (J.). - As funções analíticas e análise funcional, Portug. Math., t. 9, 1950, p. 1-130.

[32] SERRE (Jean-Pierre). - Lie algebras and Lie groups. - New York, Benjamin, 1965 (Lectures given at Harvard University).

[33] TAYLOR (A. E.). - On the properties of analytic functions in abstract spaces, Math. Annalen, t. 115, 1938, p. 466-484.

[34] THORP (Edward) and WHITLEY (Robert). - The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space, Proc. Amer. math. Soc., t. 18, 1967, p. 640-646.

[35] VAN EST (W. T.) and KORTHAGEN (Th. J.). - Non-enlargible Lie algebras, Proc. Koninkl. nederl. Akad. Wetensch, Series A, t. 67, 1964, p. 15-31.

[36] WHITTLESEY (E. F.). - Analytic functions in Banach spaces, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 1077-1083.