Marc Rogalski

Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, n° 2 (1965-1966), exp. n° 12, p. 1-62
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_2_A5_0>

ESPACES DE BANACH ORDONNÉS, SIMPLEXES, FRONTIÈRES DE ŠILOV ET PROBLÈME DE DIRICHLET

par Marc ROGALSKI

Introduction. - Soit X un espace compact. Si H est un sous-espace de $C(X)$, séparant les points de X, on sait ([1], [2], [11]) qu'il existe un plus petit fermé $S(H)$ de X, sur lequel toutes les fonctions de H prennent leur maximum. $S(H)$ s'appelle la frontière de Šilov de H. Le problème de Dirichlet, posé par H. BAUER, est de reconnaitre la nature, dans $C[S(H)]$, de l'espace H_0 des restrictions à $S(H)$ des fonctions de H, et en particulier de caractériser les espaces H tels que l'espace H_0 soit d'un type remarquable donné.

Le cas où $H_0 = C[S(H)]$ a été étudié par BAUER ([1], [2]). Nous donnerons une démonstration nouvelle de son résultat au § 5.

Pour aborder un cas plus général que celui de BAUER, nous serons amenés en fait à changer de frontière, et à utiliser, non plus la frontière de Šilov de H, mais celle de H^+ ([1], [24]). Dans un premier temps, nous supposerons H réticulé. Puis nous supposerons seulement que le dual H' de H est réticulé (H sera un "simplex" au sens d'EFFROS), et nous étudierons l'espace des restrictions des fonctions de H à $S(H^+)$.

L'instrument de l'étude sera, dans le premier cas, une caractérisation d'une certaine classe de Banach ordonnés comme espaces de fonctions continues sur un compact de leur dual. Les théorèmes obtenus préciseront des théorèmes de KAKUTANI ([20], [21], [32]), et leurs démonstrations s'appuieront essentiellement sur le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET ([4], [9], [11], [30]). Ce sera l'objet des paragraphes 2, 3 et 9. Dans le cas où H est réticulé, ce sont ces théorèmes de KAKUTANI que nous appliquerons à H, en plongeant, selon une méthode due à G. CHOQUET, X dans le dual H' de H. Ce sera l'objet des paragraphes 5, 7 et 8.

Dans le cas où H' est réticulé, nous utiliserons, au § 10, des résultats d'EDWARDS, d'EFFROS et de KADISON ([13], [14], [15], [19]), que nous démontrerons au § 9, et qui marquent un progrès notable (et récent) dans l'étude des espaces de Banach ordonnés et des simplexes.

Une technique particulière, due à G. CHOQUET [9], sera utilisée au § 6 pour étudier le cas des espaces H vérifiant une condition de séparation linéaire (introduite par G. MOKOBODZKI [28]).

Nous commencerons, au § 1, par rappeler les notions fondamentales sur les frontières.

Enfin, au § 11, nous donnerons quelques applications de nos résultats à la théorie du Potentiel.

1. Frontière de Choquet et frontière de Šilov d'un espace de fonctions continues.

Soient X un espace compact, et H un sous-espace de $C(X)$.

On dit qu'un fermé F de X est maximisant si :

$$\forall\ f \in H : \sup_F f = \sup_X f \quad .$$

Il est facile de voir que l'ensemble des fermés maximisants est inductif vers le bas pour l'inclusion, et possède donc des éléments minimaux.

DÉFINITION 1. - Si cet ensemble possède un élément minimum, on le nomme la frontière de Šilov de H : $S(H)$.

DÉFINITION 2. - Soit $M_1^+(X)$ l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur X. Nous définissons une relation d'équivalence R_H sur $M_1^+(X)$ par :

$$\mu \sim \nu \iff \forall\ f \in H\ ,\ \mu(f) = \nu(f) \quad .$$

Nous noterons $\mathfrak{M}_H(\mu)$ la classe d'équivalence d'une mesure μ .

On appelle frontière de Choquet de H , l'ensemble

$$E(H) = \left\{x \in X \mid \mathfrak{M}_H(\delta_x) = \{\delta_x\}\right\} \quad .$$

THÉORÈME 1.

(a) Si H sépare les points de X (nous dirons que H est séparant), la frontière de Šilov existe, et l'on a

$$S(H) = \overline{E(H)} \quad ;$$

(b) Toute fonction de H atteint son maximum sur $E(H)$;

(c) Si H' est le dual de H muni de la norme uniforme, l'application

$$\varphi : X \longrightarrow H' : x \longmapsto \delta_x \quad ,$$

est, si on munit H' de $\sigma(H', H)$, un homéomorphisme de X sur son image $\varphi(X)$, et si Y est l'enveloppe convexe fermée de $\varphi(X)$, Y est compacte, et

$$\mathcal{E}(Y) = \varphi[E(H)] \subset \varphi(X)$$

<u>où</u> $\mathcal{E}(Y)$ <u>désigne l'ensemble des points extrémaux de</u> Y .

L'assertion (c) démontre en fait (a) et (b) de la manière suivante :

Toute forme linéaire continue sur H' , c'est-à-dire tout élément f de H , atteint son maximum sur $\mathcal{E}(Y)$. Donc $\overline{E(H)} \supset S(H)$. D'autre part, si $a \in \mathcal{E}(Y)$, $a \in F$ pour tout fermé maximisant F , sinon $\complement_Y F$ est un voisinage de a dans Y , et puisque a est extrémal, $\exists\, f \in H$ qui ne prend pas son maximum sur F . D'où :

$$S(H) = \overline{E(H)} \quad .$$

D'autre part, il est clair que $\mathcal{E}(Y) = \varphi[E(H)]$, car les points a de Y non extrémaux sont ceux qui sont barycentre d'une mesure positive de masse 1 portée par $\varphi(X)$, et différente de δ_a (cf. [11]).

C. Q. F. D.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $r_H : C(X) \longrightarrow C[S(H)]$ <u>l'application restriction</u>. <u>Alors</u>, <u>si</u> $f \in H$:

$$\|f\|_\infty = \|r_H(f)\|_\infty$$

(r_H est donc <u>injective</u> sur H) et

$$f \geqslant 0 \iff r_H(f) \geqslant 0 \quad .$$

DÉFINITION 3. - <u>Les fonctions de</u> $C[S(H)]$ <u>qui appartiennent à</u> $r_H(H)$, <u>sont dites</u> H-<u>résolutives</u>.

LEMME 2. - <u>Les relations d'équivalence</u> R_H <u>et</u> $R_{\overline{H}}$ (où $\overline{H}$ est l'adhérence de H dans $C(X)$ muni de la norme uniforme) <u>sont les mêmes</u>, <u>et on ne change donc ni les ensembles</u> $\mathfrak{M}_H(\mu)$, <u>ni la frontière de Choquet</u>, <u>ni celle de Šilov</u>, <u>en remplaçant</u> H <u>par</u> $\overline{H}$.

DÉFINITION 4. - <u>Soit</u> D_H <u>l'ensemble des sous-espaces</u> V <u>de</u> $C(X)$ <u>vérifiant</u> :

(a) V <u>est fermé</u> ;

(b) $V \supset H$;

(c) $S(V) = S(H)$.

LEMME 3. - D_H , <u>ordonné par l'inclusion</u>, <u>possède un plus petit élément</u> $\overline{H}$, <u>et est inductif vers le haut</u>. <u>Il possède donc des éléments maximaux</u>.

DÉFINITION 5. - <u>Nous appellerons problème de Dirichlet abstrait, pour un espace</u> $V \in D_H$, <u>le problème de caractériser le sous-espace</u> $r_H(V)$ <u>de</u> $C[S(H)]$. <u>Nous appellerons problème de Dirichlet généralisé pour</u> H , <u>la recherche des éléments maximaux de</u> D_H .

<u>Remarque</u> 1. - D_H peut posséder plusieurs éléments maximaux distincts.

<u>Exemple</u> : On prend pour X un carré de $\mathbb{R}^2$, et pour H l'espace des fonctions affines sur X . D_H possède une infinité d'éléments maximaux.

PROPOSITION 1. - <u>S'il existe dans</u> D_H <u>un espace</u> V_0 <u>tel que</u>

$$r_H(V_0) = C[S(H)] \quad ,$$

<u>alors</u> V_0 <u>est le maximum de</u> D_H .

En effet, r_H est une bijection de V sur $r_H(V)$, $\forall\ V \in D_H$, d'après le lemme 1.

<u>Remarque</u> 2. - La réciproque est fausse : si H est tel que D_H possède plusieurs éléments maximaux, soit H_0 un tel élément. $r_H(H_0) = r_{H_0}(H_0) \neq C[S(H_0)]$. Pourtant H_0 est maximum dans D_{H_0} qui est réduit à $\{H_0\}$.

Nous verrons au § 5 un théorème de BAUER, qui donne un certain nombre de conditions équivalentes suffisantes pour que V , dans D_H , soit maximum.

Nous allons d'abord rappeler l'énoncé du théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET ([4], [9], [11], [30]), et en donner une application importante pour notre propos.

2. Le théorème de représentation intégrale de G. CHOQUET.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> K <u>un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé</u> E . <u>On définit sur</u> $M^+(K)$ (mesures positives), <u>un ordre par</u>:

$$\mu < \nu \iff \mu(f) \leq \nu(f) \quad ,$$

$\forall\ f \in S$, <u>cône des fonctions convexes continues sur</u> K .

<u>D'autre part</u>, $\forall\ f$ <u>bornée sur</u> K , <u>on pose</u>

$$\hat{f} = \inf_{\substack{g \in -S \\ g \geq f}} g \qquad (\ \hat{f} \text{ est semi-continue supérieurement (s. c. s.)}).$$

<u>Alors</u> :

(a) Tout point a de K est barycentre d'une mesure de $M_1^+(K)$ maximale pour l'ordre précédent.

$$\mu \text{ maximale } \Longleftrightarrow \mu(f) = \mu(\hat{f}) \ , \quad \forall f \in S \ .$$

Toute mesure maximale est portée par $\overline{\mathcal{E}(K)}$, et toute mesure portée par $\mathcal{E}(K)$ est maximale.

(b) On dit que K est un simplexe si tout $a \in K$ est barycentre d'une seule mesure maximale, μ_a. Alors l'application $a \longrightarrow \mu_a : K \longrightarrow M_1^+(K)$ est scalairement de 1re classe.

$$K \text{ est un simplexe } \Longleftrightarrow \forall f \in S \ , \ \hat{f} \text{ est affine.}$$

(c) Si K est métrisable, $\mathcal{E}(K)$ est un G_δ de K (intersection dénombrable d'ouverts de K), et l'on a :

$$\mu \text{ maximale } \Longleftrightarrow \mu \text{ portée par } \mathcal{E}(K) \ .$$

Pour ce théorème, se reporter à [4], [5], [9], [11], [30].

Nous allons maintenant énoncer un théorème de représentation (comme espaces de mesures) d'une classe d'espaces localement convexes séparés réticulés (cf. [4], [32]).

DÉFINITION 6. - Dans un espace vectoriel topologique séparé E, un chapeau d'un cône convexe P est un convexe compact de P, dont le complémentaire dans P est convexe. Le cône P est dit bien coiffé s'il est réunion de ses chapeaux. Un chapeau est universel s'il engendre le cône.

Si K est un chapeau du cône P, on appelle col de K l'ensemble

$$L(K) = \{x \neq 0 \mid x \in K \text{ et } \forall \lambda > 1 \ , \ \lambda x \notin K\} \ .$$

LEMME 4. - Dans un espace vectoriel localement convexe séparé E, un cône P convexe bien coiffé possède des génératrices extrémales. Si P est fermé, il est l'enveloppe convexe fermée de la réunion $\mathcal{E}(P)$ de ses génératrices extrémales.

(La méthode pour étudier un chapeau consiste à couper par des sous-espaces vectoriels de dimension 2, et à étudier les chapeaux des cônes de $\underset{\sim}{R}^2$. Cf. [4], [9].)

DÉFINITION 7. - Soit E un espace localement convexe séparé, ordonné par un cône E^+. Si E^+ possède un chapeau universel K (fixé dans la suite), nous appellerons co-spectre de E, l'ensemble

$$Z = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}$$

$$Z = L(K) \cap \mathcal{E}(E^+) \quad .$$

LEMME 5.

(a) Soit E un espace vérifiant les hypothèses de la définition 7. Si

$$\Gamma = K \cap \mathcal{E}(E^+)$$

est fermé, $L(K)$ est un G_δ de K, $\mathcal{E}(K)$ et Z sont des boréliens de K.

(b) La fonction affine sur E^+ : λ_K définie par

$$L(K) = \{x \in E^+ \mid \lambda_K(x) = 1\}$$

est semi-continue inférieurement sur E^+.

En effet, $L(K) = \bigcap_{n \geq 1} \complement_K (1 - \frac{1}{n})K$; $Z = L(K) \cap \Gamma$; $\mathcal{E}(K) = Z \cup \{0\}$. Enfin $\lambda_K^{-1}(]-\infty\ , a]) = aK$ fermé.

C. Q. F. D.

LEMME 6. - Si E ordonné par E^+ est réticulé, K est un simplexe ; cela résulte de la caractérisation des simplexes (cf. [9] ou [11]).

THÉORÈME 3. - Soit E un espace localement convexe séparé réticulé, vérifiant :

(a) E^+ possède un chapeau universel K ;

(b) $\Gamma = K \cap \mathcal{E}(E^+)$ est fermé.

Alors :

1° Les mesures positives de masse 1 sur K, maximales au sens de G. CHOQUET, sont les mesures de $M_1^+(K)$ portées par $\mathcal{E}(K)$.

2° E est isomorphe, en tant qu'espace vectoriel réticulé, à l'espace $M_Z(\overline{Z})$ des mesures sur le compact $\overline{Z}$, portées par Z (Z est le co-spectre de E) ; de plus, si $x \in E$, on a :

$$\lambda_K(|x|) = \|\mu_x\|$$

où μ_x est la mesure associée à x.

Ce théorème est une application facile du théorème 2 et des lemmes qui précèdent. On en trouvera une démonstration dans [32].

Nous allons préciser un peu la structure possible du chapeau K de E^+.

PROPOSITION 2. - *Soit* E *un espace localement convexe séparé réticulé, vérifiant*

(a) E^+ *possède un chapeau universel* K ;

(b) $\Gamma = K \cap \mathcal{E}(E^+)$ *est fermé.*

Considérons les propriétés suivantes :

(1) $L(K)$ *est une base compacte de* E^+ ;

(2) $L(K)$ *est fermé* ;

(3) Z *est fermé* ;

(4) $0 \notin \overline{Z}$;

(5) $\inf\limits_{x \in \overline{Z}} \lambda_K(x) > 0$;

(6) $0 \notin \overline{L(K)}$;

(7) E^+ *a une base compacte* ;

(8) $\exists\, f \in E'$ *telle que* $f > 0$ *sur* $\overline{Z}$;

(9) $K \neq \overline{L(K)}$.

Alors on a les implications suivantes :

$$(1) \Longrightarrow \begin{array}{c}(2)\\ \Updownarrow\\ (3)\end{array} \Longrightarrow (4) \begin{array}{ccccc} \nearrow & (5) & \Longrightarrow & (6) & \searrow \\ \nwarrow & (9) & \Longleftarrow & (8) & \swarrow \end{array} (7) .$$

Démonstration.

(α) (1) $\Longrightarrow$ (2) est clair.

(2) $\Longrightarrow$ (3) résulte de l'hypothèse (b).

(3) $\Longrightarrow$ (2) : Soit $x \in \overline{L(K)}$. $\overline{L(K)}$ est l'enveloppe convexe fermée de Z. Soit μ une mesure $\geqslant 0$ de masse 1 , portée par $\overline{Z} = Z$, de résultante x .

λ_K étant affine et s. c. i. sur K , on a

$$\mu(\lambda_K) = \lambda_K(x) \qquad \text{(cf. [11]).}$$

Or $\lambda_K = 1$ sur Z . Donc $\mu(\lambda_K) = 1$, et $\lambda_K(x) = 1$. Donc

$$x \in L(K) = \{x \in E^+ \mid \lambda_K(x) = 1\} \quad .$$

Donc $L(K) = \overline{L(K)}$.

(β) (3) $\Longrightarrow$ (4) est clair.

(γ) (4) $\Longrightarrow$ (5) . $\lambda_K(x) = 0 \iff x = 0$ si $x \in E^+$. Donc, puisque $\overline{Z}$ est compact, $\inf\limits_{\overline{Z}} \lambda_K$ est atteint, donc non nul si $0 \notin \overline{Z}$.

(5) $\Longrightarrow$ (6) . Soit $x \in \overline{L(K)}$. x est barycentre d'une mesure $\mu \geqslant 0$ de

masse 1 portée par $\overline{Z}$. Soit $m = \inf_{\overline{Z}} \lambda_K > 0$.

$$\lambda_K(x) = \mu(\lambda_K) \geqslant \mu(m) = m > 0 \quad .$$

Donc $\lambda_K(x) > 0$, et $x \neq 0$. Donc $0 \notin \overline{L(K)}$.

(6) $\Longrightarrow$ (7) . $\overline{L(K)}$ est un convexe fermé qui ne contient pas 0 . Soit H un hyperplan fermé séparant strictement 0 et $\overline{L(K)}$. $H \cap K$ est une base compacte de E^+ .

(7) $\Longrightarrow$ (8) . Soit $f \in E'$ telle que $\{x \mid f(x) = 1\} \cap E^+$ soit une base compacte D de E^+ . Pour prouver (8), il suffit de montrer qu'il existe $a > 0$ tel que f soit $\geqslant a$ sur $L(K)$. Or

$f \geqslant a > 0$ sur $L(K)$ $\Longleftrightarrow$ $f \geqslant a > 0$ sur $\{x \mid \lambda_K(x) = 1\}$

$\Longleftrightarrow$ λ_K est bornée supérieurement sur D .

Ce dernier point résulte du lemme 7 que nous démontrerons plus loin : toute fonction affine s. c. i. sur un compact convexe d'un espace localement convexe séparé est bornée.

(8) $\Longrightarrow$ (9) . Si $f \geqslant a > 0$ sur $\overline{Z}$, $f \geqslant a > 0$ sur $\overline{L(K)}$ qui est l'enveloppe convexe fermée de Z , donc $0 \notin \overline{L(K)}$, donc $K \neq \overline{L(K)}$.

(9) $\Longrightarrow$ (4) . Soit $x \in K \setminus \overline{L(K)}$. Si $x = 0$, $0 \notin \overline{L(K)}$, donc $0 \notin \overline{Z}$. Si $x \neq 0$, la génératrice de x coupe $\overline{L(K)}$ suivant un segment fermé qui ne contient pas x , donc qui ne contient pas 0 . Donc $0 \notin \overline{L(K)}$, donc $0 \notin \overline{Z}$.

C. Q. F. D.

LEMME 7. - <u>Toute fonction affine s. c. i.</u> f <u>sur un convexe compact</u> X <u>d'un espace</u> E <u>localement convexe séparé est bornée</u>.

Supposons f non bornée. $\forall\, n$, $\exists\, x_n \in X$ telle que $f(x_n) > 2^n$. Si

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} , \qquad x \in X \quad ,$$

et est barycentre de la mesure

$$\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \delta_{x_n} \quad .$$

$\mu(f) = f(x)$. Or $f(x) < \infty$, et $\mu(f) = +\infty$. D'où une contradiction.

C. Q. F. D.

Remarque 3. - L'implication (4) $\Longrightarrow$ (3) est fausse en général.

Exemple :

$F = \{f \in C([0\ ,\ 1]) \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} f(1)\}$, muni de la norme uniforme.

E = le dual F' de F , muni de $\sigma(F'\ ,\ F)$. $E^+ = F'^+ = -(E^+)^0$.

$K = \{\ell \in E^+ \mid \|\ell\| \leqslant 1\}$.

$Z \xrightarrow{\sim} [0\ ,\ \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}\ ,\ 1]$.

$\overline{Z} \xrightarrow{\sim} [0\ ,\ 1]$ (l'isomorphisme est l'application $\varphi : x \longrightarrow \delta_x$).

Remarque 4. - G. CHOQUET a montré le résultat du lemme 7 pour une fonction affine borélienne.

Remarque 5. - Nous verrons plus loin (§ 9) que, lorsque E est un dual de Banach, l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est vraie. Dans le cas général, il faudrait des précisions supplémentaires sur la topologie de E .

PROPOSITION 3. - Sous les hypothèses du théorème 3, supposons de plus que $\mathcal{E}(K)$ soit fermé. Alors deux cas seulement sont possibles :

1° $Z = \overline{Z}$, et $E \xrightarrow{\sim} M(Z)$;

2° $\overline{Z} = Z \cup \{0\}$, et $E \xrightarrow{\sim} M_0(Z)$, espace des mesures bornées sur l'espace localement compact non compact Z .

C'est évident.

Nous allons maintenant appliquer ce qui précède au cas où E est le dual d'un espace de Banach réticulé. Nous en tirerons, par dualité, la représentation de tels espaces comme espaces de fonctions continues sur un compact.

3. La représentation fonctionnelle des espaces de Kakutani.

DÉFINITION 8. - On appelle M-espace de Kakutani, un espace de Banach E réticulé, vérifiant :

(NC) La norme est croissante sur E^+ ;

(V) $\||x|\| = \|x\|$, $\forall\, x \in E$;

(F) $B^+ = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\} \cap E^+$ est filtrante croissante.

On dit que E possède un élément unité si B^+ possède un plus grand élément e . (F) est alors automatiquement vérifiée.

Exemples : $C(X)$, pour X compact ; $C_0(X)$, pour X localement compact non compact ; l'espace F de la remarque 3 ; $L^\infty(X , \mu)$, μ mesure $\geqslant 0$ sur X ; $C^K([0 , 1])$ pour l'ordre $f^{(P)} \geqslant 0$ et la norme

$$\|f\| = |f(0)| + \dots + |f^{(K-1)}(0)| + \|f^{(K)}\|_\infty \quad .$$

DÉFINITION 9. - On appelle L-espace de Kakutani, un espace de Banach E réticulé, vérifiant :

(A) La norme est additive sur E^+ ;
(V) $\| |x| \| = \|x\|$, $\forall\ x \in E$.

Exemples : $L^1(X , \mu)$, μ mesure $\geqslant 0$ sur X ; $M(X)$, pour X compact ; $M_0(X)$, X localement compact non compact ; l'espace $E = F'$ de la remarque 3 ; l'espace $M([0 , 1]) \times \mathbb{R}^K$.

LEMME 8. - Si E est un M-espace de Kakutani, E' est, pour la norme et l'ordre duaux, un L-espace de Kakutani.

C'est très facile ; la propriété (A) pour E' résulte de la propriété (F) pour E et de la relation :

$$\forall\ \ell \in E'^+ \ , \quad \|\ell\| = \sup_{x \in B^+} \ell(x) = \lim_{B^+} \ell(x) \quad .$$

PROPOSITION 4. - Soit E un M-espace de Kakutani. L'espace E' , muni de la topologie $\sigma(E' , E)$ et de l'ordre dual, vérifie les hypothèses (a) et (b) du théorème 3, et donc ses conclusions, pour $K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leqslant 1\}$. La fonction λ_K n'est autre que la restriction à E'^+ de la norme de E' .

Si E possède un élément unité e , $L(K)$ est une base compacte de E'^+ :

$$L(K) = \{\ell \mid \langle \ell , e \rangle = 1\} \cap E'^+ \quad .$$

Le co-spectre Z de E' s'appellera le spectre de E . Donc $E' \xrightarrow{\sim} M_Z(\overline{Z})$ pour l'ordre, et c'est une isométrie pour les normes. Si E a un élément unité, Z est compact, et $E' \xrightarrow{\sim} M(Z)$.

La démonstration est très facile, et repose sur le lemme 9, que l'on trouvera par exemple dans [23], et qui prouve que $\mathcal{E}(E'^+)$ est $\sigma(E' , E)$-fermé (bien entendu, on utilise la théorie des espaces réticulés telle qu'elle figure, par exemple, dans [5], [23]).

LEMME 9. - Si E est un espace vectoriel réticulé, il est équivalent de dire que $\ell \in E^*$ (dual algébrique) est un homomorphisme d'espaces réticulés de E dans $\mathbb{R}$ ou que $\ell \in \mathcal{E}(E^{*+})$.

Rappelons qu'un espace ordonné E vérifie le Lemme de décomposition de Riesz si, pour toutes les familles finies $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in I}$ de points de E, telles que $x_i \leqslant y_j$, il existe $z \in E$ tel que, $\forall\, i\,,\, j\,,\ x_i \leqslant z \leqslant y_j$.

Tout espace réticulé vérifie le lemme de Riesz. La réciproque est fausse.

Nous allons déduire de la proposition 4 deux théorèmes de Kakutani, qu'on trouvera dans [20], [23], [32].

THÉORÈME 4 (1er théorème de Kakutani). - Soit E un M-espace de Kakutani à élément unité, et soit Z son spectre (fermé, ainsi que $L(K)$).

Alors l'application $\gamma : E \longrightarrow C(Z)$ définie par

$$\gamma(x)(\ell) = \ell(x)$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach réticulés, qui est une isométrie.

En effet, $E \xrightarrow{\subset} C(Z)$, et $E' \xrightarrow{\sim} M(Z) = C(Z)' \implies E \xrightarrow{\sim} C(Z)$. L'isométrie résulte de ce que tout élément de E prend son maximum sur K en un point de Z.

C. Q. F. D.

Pour énoncer le deuxième théorème de Kakutani, introduisons une certaine classe d'espaces de fonctions continues.

Soient B un espace compact, et $\lambda : B \longrightarrow [0\,,\,1]$, semi-continue inférieurement, nulle en au plus un point (noté a s'il existe). On suppose que $Z = \lambda^{-1}(\{1\})$, G_δ de B est dense dans B. On suppose de plus qu'on s'est donné une application $u : B \setminus Z \longrightarrow Z$, borélienne ($u : B \setminus Z \cup \{a\} \longrightarrow Z$ si $\lambda(a) = 0$).

DÉFINITION 10. - On dit que le sous-espace de $C(B)$:

$$\{f \mid \forall\, y \in B \setminus Z\,,\ f(y) = \lambda(y)\, f[u(y)] \ \ (\text{et } f(a) = 0 \text{ si } \lambda(a) = 0)\}$$

est un espace K-canonique s'il sépare les points de B. On le note alors

$$C_Z(B\,,\,\lambda\,,\,u)\ .$$

C'est un sous-espace réticulé fermé de $C(B)$. On dit que c'est un espace K-canonique fort, s'il vérifie de plus une condition de séparation forte :

$$\forall\, x \in Z\,,\ \exists\, f \in C_Z(B\,,\,\lambda\,,\,u) \text{ telle que } 0 \leqslant f \leqslant 1 \text{ et } f(x) = 1\ .$$

Il est clair que, pour la norme uniforme, un espace K-canonique est un M-espace de Kakutani, qui n'a un élément unité que si c'est $C(X)$ tout entier $(\lambda \equiv 1)$.

KAKUTANI a montré la réciproque, que nous renforçons ici :

THÉORÈME 5 (2e théorème de Kakutani). - <u>Soit</u> E <u>un</u> M-<u>espace de Kakutani</u>, <u>et soit</u> Z <u>son spectre</u>. <u>Alors l'application</u> $\gamma : E \longrightarrow C(\overline{Z})$ <u>définie par</u>

$$\gamma(x)(\ell) = \ell(x)$$

<u>est un isomorphisme de</u> E <u>sur l'espace</u> K-<u>canonique fort</u>

$$C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda_K\ ,\ u)$$

<u>qui transporte l'ordre et est une isométrie</u>.

(λ_K est la fonction introduite au lemme 5, et u est définie, pour $x \neq 0$, par $u(x) = \dfrac{x}{\lambda_K(x)} : E^+ \setminus \{0\} \longrightarrow L(K)$.)

<u>Si</u> Z <u>est fermé</u>, <u>alors</u> $E \xrightarrow{\sim} C(Z)$, <u>et l'élément</u> e <u>de</u> E , <u>qui correspond à la fonction</u> 1 , <u>est un élément unité de</u> E (donc $L(K) = \{\ell \mid \langle \ell\ ,\ e\rangle = 1\} \cap E'^+$ est une base compacte de E'^+).

On sait, d'après la proposition 4, que $E' \xrightarrow{\sim} M_Z(\overline{Z})$. On montre que le dual de $C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda_K\ ,\ u)$ est, ici, $M_Z(\overline{Z})$ (en "relevant", par les applications λ_K et u , tout élément de ce dual en une mesure portée par Z : cf. démonstration du théorème 17). Il résultera du théorème 13 et du corollaire 2 du théorème 14 que l'espace K-canonique $C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda_K\ ,\ u)$ est <u>fort</u> ([1]), c'est-à-dire que par tout point de Z , il passe un hyperplan d'appui de K pour $\sigma(E'\ ,\ E)$.

<u>Remarque</u> 6. - Si E est séparable, et donc K métrisable, il résulte des travaux de BOBOC et CORNEA [3] et de ceux de DAVIES [12] qu'on a même mieux :

$$\forall\ x \in Z\ ,\quad \exists\ f \in C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda_K\ ,\ u) \text{ telle que } f(x) = 1 \text{ et } 0 \leqslant f < 1 \text{ sur } \overline{Z} \setminus \{x\}\ .$$

On ignore si, étant donné un espace K-canonique "abstrait" $C_Z(B\ ,\ \lambda\ ,\ u)$, son dual est $M_Z(B)$, et si la construction du théorème 5 redonne B , Z , λ et u . Par contre, la réponse est affirmative, si $C_Z(B\ ,\ \lambda\ ,\ u)$ est <u>fort</u>.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> $E = C_Z(B\ ,\ \lambda\ ,\ u)$ <u>un espace</u> K-<u>canonique fort</u>. <u>Alors l'application</u>

$$\psi : M_Z(B) \longrightarrow E'$$

<u>définie par</u>

([1]) Dans l'article [32], ce résultat est affirmé sans démonstration.

$$\psi(\mu)(f) = \mu(f) \qquad \text{(restriction)}$$

est une isométrie d'espaces de Banach réticulés. De plus, la construction du théorème 5 redonne B , Z , λ et u .

La démonstration se trouve dans [32] ; elle est assez délicate.

Nous allons appliquer ces théorèmes à des espaces de fonctions continues sur un compact. Pour illustrer la méthode que nous suivrons, nous allons commencer par redémontrer directement un théorème de H. BAUER sur les simplexes.

4. Les simplexes de Bauer.

DÉFINITION 11. - Un convexe compact X d'un espace localement convexe séparé E est dit simplexe de Bauer si c'est un simplexe dont l'ensemble $\mathcal{E}(X)$ des points extrémaux est fermé.

Un point extrémal x de X est dit régulier s'il passe par x un hyperplan d'appui de X . X est dit régulier si tous ses points extrémaux sont réguliers.

THÉORÈME 6 (BAUER). - Soit X un convexe compact d'un espace localement convexe séparé E , et soit H l'espace des fonctions affines continues sur X .

1° Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) X est un simplexe de Bauer ;

(b) X est un simplexe, et l'application $x \longrightarrow \mu_x$ (mesure maximale de barycentre x) est continue de X dans $M(X)$ muni de la topologie vague ;

(c) $\forall\, x \in X$, il existe une mesure $\geqslant 0$ de masse 1 , ν_x , unique, portée par $\overline{\mathcal{E}(X)}$, de barycentre x ;

(d) H est réticulé pour l'ordre défini par $H^+ = \{f \in H \mid f(x) \geqslant 0 \ , \ \forall\, x \in X\}$;

(e) Toute fonction de $C[\mathcal{E}(X)]$ peut être prolongée en une fonction de H .

2° Si H est muni de la norme uniforme, le convexe compact de H' muni de $\sigma(H', H)$, image de X par l'application $\varphi : X \longrightarrow H' : x \longrightarrow \delta_x$, est régulier dans H' .

Démonstration.

1° (a) $\Longrightarrow$ (c) est bien clair.

(c) $\Longrightarrow$ (b) . $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mu_x$ maximale de barycentre x . Or μ_x est portée par $\overline{\mathcal{E}(X)}$. Donc $\mu_x = \nu_x$, et μ_x est unique. Donc X est un simplexe.

L'application $x \longrightarrow \mu_x : X \longrightarrow M_1^+[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ est bijective, et sa réciproque est continue (car, sur X , la topologie de E coïncide avec $\sigma(E , E')$). Donc $x \longrightarrow \mu_x$ est continue.

(b) $\Longrightarrow$ (e) . Soit $f \in C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$. Soit $x \in X$. Posons $\tilde{f}(x) = \mu_x(f)$, où μ_x est la mesure maximale de barycentre x , portée par $\overline{\mathcal{E}(X)}$. $\tilde{f} \in H$, car $x \longrightarrow \mu_x$ est continue, et $\tilde{f}$ prolonge f .

(e) $\Longrightarrow$ (d) . Soit $r_H : H \longrightarrow C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ l'application restriction. Si $f \in H$, $f \geqslant 0 \Longrightarrow r_H(f) \geqslant 0$. r est surjective d'après (e). Or $\sup\limits_X f = \sup\limits_{\overline{\mathcal{E}(X)}} f$ car $F = \{x \in X \mid f(x) = \sup\limits_X f\}$ est une face de X , donc $F \cap \mathcal{E}(X) \neq \emptyset$. Donc r est injective, et $f \geqslant 0 \Longleftrightarrow r_H(f) \geqslant 0$. Donc l'ordre de H est celui de $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$, qui est réticulé.

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Si on munit H de la norme uniforme, H est un M-espace de Kakutani avec la fonction 1 comme élément unité. Donc $H \xrightarrow{\sim} C(Z)$ où $Z = \mathcal{E}[L(K)]$, car $L(K)$ est fermé, et est une base compacte de H'^+ :

$$L(K) = \{\ell \in H'^+ \mid \|\ell\| = 1\} .$$

Soit $\varphi : X \longrightarrow H' : x \longrightarrow \delta_x$. X est homéomorphe à son image $\varphi(X)$, convexe compact pour $\sigma(H' , H)$, inclus dans $L(K)$. Mais, si $f \in H$,

$$f \geqslant 0 \text{ sur } \varphi(X) \Longleftrightarrow f \geqslant 0 \text{ sur } Z \Longleftrightarrow f \geqslant 0 \text{ sur } L(K) .$$

Donc, d'après HAHN-BANACH, $\varphi(X) = L(K)$.

$X \xrightarrow{\sim} \varphi(X) = L(K)$ qui est un simplexe de Bauer (H'^+ réticulé, et Z fermé). Donc X est un simplexe de Bauer, et $Z = \varphi[\overline{\mathcal{E}(X)}]$.

2° De plus, $L(K) = \varphi(X)$ est régulier dans H' : si $x \in Z$, $\exists\, f$ continue sur Z , telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(x) = 1$. f se prolonge en $\tilde{f} \in H^+$, et $\|\tilde{f}\| = 1$. Donc l'hyperplan $\{x \mid \tilde{f}(x) = 1\}$ est un hyperplan d'appui de $\varphi(X)$ qui passe par x .

C. Q. F. D.

Remarque 7. - Nous avons en fait démontré que la frontière de Choquet de l'espace H des fonctions affines continues sur un convexe compact X d'un espace localement convexe séparé E , est $\mathcal{E}(X)$, et prouvé l'équivalence :

H réticulé $\Longleftrightarrow$ toutes les fonctions de $C[\overline{\mathcal{E}(X)}]$ sont H-résolutives

$\Longleftrightarrow$ X simplexe de Bauer.

Nous utiliserons la même méthode au § 5 pour un espace de fonctions continues sur un compact quelconque. Nous verrons d'autre part au § 9 qu'un simplexe à points extrémaux non fermés est caractérisé par le fait que l'espace H est un espace simplicial (au sens d'EFFROS, cf. [15]), mais n'est pas réticulé.

5. Le problème de Dirichlet lorsque H contient les constantes.

THÉORÈME 7 (BAUER). - Soit X un espace compact. Soit H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes. Soit V un espace élément de D_H (cf. définition 4).

1° Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) V ordonné par V^+ est réticulé ;
(b) $r_H(V) = C[S(H)]$;
(c) $r_H : V \longrightarrow C[S(H)]$ est une isométrie de Banach réticulés.

2° Si V vérifie ces propriétés, alors :

(α) V est l'élément maximum de D_H ;
(β) $E(V) = S(H)$;
(γ) $x \in S(H) \iff \forall\, f , g \in V , \ \inf[f(x) , g(x)] = (f \wedge g)(x)$. ($f \wedge g$ note le inf de f et g pour l'ordre de V^+ .)

Démonstration.

1° Il est clair que (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) .

(a) $\Rightarrow$ (b) . Si on note $\|f\|$ la norme uniforme sur V , V est, muni de cette norme, un M-espace de Kakutani à élément unité : la fonction 1 . On munit V' de $\sigma(V' , V)$. Donc si $L = \{\ell \in V'^+ \mid \|\ell\| = 1\}$, $\mathcal{E}(L) = Z$ est compact, et $V \xrightarrow{\sim} C(Z)$.

Soit $\varphi : X \longrightarrow L : x \longrightarrow \delta_x$. $X \xrightarrow{\sim} \varphi(X)$. Soit Y l'enveloppe convexe fermée de $\varphi(X)$, compacte. Si $f \in V$,

$$f \geqslant 0 \text{ sur } L \iff f \geqslant 0 \text{ sur } Z \iff f \geqslant 0 \text{ sur } \varphi(X) .$$

Donc, d'après HAHN-BANACH, $Y = L$, et $Z = \mathcal{E}(Y) \subset \varphi(X)$. On a donc

$$Z = S(V) = E(V) = S(H) \qquad \text{(théorème 1)},$$

et

$$V \xrightarrow{\sim} C(Z) \Rightarrow r_H(V) = C[S(H)] .$$

2° (α) résulte de la proposition 1.
(β) a été vu au cours de la démonstration du 1°.
(γ) résulte de ce que $Z = \varphi(X) \cap \mathcal{E}(V'^+)$, et du lemme 9.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE (Théorème de STONE-WEIERSTRASS).

1° Soit H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes ; si H est réticulé pour H^+, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $\overline{H} = C(X)$;

(b) $S(H) = X$;

(c) $E(H) = X$;

(d) H est un "sous-espace réticulé" de $C(X)$.

2° Inversement, un "sous-espace réticulé" séparant, contenant les constantes, est dense dans $C(X)$.

DÉFINITION 12. - Soit H un sous-espace séparant de $C(X)$, X compact. Si $x \in X$, on appelle mesures H-harmoniques du point x, les mesures de $\mathcal{M}_H(\delta_x)$ portées par $S(H)$ (cf. définition 2).

On note $\mathcal{M}_H^S(\delta_x)$ l'ensemble des mesures H-harmoniques de x.

PROPOSITION 6. - Sous les hypothèses de la définition 12 :

$$\mathcal{M}_H^S(\delta_x) \neq \emptyset , \qquad \forall\, x \in X .$$

Cela résulte immédiatement du théorème de Krein et Milman appliqué au convexe compact Y de H' muni de $\sigma(H', H)$ (cf. théorème 1).

C. Q. F. D.

Nous allons donner un autre critère, dû aussi à BAUER, pour qu'un espace H vérifie les conditions du théorème 7. Nous reproduisons la démonstration de BAUER (cf. [1], [2]).

DÉFINITION 13. - Soient $f \in C[S(H)]$, et $x \in X$. Nous poserons

$$\overline{H}f(x) = \inf_{\substack{h \in H \\ h \geq f \text{ sur } S(H)}} h(x) \quad \text{et} \quad \underline{H}f(x) = -\overline{H}(-f)(x) .$$

Il est facile de voir que :

LEMME 10.

(α) $-\|f\| \leqslant \underline{H}f \leqslant \overline{H}f \leqslant \|f\|$;

(β) $f \leqslant g \implies \overline{H}f \leqslant \overline{H}g$;

(γ) $\overline{H}(f+g) \leqslant \overline{H}(f) + \overline{H}(g)$;

(δ) $\forall\, \lambda \geqslant 0$, $\overline{H}(\lambda f) = \lambda \overline{H}(f)$;

(ε) Si $f \in r_H(H)$: $f = r_H(h)$, alors $\underline{H}f = \overline{H}f = h$;

(φ) $\overline{H}f$ est s. c. s. , $\underline{H}f$ est s. c. i. .

LEMME 11.

(a) $\forall\ x$, $\forall\ \mu \in \mathcal{M}_H^S(\delta_x)$, $\forall\ f \in C[S(H)]$: $\underline{H}f(x) \leqslant \mu(f) \leqslant \overline{H}f(x)$;

(b) Réciproquement, soient $x \in X$ et $f \in C[S(H)]$. $\forall\ \alpha \in \underset{\sim}{R}$ tel que

$$\underline{H}f(x) \leqslant \alpha \leqslant \overline{H}f(x) \quad ,$$

il existe $\mu \in \mathcal{M}_H^S(\delta_x)$ telle que $\mu(f) = \alpha$.

On prolonge en $\tilde{\nu}$ à $C[S(H)]$ la forme linéaire $\nu : \lambda f \longrightarrow \lambda\alpha$ définie sur le sous-espace $F_0 = \{\lambda f \mid \lambda \in \underset{\sim}{R}\}$ de $C[S(H)]$, en conservant l'inégalité

$$\nu(g) \leqslant \overline{H}g(x) \ : \ \tilde{\nu}(g) \leqslant \overline{H}g(x) \qquad \text{(par HAHN-BANACH)}.$$

$\tilde{\nu}$ ainsi trouvée est dans $\mathcal{M}_H^S(\delta_x)$ et $\tilde{\nu}(f) = \alpha$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 14. - On définit le sous-espace $\hat{H}$ de $C(X)$ ainsi :

$$\hat{H} = \{f \in C(X) \mid \forall\ x\ ,\ \forall\ \mu \in \mathcal{M}_H(\delta_x)\ ,\ \mu(f) = f(x)\} \ .$$

On définit aussi le sous-espace $\check{H}$:

$\check{H} = \{f \in C(X) \mid \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ h_1 , \dots , h_n , \ell_1 , \dots , \ell_p \in H$ telles que,

si on pose $\underline{\ell} = \sup(\ell_1 , \dots , \ell_p)$ et $\overline{h} = \inf(h_1 , \dots , h_n)$,

on ait $\underline{\ell} \leqslant f \leqslant \overline{h}$, et $\overline{h} - \underline{\ell} \leqslant \varepsilon\}$.

LEMME 12. - Soit N le plus petit cône convexe fermé de $C(X)$, semi-réticulé inférieurement, et contenant H .

Alors $\check{H} = N \cap (-N)$ et $\hat{H} \supset \check{H}$. De plus, $E(H) = E(\hat{H})$.

Il est facile de voir que $\check{H} = N \cap (-N)$. Comme $\hat{H} = N' \cap (-N')$, où

$$N' = \{f \mid \forall\ x\ ,\ \forall\ \mu \in \mathcal{M}_H(\delta_x)\ ,\ \mu(f) \leqslant f(x)\}$$

est convexe fermé semi-réticulé inférieurement et contient H ,

$$N' \supset N \ ,\ \text{et}\ \hat{H} \supset \check{H} \ .$$

C. Q. F. D.

Remarque 8. - On utilise le fait que

$$N = \{f \mid \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ h_1 , \dots , h_n \in H \ \text{telles que}\ f \leqslant \inf(h_1 , \dots , h_n) \leqslant f + \varepsilon\} \ .$$

PROPOSITION 7. - Soit $f \in C(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f \in \hat{H}$;

(b) $\forall x \in X$, $\forall \mu \in \mathfrak{M}_H^S(\delta_x)$, $\mu(f) = f(x)$;

(c) $\forall x \in H$, $\underline{H}f(x) = f(x) = \overline{H}f(x)$;

(d) $f \in \check{H}$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est clair.

(b) $\Longrightarrow$ (c) résulte du lemme 11.

(c) $\Longrightarrow$ (d) . $\forall x \in X$, $\exists h_1^x , h_2^x \in H$ telles que

$$h_2^x \leqslant f \leqslant h_1^x \text{ sur } S(H) \text{ , et } 0 \leqslant h_1^x(x) - h_2^x(x) < \varepsilon \quad .$$

Donc

$$h_2^x(y) \leqslant \underline{H}f(y) = f(y) = \overline{H}f(y) \leqslant h_1^x(y) \ , \quad \forall y \in X \qquad \text{(lemme 10).}$$

Donc, sur un voisinage U_x de x ,

$$0 \leqslant h_1^x(y) - h_2^x(y) < \varepsilon \quad .$$

On recouvre X par U_{x_1} , ... , U_{x_n} , alors

$$\underline{h} = \sup h_1^{x_i} \leqslant f \leqslant \inf h_2^{x_i} = \overline{h} \text{ , et } \overline{h} - \underline{h} < \varepsilon \quad .$$

Donc $f \in \check{H}$.

(d) $\Longrightarrow$ (a) résulte du lemme 12.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit $f \in C[S(H)]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) f est $\hat{H}$-résolutive ;

(b) $\forall x \in X$, et $\forall \mu_1 , \mu_2 \in \mathfrak{M}_H^S(\delta_x)$, on a $\mu_1(f) = \mu_2(f)$;

(c) $\forall x \in X$, $\underline{H}f(x) = \overline{H}f(x)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) est clair.

(b) $\Longrightarrow$ (c) résulte du lemme 11.

(c) $\Longrightarrow$ (a) . Posons $g(x) = \underline{H}f(x) = \overline{H}f(x)$. g est s. c. i. et s. c. s., donc continue. D'après le lemme 11,

$$\forall x \ , \ \forall \mu \in \mathfrak{M}_H^S(\delta_x) \ , \ \mu(f) = g(x) \quad ,$$

et si $x \in S(H)$,

$$\delta_x \in \mathcal{M}_H^S(\delta_x) \quad .$$

Donc g prolonge f , et $g \in \hat{H}$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 8 (BAUER). - Soit H un sous-espace séparant de $C(X)$, contenant les constantes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $H = \hat{H}$, et tout point de X ne possède qu'une seule mesure harmonique μ_x ;

(b) $r_H(H) = C[S(H)]$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) résulte du corollaire précédent.

(b) $\Longrightarrow$ (a) résulte du théorème 7 : le convexe compact Y de H' est un simplexe de Bauer, et H est alors le maximum de D_H .

C. Q. F. D.

Remarque 9. - On peut montrer facilement que :

(a) H réticulé pour H^+ $\Longrightarrow$ $\overline{H} = \hat{H}$;

(b) Le point x ne possède qu'une seule mesure harmonique

$$\Longleftrightarrow \forall f \in C[S(H)] \ , \quad \underline{H}f(x) = \overline{H}f(x) \ .$$

PROPOSITION 8. - $E(H) = X \iff \hat{H} = C(X)$.

Si $\hat{H} = C(X)$, $E(H) = E(\hat{H}) = X$. Inversement, si $E(H) = X$, $\forall x$,

$$\mathcal{M}_H(\delta_x) = \{\delta_x\} \quad ,$$

donc $\hat{H} = C(X)$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 15. - Supposons que H vérifie les hypothèses du théorème 8, et soit μ_x la mesure harmonique d'un point x . Nous poserons

$$y < x \iff \text{Support de } \mu_y \subset \text{Support de } \mu_x \ .$$

$y < x$ est une relation de préordre sur X .

On appellera part de x l'ensemble $P(x) = \{y \mid y < x\}$.

LEMME 13.

1° $\forall x$, $P(x)$ est fermée.

2° $P(x) = \{x\} \iff x \in S(H)$.

3° $\forall x$, $P(x) \cap S(H) \neq \emptyset$.

PROPOSITION 9 (Principe du maximum strict). - Soit $f \in H$. Si f atteint son maximum en un point x, f est constante sur la part $P(x)$ de x.

Cela résulte facilement du fait suivant (lui-même facile à prouver) :

LEMME 14. - Si Y est un simplexe dans un espace localement convexe séparé E, notons F_x la plus petite face de Y contenant un point x, alors, si Y est de Bauer,

$$y \in F_x \iff \operatorname{Supp} \mu_y \subset \operatorname{Supp} \mu_x \quad ,$$

où μ_y et μ_x sont les mesures maximales de barycentres y et x.

En effet, on plonge X dans $Y \subset H'^+$.

$$F = \{y \mid f(y) = f(x)\} = \{y \mid f(y) = \sup_X f\} = \{y \mid f(y) = \sup_Y f\}$$

est une face de Y contenant x, donc contient F_x. Donc

$$\varphi^{-1}[F \cap \varphi(X)] = f^{-1}[f(x)] \supset \varphi^{-1}[F_x \cap \varphi(X)] = P(x) \implies f \equiv f(x) \text{ sur } P(x) \quad .$$

Le lemme 13 est alors immédiat.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 10. - Soit Y un convexe compact d'un espace localement convexe séparé E. Si X est un fermé de Y, nous noterons H_X l'espace des restrictions à X des fonctions affines continues sur Y. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(a) Y est un simplexe de Bauer.

(a') $\forall X$ fermé de Y contenant $\mathcal{E}(Y)$, on a :

(1) $H_X = \widehat{H_X}$;
(2) Tout point de X est barycentre d'une mesure unique de $M_1^+[\overline{\mathcal{E}(Y)}]$.

(a") $\exists X$ fermé de Y contenant $\mathcal{E}(Y)$, tel qu'on ait :

(1) $H_X = \widehat{H_X}$;
(2) Tout point de X est barycentre d'une mesure unique de $M_1^+[\overline{\mathcal{E}(Y)}]$.

Démonstration.

(a) $\implies$ (a') $\implies$ (a") est trivial, car si (a) est vraie,

$$H_X \xrightarrow{\sim} H_Y \xrightarrow{\sim} C[\overline{\mathcal{E}(Y)}] \quad .$$

(a") $\implies$ (a) résulte du théorème 8, et du fait que la restriction

$$r : H_Y \longrightarrow H_X$$

est une isométrie qui transporte l'ordre, car $X \supset \overline{\mathcal{E}(Y)}$.

C. Q. F. D.

Remarque 10. - Cette proposition, qui complète utilement le théorème 6, peut se traduire en terme de frontière de Šilov, pour compléter le théorème 8 : la condition (a) peut y être remplacée par la même condition pour H_F , trace de H sur un fermé F contenant $S(H)$, et pour les mesures harmoniques des points de F seulement.

La proposition 10 montre la nécessité de l'hypothèse $H = \hat{H}$ dans le théorème 8.

Exemple : Y = un carré de $\mathbb{R}^2$; X = le bord ∂Y du carré. Tout point de X est barycentre d'une mesure unique de $M_1^+[\overline{\mathcal{E}(Y)}]$, mais $\widehat{H_X} \neq H_X$ ($f \in \widehat{H_X}$ $\Longleftrightarrow$ f affine sur chaque côté du carré), et Y n'est pas un simplexe.

6. Le problème de Dirichlet dans le cas linéairement séparant.

Dans cette partie, H est toujours un sous-espace séparant de $C(X)$, mais on ne suppose plus qu'il contienne les constantes. Mais s'il existe h dans H , $h > 0$, l'espace H/h des f/h , pour $f \in H$, contient les constantes. Mais il ne sépare pas nécessairement X . D'où l'introduction de la condition de séparation linéaire, plus forte que la séparation.

DÉFINITION 16. - Soit H un sous-espace de $C(X)$. Nous dirons que H est linéairement séparant si :

(LS) $\forall\, x \neq y$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists\, f \in H$ telle que $f(x) \neq \lambda f(y)$.

Si H est séparant, et si $1 \in H$, alors H est linéairement séparant.

LEMME 15. - Si H est un sous-espace séparant de $C(X)$, soit $\varphi(X)$ l'image de X dans H' par l'application $x \longrightarrow \delta_x$.

Si H' est muni de $\sigma(H', H)$, le cône convexe fermé engendré par $\varphi(X)$ est H'^+ . C'est aussi celui engendré par Y , enveloppe convexe fermée de $\varphi(X)$.

En effet, $f \geqslant 0$ sur $\varphi(X)$ $\Longleftrightarrow$ $f \geqslant 0$ sur H'^+ (HAHN-BANACH).

C. Q. F. D.

Le premier problème qui se pose est de savoir si $0 \in \varphi(X)$.

PROPOSITION 11. - Sous les hypothèses du lemme 15, considérons les propriétés :

(1) $H = H^+ - H^+$;

(2) H'^+ est saillant ;

(3) $0 \notin \varphi(X)$;

(4) $0 \notin Y$;

(5) Les fonctions de H n'ont pas de zéro commun ;

(6) Il y a dans H une fonction strictement positive ;

(7) H'^{+} a une base compacte.

Alors, (1) $\Longrightarrow$ (2) , et si (2) est vraie :

$$(3) \iff (4) \iff (5) \iff (6) \Longrightarrow (7) \ .$$

Enfin, (6) $\Longrightarrow$ (1) .

(1) $\Longrightarrow$ (2) , (5) $\iff$ (3) et (4) $\Longrightarrow$ (3) sont évidents. (4) $\iff$ (6) par HAHN-BANACH. Si (2) est vraie, et si $0 \in Y$, alors $0 \in \mathcal{E}(Y)$ donc $0 \in \varphi(X)$. Donc (3) $\Longrightarrow$ (4) si (2) est vraie. (6) $\Longrightarrow$ (1) est facile, et (6) $\Longrightarrow$ (7) est clair : si $h > 0$ sur X , $\{\ell \in H'^{+} \mid \ell(h) = 1\}$ est une base compacte de H'^{+} .

C. Q. F. D.

DÉFINITION 17. - Soit H un sous-espace de $C(X)$, linéairement séparant. On appelle frontière linéaire de H l'ensemble :

$$L(H) = \{x \in X \mid \mu \in M^{+}(X) \text{ et } \mu(f) = f(x) \ , \ \forall f \in H \Longrightarrow \mu = \delta_x\} \ .$$

Le théorème de base est dû à G. CHOQUET (cf. [9]).

THÉORÈME 9 (CHOQUET). - Soit H un sous-espace de $C(X)$, linéairement séparant.

1° $L(H) \subset E(H)$, et si $1 \in H$, $L(H) = E(H)$.

2° $\forall h > 0$ de $C(X)$, $L(H) = L(hH)$.

3° $L(H) = \bigcap_{\substack{h>0 \\ h\in C(X)}} E(hH)$.

4° Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $L(H) \neq \emptyset$;

(b) $\exists\, h > 0$ dans H ;

(c) $H = H^{+} - H^{+}$;

(d) H'^{+} est saillant.

5° Si $L(H) \neq \emptyset$, alors $\forall h > 0$, $L(H) = E(\frac{H}{h})$.

Démonstration.

1° Evident.

2° (A) : $\mu(f) = f(x)$, $\forall f \in H$ $\Longleftrightarrow$ (B) : $\int gh(x) \frac{d\mu}{h} = g(x)$, $\forall g \in hH$.

$$(A') : \mu = \delta_x \Longleftrightarrow (B') : h(x) \frac{\mu}{h} = \delta_x .$$

$$x \in L(H) \Longleftrightarrow \{(A) \Longrightarrow (A')\} \Longleftrightarrow \{(B) \Longrightarrow (B')\} \Longleftrightarrow x \in L(hH) .$$

3° $L(H) \subset E(hH)$, $\forall h > 0$ de $C(X)$, d'après 1° et 2°.

Soit $x \notin L(H)$. $\exists \mu_x > 0$ telle que $\mu_x(f) = f(x)$, $\forall f \in H$, et $\mu_x \neq \delta_x$. $\exists h \in C(X)$, $h > 0$, telle que $h(x) \times \int \frac{d\mu}{h} = 1$. Posons $\nu_x = h(x) \times \frac{\mu}{h}$. $\nu_x \in M_1^+(X)$, $\nu_x \neq \delta_x$. Si $hf \in hH$, $\nu_x(hf) = h(x)\, \mu(f) = (hf)(x)$. Donc $x \notin E(hH)$.

4° et 5° L'hypothèse (LS) implique que H sépare X , et que les fonctions de H n'ont pas de zéro commun.

D'après la proposition 11, (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) . Si (b) est vraie, H/h sépare X , et contient 1 , donc, d'après 1° et 2°,

$$L(H) = E(\frac{H}{h}) \neq \emptyset .$$

Donc (b) $\Longrightarrow$ (a) .

Supposons (b) fausse. Alors $0 \in Y$. Or $0 \notin \varphi(X)$ (cf. proposition 10). Donc $\exists \mu > 0$ sur X , non ponctuelle, telle que $\mu(f) = 0$, $\forall f \in H$. Donc,

$$\forall x \in X , \quad (\mu + \delta_x)(f) = f(x) , \quad \forall f \in H .$$

Donc $L(H) = \emptyset$. Donc (a) $\Longrightarrow$ (b) , et 5° est démontrée.

C. Q. F. D.

Remarque 11. - Il est facile de voir que, si $L(H) \neq \emptyset$, on a :

$$L(H) = \varphi(X) \cap \mathcal{E}(H'^{+}) = Y \cap \mathcal{E}(H'^{+})$$

(après plongement dans H').

THÉORÈME 10. - Soit H un sous-espace de $C(X)$, fermé, linéairement séparant, et réticulé pour l'ordre de H^+ . Alors :

1° $L(H)$ est fermée, non vide ;

2° $x \in L(H) \Longleftrightarrow (f \wedge g)(x) = \inf[f(x) , g(x)]$, $\forall f \in H$;

3° L'application restriction : $H \longrightarrow C[L(H)]$ est bijective ;

4° $\forall h > 0$ dans H , $L(H) = S(\frac{H}{h}) = E(\frac{H}{h})$.

En effet, H réticulé $\Longrightarrow H = H^+ - H^+$. Donc $L(H) \neq \emptyset$. Soit $h > 0$, $h \in H$. $\frac{H}{h}$ est réticulé, séparant, et contient 1 . D'après le théorème 7,

$$r_{H/h} : \frac{H}{h} \longrightarrow C[S(\frac{H}{h})]$$

est bijective. D'où la conclusion.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1 (KAKUTANI). - Soit X un espace compact. Tout "sous-espace réticulé" de $C(X)$, linéairement séparant, est dense dans $C(X)$.

COROLLAIRE 2 (CHOQUET-DENY). - Soit X un espace compact. Tout sous-cône convexe de $C(X)$, semi-réticulé inférieurement et linéairement séparant est total dans $C(X)$. (Cf. [10].)

7. Frontières d'un cône convexe de fonctions continues.

DÉFINITION 18. - Soient X un espace compact, C un cône convexe de fonctions continues sur X.

On appelle frontière de Choquet de C, l'ensemble

$$E(C) = \{x \in X \mid \mu \in M_1^+(X) \text{ et } \mu(f) \geqslant f(x), \ \forall f \in C \implies \mu = \delta_x\} .$$

On appelle frontière de Šilov de C, le plus petit fermé maximisant pour C, $S(C)$, s'il existe.

Un théorème de Bauer affirme l'existence de la frontière de Šilov dans un cas très général, pour un ensemble de fonctions semi-continues supérieurement (cf. [1] ou [24]). Nous n'aurons besoin que d'un cas très particulier (et MOKOBODZKI a montré que le cas général pouvait se ramener à celui-ci). Nous utiliserons la méthode des convexes compacts ordonnés pour démontrer ce cas particulier.

Soient E un espace localement convexe séparé, et K un convexe compact de E. On suppose que E est ordonné par un cône convexe saillant fermé E^+.

LEMME 16. - K ordonné par l'ordre induit est inductif vers le bas et vers le haut. On posera :

$$\mathcal{M}(K) = \{x \in K \mid x \text{ maximal}\} = \{x \in K \mid (x + E^+) \cap K = \{x\}\}$$

$$\mathcal{N}(K) = \{x \in K \mid x \text{ minimal}\} = \{x \in K \mid (x - E^+) \cap K = \{x\}\} .$$

C'est immédiat.

PROPOSITION 12. - Soient A le cône des traces sur K des fonctions affines continues sur E, croissantes, et A_0 le cône des traces sur K des fonctions linéaires continues sur E, positives ($A_0 = E'^+$, $A = A_0 + \mathbb{R}$). Alors :

$$E(A) = E(A_0) = \mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K) - S(A) = S(A_0) = \overline{E(A)} \ .$$

<u>Toute fonction de</u> A <u>ou de</u> A_0 <u>atteint son maximum sur</u> $E(A)$.

<u>Démonstration</u>. - D'abord, il est clair que les frontières sont les mêmes pour A et A_0 .

1° Soit $f \in A$, et soit $m = \max\limits_{x \in X} f(x)$,

$$\{x \mid f(x) = m\} \cap \mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K) \neq \emptyset$$

se démontre de la façon suivante : on "zornifie" sur la famille $\mathfrak{F}$ des variétés d'appui de K :

$$V \in \mathfrak{F} \iff \begin{cases} (1) & V \subset \{x \mid f(x) = m\} \\ (2) & V \text{ est variété d'appui fermée de } K \\ (3) & \forall x \in V \cap K ,\ (x + E^+) \cap K \subset V \ . \end{cases}$$

$\{x \mid f(x) = m\} \in \mathfrak{F}$, et $\mathfrak{F}$, ordonnée par inclusion, est inductive vers le bas. Un élément V minimal est réduit à un point $\{x\}$ (par l'absurde, avec HAHN-BANACH). Alors $x \in \mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K)$. Donc f atteint son maximum sur $\mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K)$.

<u>Remarque</u> 12. - On peut aussi "zornifier" sur les "<u>faces croissantes</u>" incluses dans $\{x \mid f(x) = m\} \cap K$: $L \subset K$ est une face croissante si L est convexe fermée, et vérifie :

(α) $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \in L$, x_1 et $x_2 \in K \implies x_1$ et $x_2 \in L$;

(β) $x_1 \in L$, $x_2 \in K$ et $x_2 \geqslant x_1 \implies x_2 \in L$.

Cette méthode permettrait de montrer que la proposition 11 est aussi valable pour l'espace $A^C_{(K)}$ des fonctions affines continues <u>sur</u> K , croissantes.

2° $\overline{\mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K)}$ est donc maximisant.

Soit F un fermé de K maximisant, et soit $a \in \mathcal{M}(K) \cap \mathcal{E}(K)$. Supposons $a \notin F$. Alors $a \notin G$, enveloppe convexe fermée de F (car $a \in \mathcal{E}(K)$).

$$a \in \mathcal{M}(K) \implies (a + E^+) \cap K = \{a\} \ .$$

Donc $(a + E^+) \cap G = \emptyset$. Donc $\exists f \in A$ telle que $f(a) = 0$ et $f < 0$ sur G , et G n'est pas maximisant. Donc $a \in F$. Donc $\overline{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)} \subset F$, et $\overline{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)}$ est bien la frontière de Šilov $S(A)$ de A .

3° (a) $E(A) \subset \mathcal{E}(K)$ résulte de la définition de $E(A)$, et de la remarque 7.

(b) Si $y \in K$, $y > x$, alors $\forall f \in A$, $\delta_y(f) \geqslant f(x)$, et $\delta_y \neq \delta_x$. Donc $x \notin E(A)$. Donc $E(A) \subset \mathcal{M}(K)$. Par suite, $E(A) \subset \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)$.

(c) Réciproquement, supposons que $a \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{M}(K)$, et que $a \notin E(A)$.

Donc $\exists\, \mu \in M_1^+(K)$, $\mu \neq \delta_a$, telle que $\mu(f) \geqslant f(a)$, $\forall\, a \in A$. Soit b le barycentre de μ . $b \in K$, $\mu \neq \delta_a$ et $a \in \mathcal{E}(K) \implies b \neq a$.

$$a \in \mathfrak{M}(K) \implies b \notin a + E^+ \ .$$

Donc $\exists\, f \in A$ telle que $f(a) = 0$, $f(b) < 0$, soit : $\mu(f) < f(a)$, ce qui est impossible. Donc

$$\mathcal{E}(K) \cap \mathfrak{M}(K) \subset E(A) \ .$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 11. - <u>Soient</u> X <u>un espace compact, et</u> C <u>un sous-cône convexe de</u> $C^+(X)$, <u>séparant, et vérifiant</u> :

(P) $$(C - C)^+ = C \ .$$

<u>Alors la frontière de Choquet</u> $E(C)$ <u>de</u> C <u>est non vide, toute fonction de</u> C <u>atteint son maximum sur</u> $E(C)$, <u>et</u> $\overline{E(C)}$ <u>est la frontière de Šilov</u> $S(C)$ <u>de</u> C .

<u>De plus</u>, $E(C) \subset E(C - C)$.

<u>Démonstration</u>. - On plonge X dans $(C - C)'^+$ par $\varphi : x \longrightarrow \delta_x$, et on applique la proposition 11 à $(C - C)'$ et à l'enveloppe convexe fermée Y de $\varphi(X)$ dans $(C - C)'$ muni de la topologie de la dualité.

C. Q. F. D.

On peut aussi énoncer le théorème sous la forme suivante :

PROPOSITION 13. - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace séparant de</u> $C(X)$, <u>vérifiant</u>

(D) $$H = H^+ - H^+ \ .$$

(a) <u>Alors</u> $E(H^+) \neq \emptyset$, $S(H^+) = \overline{E(H^+)}$, <u>toute fonction de</u> H^+ <u>atteint son maximum sur</u> $E(H^+)$.

(b) $E(- H^+) \neq \emptyset$, $S(- H^+) = \overline{E(- H^+)}$ <u>est le plus petit ensemble fermé minimisant pour</u> H^+ , <u>et toute fonction de</u> H^+ <u>atteint son minimum sur</u> $E(- H^+)$.

(c) $E(H^+) \cup E(- H^+) \subset E(H)$.

C'est à peu près évident : si Y est l'enveloppe convexe fermée de $\varphi(X)$ dans H' :

$$E(H) = \mathcal{E}(Y) \ ; \qquad E(H^+) = \mathcal{E}(Y) \cap \mathfrak{M}(Y) \ ; \qquad E(- H^+) = \mathcal{E}(Y) \cap \mathfrak{N}(Y) \ .$$

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 13. - Si les fonctions de H ont un zéro commun a , alors

$$E(- H^+) = \{a\} \ .$$

Si une génératrice extrémale d de H'^{+} coupe Y, suivant un segment $[a, b]$, alors $b \in E(H^{+})$ et $a \in E(-H^{+})$.

LEMME 17. - Soit E un espace localement convexe séparé, ordonné par un cône E^{+} fermé. Si K est un chapeau universel de E^{+}, alors :

$\mathfrak{M}(K) = Z = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}$, co-spectre de E (cf. définition 7) ; $\mathfrak{N}(K) = \{0\}$.

C'est immédiat.

8. Le problème de Dirichlet dans le cas général d'un espace réticulé.

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent à un sous-espace de $C(X)$ réticulé pour son ordre propre.

THÉORÈME 12. - Soit H un sous-espace fermé et séparant de $C(X)$, vérifiant :

(R) $\quad H$ est réticulé pour l'ordre de H^{+} ;

(F) $\quad B^{+} = \{f \in H^{+} \mid \|f\| \leq 1\}$ est filtrante croissante.

Alors :

1° La frontière de Choquet de H^{+} : $Z = E(H^{+})$ est non vide, c'est un G_{δ} de $\overline{Z} = S(H^{+})$, frontière de Šilov de H^{+}.

$$Z \subset E(H) \ ; \ \forall\, x \in \overline{Z}\ ,\ \forall\, f\, ,\, g \in H :\ (f \wedge g)(x) = \inf[f(x)\, ,\, g(x)] \ .$$

Toute fonction de H atteint le maximum de sa valeur absolue (ponctuelle) sur Z.

2° Les restrictions des fonctions de H à $\overline{Z}$ forment un espace K-canonique fort

$$C_{Z}(\overline{Z}\, ,\, \lambda\, ,\, u)$$

et la restriction est une isométrie de Banach réticulés.

3° Si les fonctions de H n'ont pas de zéro commun, $\inf\limits_{x \in \overline{Z}} \lambda(x) > 0$.

4° Si X est métrisable, l'espace K-canonique de 2° vérifie de plus :

$$\forall\, x \in Z\ ,\ \exists\, f \in H^{+} \text{ telle que } f(x) = 1 \text{ et } f(y) < 1\ ,\ \forall\, y \neq x \ .$$

Démonstration. - Si $f \in H$, notons f^{+} et f^{-} les quantités $f^{+} = f \vee 0$, $f^{-} = (-f) \vee 0$. Posons

$$N(f) = \|f \vee (-f)\|_{\infty} \ .$$

Si $|f|$ est la valeur absolue ponctuelle de f, on a $0 \leq |f| \leq f \vee (-f)$. Donc

$$\|f\|_{\infty} \leq N(f) \ .$$

La condition (F) est équivalente à : $\forall\ f\ ,\ g \in H^+\ ,\quad \|f \vee g\| = \sup(\|f\|\ ,\ \|g\|)$.
D'où :

$$N(f) = \sup(\|f^+\|\ ,\ \|f^-\|) \quad .$$

N est, sur H , une norme plus fine que la norme uniforme $\|f\|$.

Soit $\overline{H}$ le complété de H pour la norme N . Il est facile de voir que c'est un M-espace de Kakutani. Dans $\overline{H}'$, on posera

$$K = \{\ell \in \overline{H}'^+ \mid \|\ell\| \leq 1\}\ ,\ \text{et}\quad Z = \mathcal{E}(K) \setminus \{0\}\quad ,$$

spectre de $\overline{H}$.

D'après le théorème 5, $\overline{H} \xrightarrow{\sim} C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda\ ,\ u)$ pour l'ordre, et c'est une isométrie (pour les normes N sur $\overline{H}$ et uniforme dans $C(\overline{Z})$).

Soit $x \in X$. δ_x est linéaire continue sur H muni de la norme uniforme, donc sur H muni de N , donc se prolonge en $\overline{\delta_x} \in \overline{H}'$.

On a même $\overline{\delta_x} \in \overline{H}'^+$, et $\|\overline{\delta_x}\| \leq 1 \Longrightarrow \overline{\delta_x} \in K$. Posons $\overline{\varphi}\ :\ x \longrightarrow \overline{\delta_x}$.
$\overline{\varphi}\ :\ X \longrightarrow K$ muni de $\sigma(\overline{H}'\ ,\ \overline{H})$ est un homéomorphisme de X sur $\overline{\varphi}(X)$.

Comme H sépare X , elle est injective, et elle est continue. De plus, sur $\overline{\varphi}(X)$, $\sigma(\overline{H}'\ ,\ \overline{H})$ coïncide avec $\sigma(\overline{H}'\ ,\ H)$ (séparée sur $\overline{\varphi}(X)$).

$\overline{H^+}$ est l'adhérence de H^+ dans $\overline{H}$, pour la norme N , donc pour la norme uniforme sur $\overline{Z}$, donc sur K . Donc, en tant que cônes de fonctions continues sur K, il est clair que H^+ et $\overline{H}^+$ ont même frontière de Choquet dans K . Or celle de $\overline{H}^+$ est Z (lemme 17 et proposition 12). Donc

$$Z = E(H^+) \qquad (\text{dans } K\ ).$$

Or, si $f \in H^+$,

$$N(f) = \sup_{x \in X} f(x) = \sup_{\overline{\delta_x} \in \overline{\varphi}(X)} \langle f\ ,\ \overline{\delta_x}\rangle = \sup_{\ell \in K} f(\ell) \quad .$$

Donc $\varphi(X)$ est un fermé maximisant pour H^+ . Donc

$$\overline{Z} \subset \varphi(X) \quad .$$

Soit $f \in H$. $N(f) = \sup(\|f^+\|\ ,\ \|f^-\|) = \sup(\max_Z f^+\ ,\ \max_Z f^-)$. Or, <u>sur</u> Z ,

$$(f \wedge g)(\overline{\delta_x}) = \inf[f(x)\ ,\ g(x)]\ ,\quad \forall\ f\ ,\ g \in \overline{H} \quad .$$

Donc, <u>sur</u> Z ,

$$f^+ = \sup(f\ ,\ 0) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-\ f\ ,\ 0) \quad .$$

D'où :

$$N(f) = \sup_Z |f| = \max_Z |f| \leq \|f\|_\infty \quad .$$

D'où $N(f) = \|f\|_\infty$, et $H = \overline{H}$, $\overline{H}' = H'$, etc.

D'après le théorème 11 (ou la proposition 13), Z <u>est donc frontière de Choquet de</u> H^+ <u>dans</u> X , et, de plus, $\forall f \in H$, $|f|$ <u>atteint son maximum sur</u> Z .

Si les fonctions de H n'ont pas de zéro commun, il résulte de la proposition 2 que $\inf\limits_{x \in \overline{Z}} \lambda(x) > 0$.

Enfin, de la remarque 6, on déduit que, si X est métrisable, l'espace $C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$ vérifie la propriété de l'énoncé.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 14.

(a) <u>Le sous-ensemble de</u> $C(X)$:

$$^*H = \{|h| \mid h \in H\}$$

<u>possède une frontière de Šilov</u> : $\overline{Z} = S(^*H)$.

(b) La réciproque de 3° est fausse.

<u>Exemple</u> : $X = [\alpha , 1]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. H est l'ensemble des traces sur X des formes linéaires sur $\mathbb{R}$.

$H' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$, $K \xrightarrow{\sim} [0 , 1]$, $\varphi(X) \xrightarrow{\sim} [\alpha , 1]$, $\overline{Z} = Z \xrightarrow{\sim} \{1\}$, $H \xrightarrow{\sim} C(Z) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

Donc $\lambda \equiv 1$. Pourtant, si $\alpha = 0$, les fonctions de H ont un zéro commun.

(c) En général, $Z \neq E(H)$ et $Z \neq E(-H^+)$. Dans l'exemple précédent :

$$Z = E(H^+) = \{1\} , \quad E(-H^+) = \{\alpha\} , \quad E(H) = \{\alpha\} \cup \{1\} .$$

(d) $\inf(f , g)$ et $f \wedge g$ coïncident non seulement sur $\overline{Z}$, mais aussi sur tout point de $\varphi(X) \cap \mathcal{E}(H'^+)$ (caractérisé par cette propriété). C'est la raison pour laquelle il est faux que, lorsque H est un "sous-espace réticulé" séparant, H soit un espace K-canonique sur X . Un contre-exemple est fourni par l'espace H de (c) (cf. proposition 16).

Nous avons vu que toute fonction de $^*H = \{|h| \mid h \in H\}$ atteint son maximum sur Z , et a donc $\overline{Z}$ pour frontière de Šilov. On a de même :

PROPOSITION 14 (<u>Principe du maximum positif</u>). – <u>Toute fonction de</u> H <u>qui a un maximum</u> > 0 <u>l'atteint en au moins un point de</u> Z . <u>Donc, si</u>

$$H_* = \{h \in H \mid h^+ \neq 0\} ,$$

H_* <u>a une frontière de Šilov</u> :

$$S(H_*) = \overline{Z} .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $h \in H_*$, $h = h^+ - h^-$. Soit

$$m = \max h^+ > 0 \ , \quad \exists\, x \in Z \quad \text{tel que} \quad h^+(x) = m \quad .$$

Or, sur Z , l'ordre propre et l'ordre ponctuel coïncident. Donc $h^-(x) = 0$, $h \leqslant h^+ \leqslant h^+(x) = h(x)$. Donc

$$h(x) = \max h \quad .$$

C. Q. F. D.

On peut préciser la nature de Z lorsque l'espace H , outre les hypothèses du théorème 12, vérifie l'hypothèse de séparation linéaire.

PROPOSITION 15. - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace fermé et séparant de</u> $C(X)$, <u>vérifiant les hypothèses</u> (R) <u>et</u> (F) <u>du théorème</u> 12, <u>et</u>, <u>de plus</u> :

(LS) H <u>est linéairement séparant</u>.

<u>Alors</u> :

(a) $Z = E(H^+) = L(H)$ <u>frontière linéaire de</u> H . Z <u>est fermé</u>, <u>et</u>

$$x \in Z \iff f \wedge g(x) = \inf[f(x) \ , \ g(x)] \quad .$$

(b) <u>La restriction</u> $H \longrightarrow C(Z)$ <u>est une isométrie de Banach réticulés</u>.

C'est immédiat à partir des théorèmes 9 et 12, et des remarques 11 et 14 (d).

<u>Remarque</u> 15.

(a) Sous les hypothèses de la proposition 15, il est faux que $E(H) = E(H^+)$, c'est-à-dire que la fonction $1 \in H$. Mais il existe $h_0 \in H$ telle que $h_0 \equiv 1$ sur Z .

<u>Exemple</u> :

$$X \subset \mathbb{R}^2 : \quad X = \{(1 \ , \ 0)\} \cup \{(0 \ , \ 1)\} \cup \{(\tfrac{1}{3} \ , \ \tfrac{1}{3})\} \quad .$$

H est l'ensemble des traces sur X des fonctions linéaires sur $\mathbb{R}^2$.

$$H' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2 \ ; \qquad K = \{|x| + |y| \leqslant 1\} \cap \{x \geqslant 0\} \cap \{y \geqslant 0\} \quad .$$

$Z = \{(1 \ , \ 0)\} \cup \{(0 \ , \ 1)\}$ est fermé, c'est $L(H)$. <u>Mais</u> $1 \notin H$.

(b) A partir de la proposition 15, on retrouve le corollaire 1 du théorème 10.

<u>Exemple</u> : $X = [0 \ , \ 1]$. $H = \{f \in C(X) \mid f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} f(1)\}$ (exemple de la remarque 3). C'est un espace K-canonique fort, et

$$H' \xrightarrow{\sim} M_Z([0 \ , \ 1]) \quad \text{où} \quad Z = [0 \ , \ 1] \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \quad .$$

$\overline{Z} = [0 \ , \ 1]$. $E(- H^+) = [0 \ , \ 1[$. $E(H) = S(H) = [0 \ , \ 1]$.

PROPOSITION 16. - Soit H un "sous-espace réticulé" fermé et séparant de $C(X)$. Alors $Z = E(H^+)$ existe, et la restriction

$$H \longrightarrow C(\overline{Z})$$

est une isométrie de Banach réticulés de H sur un espace K-canonique

$$C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda\ ,\ u)\ .$$

De plus, λ et u ont des prolongements à X :

$\tilde{\lambda} : X \longrightarrow [0\ ,\ 1]\ ,\ \ \lambda < 1$ sur $X \setminus \overline{Z}$, semi-continue inférieurement,

$\tilde{u} : X \setminus Z \longrightarrow Z$, borélienne,

tels que

$$H = \{f \in C(X)\ |\ \forall\ y \in X \setminus Z\ ,\ \ f(y) = \tilde{\lambda}(y)\ f[\tilde{u}(y)]\ \ (\text{et}\ \ f(a) = 0\ \ \text{si}\ \ \tilde{\lambda}(a) = 0)\}\ ,$$

et ce sont les seules "relations linéaires ponctuelles" que vérifie H (hormis celles qui se déduisent de celles-là).

Cela résulte de la remarque 14 (d) : $\varphi(X) \subset \mathcal{E}(H'^+)$, donc $\forall\ y \in \varphi(X)\ ,\ \ y \neq 0$, $\exists\ \tilde{\lambda}(y) \in\ ]0\ ,\ 1]$ et $\tilde{u}(y) \in Z$ tels que $y = \tilde{\lambda}(y)\ \tilde{u}(y)$.

$y \longrightarrow \tilde{\lambda}(y) = \lambda_K(y)$ (cf. lemme 5) est s. c. i., et $y \longrightarrow \tilde{u}(y) = \dfrac{y}{\lambda_K(y)}$ est borélienne. Sur $\overline{Z}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$, $u = \tilde{u}$.

Enfin, H est bien l'ensemble des fonctions f de $C(X)$ vérifiant les relations $f(y) = \tilde{\lambda}(y)\ f[\tilde{u}(y)]$, parce que la restriction à $\overline{Z}$ établit une bijection entre H et $C_Z(\overline{Z}\ ,\ \lambda\ ,\ u)$. Il n'y a pas d'autres relations du type $f(y) = kf(z)$ parce que $\varphi(X) \subset \mathcal{E}(H'^+)$.

C. Q. F. D.

Remarque 16. - H n'est donc pas, en général, un espace K-canonique sur X. Ce serait vrai si $X = \overline{Z}$, c'est-à-dire si $\forall\ x \in X\ ,\ \ \forall\ V$ voisinage de x, $\exists\ y \in V$ tel que :

$$\{f(z) \geqslant f(y)\ ,\ \ \forall\ f \in H^+\} \implies \{z = y\}\ .$$

COROLLAIRE (KAKUTANI). - Soient X un espace compact, et H un "sous-espace réticulé" et fermé de $C(X)$.

Alors les éléments de H vérifient une famille de relations de la forme

$$f(x_i) = \lambda_i\ f(x_i')\ ,\qquad \lambda_i \in [0\ ,\ 1]\ ,$$

et si on considère toutes les relations de cette forme vérifiées par H, H est exactement l'espace des fonctions continues vérifiant ces relations.

Si H est séparant, c'est la proposition 16.

Sinon, soit R la relation d'équivalence sur X :

$$x \mathrel{R} y \iff \forall f \in H , \quad f(x) = f(y) \quad .$$

Soient $\hat{X} = X/R$, et $\theta : X \longrightarrow \hat{X}$ l'application canonique sur le quotient. Toute fonction f de H passe au quotient en $\hat{f}$ sur $\hat{X}$, continue, et

$$\hat{H} = \{\hat{f} \mid f \in H\}$$

est un sous-espace séparant réticulé et fermé pour la norme uniforme de $C(\hat{X})$, et le corollaire sera démontré par la proposition 16 si on sait que $\hat{X}$ est compact. Il suffit de montrer que $\hat{X}$ est séparé. Soit

$$\psi : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}^{\hat{H}} : \hat{x} \longrightarrow (\hat{f}(\hat{x}))_{\hat{f}\in\hat{H}} \quad .$$

ψ est continue injective, $\mathbb{R}^{\hat{H}}$ est séparé, donc $\hat{X}$ est séparé.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant aborder le cas où H n'est plus réticulé, mais où H' l'est. Avant, nous allons exposer la théorie des espaces simpliciaux, due à EFFROS (cf. [15]).

9. Les espaces simpliciaux.

Montrons d'abord un théorème qui renforce un lemme de KADISON (cf. [19]).

THÉORÈME 13. - Soit E un espace normé, de dual E' . Soit X un ensemble de E' , convexe, semi-équilibré, compact pour $\sigma(E' , E)$, et posons $B = X - X$. On munit X de la topologie $\sigma(E' , E)$. Soit $A_0(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X , nulles en 0 , muni de la norme de la convergence uniforme sur X .

Si B est absorbant, $A_0(X)$ est isomorphe au complété $\hat{E}$ de E .

Démonstration.

(a) B est la boule unité d'une norme sur E' . Pour la topologie $\mathcal{T}_B$ correspondante, E' est un espace de Banach, car $\mathcal{T}_B$ est plus fine que $\sigma(E' , E)$. Or, si $\mathcal{T}_N$ est la topologie forte de E' , E' est aussi un Banach pour $\mathcal{T}_N$, et $\mathcal{T}_N$ est plus fine que $\sigma(E' , E)$. D'après le théorème du graphe fermé, $\mathcal{T}_N = \mathcal{T}_B$.

Si B_0 est la boule unité pour la norme ordinaire sur E' , il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que

$$(1/\lambda)B_0 \subset B \subset \lambda B_0 \quad .$$

(b) Soit $f \in A_0(X)$. Alors f a un prolongement $\tilde{f} \in E'^*$, unique. $\tilde{f}_{|X} = f$ est continue sur X pour $\sigma(E', E)$. Il en résulte facilement que $\tilde{f}_{|B}$ est continue pour $\sigma(E', E)$ (prendre un ultrafiltre sur B).

Donc $\tilde{f}_{|B_0}$ est continue pour $\sigma(E', E)$. Par suite, la restriction de $\tilde{f}$ à toute partie équicontinue, c'est-à-dire bornée en norme, de E' , est continue pour $\sigma(E', E)$. D'après un théorème de GROTHENDIECK caractérisant le complété d'un espace localement convexe séparé, $\tilde{f} \in \hat{E}$ (cf. [17]).

(c) On a donc une bijection naturelle $A_0(X) \xrightarrow{\sim} \hat{E}$. D'après ce même théorème, la topologie de $\hat{E}$ est la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' , c'est-à-dire sur B_0 . Donc $A_0(X) \longrightarrow \hat{E}$ est continue, donc bicontinue d'après le théorème de Banach.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Soit E un espace normé, de dual E' , et soit H un hyperplan affine de E' , ne contenant pas 0 , et fermé pour $\sigma(E', E)$. Soit Y un convexe compact de H , pour $\sigma(E', E)$, et posons $X = \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \lambda Y$. Si $B = X - X$ est absorbant, alors $A(Y)$, espace des fonctions affines $\sigma(E', E)$-continues sur Y , muni de la convergence uniforme, est isomorphe au complété $\hat{E}$ de E .

(On utilise le fait qu'une droite supplémentaire de H est supplémentaire topologique pour $\sigma(E', E)$.)

Les espaces simpliciaux, que nous allons étudier dans ce paragraphe, ont été introduits par EFFROS dans [15].

DÉFINITION 19. - On appelle espace simplicial, un espace de Banach ordonné E tel que :

(a) E^+ est fermé ;
(b) Le dual E' de E , pour la norme et l'ordre duaux, est un L-espace de Kakutani.

LEMME 18. - Tout M-espace de Kakutani est un espace simplicial.

Cela résulte du lemme 8.

DÉFINITION 20. - Si E est un espace simplicial, on posera :

$$K = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| \leqslant 1\} \quad .$$

K est un chapeau universel de E'^+ pour $\sigma(E', E)$, et

$$L(K) = \{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| = 1\} \quad .$$

K est un simplexe. $Z = \delta(K) \setminus \{0\}$ s'appelle le spectre de E .

DÉFINITION 21. - Un élément e d'un espace simplicial E est dit élément unité si

$$L(K) = E'^{+} \cap \{\ell \in E' \mid \langle \ell , e\rangle = 1\} .$$

$e \in E^{+}$, bien sûr. Si E est un M-espace de Kakutani, cette définition coïncide avec la définition antérieure (cf. définition 7).

PROPOSITION 17.

1° Si E est un espace simplicial, E est isomorphe pour la topologie et l'ordre, à $A_0(K)$. En particulier, E vérifie le lemme de décomposition de Riesz. Si E possède un élément unité, E est isomorphe à $A[L(K)]$.

2° Si E est un espace simplicial, et si $L(K)$ est fermé, E possède un élément unité.

Démonstration.

1° résulte du théorème 13 et de son corollaire, et du fait que, pour un simplexe K , $A(K)$ vérifie le lemme de Riesz (cf. [11], et théorème 18).

2° La norme N sur K est semi-continue inférieurement. Montrons qu'elle est aussi semi-continue supérieurement :

$$\{\ell \mid N(\ell) \geqslant \alpha\} = \{\lambda\ell \mid \ell \in L(K) , \alpha \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

est compact, donc fermé. Donc N est continue affine sur K , donc $N \in A_0^{+}(K)$. Donc $\exists\, e \in E$, correspondant à N , d'après 1°, tel que $e = 1$ sur $L(K)$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 18. - Soit E' un L-espace de Kakutani, dual d'un espace de Banach E ordonné, et soit K le chapeau (pour $\sigma(E' , E)$) : $\{x \mid \|x\| \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$. Si B' est la boule unité de E' , alors B' est l'enveloppe convexe de $K \cup (-K)$: $B' = \Delta[K \cup (-K)]$.

(a) Si $\|x\| = \|x^{+}\| + \|x^{-}\| = 1$, posons

$$y = \frac{x^{+}}{\|x^{+}\|} , \qquad z = \frac{x^{-}}{\|x^{-}\|}$$

(si x^{+} et $x^{-} \neq 0$, sinon il est clair que $x \in K \cup (-K)$). Si $\|x^{+}\| = \lambda$, $\|x^{-}\| = 1 - \lambda$, et $x = \lambda y + (1 - \lambda)(-z)$, y et $z \in K$. Donc $B' \subset \Delta[K \cup (-K)]$.

(b) Soit $x = \lambda y + (1 - \lambda)(-z) \in \Delta[K \cup (-K)]$.

$$x = x^+ - x^- \ , \text{ et } \ x^+ \leqslant \lambda y \ , \quad x^- \leqslant (1-\lambda) z \ ,$$

$$\|x\| = \|x^+\| + \|x^-\| \leqslant \lambda \|y\| + (1-\lambda)\|z\| \leqslant 1 \ .$$

Donc $\Delta[K \cup (-K)] \subset B'$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Si E' est un L-espace de Kakutani dual d'un espace de Banach ordonné E , et si B' est sa boule unité, et $K = B' \cap E'^+$, alors

$$\mathcal{E}(B') = \mathcal{E}(K) \cup \mathcal{E}(-K) \ .$$

LEMME 19. - Soit E un espace simplicial. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, il existe $m \in E'^+$ telle que $\|m\| = 1$ et $|m(x)| = 1$.

En effet, $\exists \, \ell \in E'$ telle que $\|\ell\| = 1$ et $\ell(x) = 1$,

$$\ell = \ell^+ - \ell^- \ , \qquad \|\ell^+\| + \|\ell^-\| = 1 \ .$$

Posons $\|\ell^+\| = \lambda$, $\|\ell^-\| = \mu$,

$$\ell^+(x) - \ell^-(x) = 1 \ ;$$

or $|\ell^+(x)| \leqslant \lambda$ et $|\ell^-(x)| \leqslant \mu$. Donc $\ell^+(x) = \lambda$ et $\ell^-(x) = -\mu$.

Si $\ell^+ \neq 0$, $m = \dfrac{\ell^+}{\lambda}$ convient. Si $\ell^- \neq 0$, $m = \dfrac{\ell^-}{\mu}$ convient.

C. Q. F. D.

Remarque 17. - Si x est $\geqslant 0$, et si $\ell^- \neq 0$, en posant $m = \dfrac{\ell^-}{\mu}$, on aurait $m(x) = -1$, pour $m \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, ce qui est absurde. On a donc montré en même temps :

$$\|x\| = 1 \ , \quad x \geqslant 0 \ , \quad \|\ell\| = 1 \ \text{ et } \ \ell(x) = 1 \implies \ell \geqslant 0 \ .$$

C'est une propriété que KAKUTANI avait montrée dans le cas des M-espaces.

PROPOSITION 19. - Si E est un espace simplicial, alors l'isomorphisme entre E et $A_0(K)$ est une isométrie. De même entre E et $A[L(K)]$, si E possède un élément unité.

En effet, il est clair que $\|x\|_E \geqslant \|x\|_{A_0(K)}$. Le lemme 19 prouve l'égalité.

COROLLAIRE. - Si E est un espace simplicial, sa norme est croissante sur E^+ .

Avant d'aborder la caractérisation des espaces simpliciaux, nous aurons besoin de plusieurs lemmes sur les convexes compacts.

LEMME 20.

(a) Si X est un convexe compact d'un espace localement convexe séparé E , et *si φ est affine semi-continue inférieurement sur* X , *l'ensemble* $\mathfrak{F}$ *des fonctions affines continues minorant strictement* φ *est filtrant croissant, et* $\sup \mathfrak{F} = \varphi$.

(b) *Si* ψ *est convexe semi-continue supérieurement sur* X , *l'ensemble* $\mathcal{G}$ *des fonctions convexes continues majorant strictement* ψ *est filtrant décroissant, et* $\inf \mathcal{G} = \psi$.

Ce lemme est dû à MOKOBODZKI. On en trouvera une démonstration dans [27].

LEMME 21.

(a) *Soit* g *concave s. c. i. sur* X *convexe compact.* $\forall \mu \in M_1^+(X)$, *de barycentre* x ,

$$\mu(g) \leqslant g(x) \quad .$$

(b) *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille filtrante décroissante de fonctions s. c. s. sur* X , *telle que* $\inf f_i$ *soit minoré. Alors*

$$\widehat{\inf f_i} = \inf \widehat{f_i} \quad .$$

(c) *Soit* φ *une fonction convexe s. c. s. sur* X , *minorée. Soit* μ *maximale au sens de* G. CHOQUET, $\mu \in M_1^+(X)$. *Alors*

$$\mu(\hat{\varphi}) = \mu(\varphi) \quad .$$

(a) $g = \sup \mathfrak{F}$ où $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des fonctions concaves continues h , $h < g$

$$\mu(g) = \sup_{h\in\mathfrak{F}} \mu(h) \ . \qquad \mu(h) \leqslant h(x) \ . \qquad \sup_{h\in\mathfrak{F}} h(x) = g(x) \quad .$$

Donc $\mu(g) \leqslant g(x)$.

(b) Posons

$$f = \inf_{i\in I} f_i \ . \qquad \hat{f}(x) = \sup_{\text{barycentre de } \mu = x} \mu(f) \quad .$$

Or l'ensemble K_x des mesures de $M_1^+(X)$ de barycentre x est un compact vague.

$$\tilde{f}_i : \mu \longrightarrow \mu(f_i) \quad \text{et} \quad \tilde{f} : \mu \longrightarrow \mu(f)$$

prolongent f et f_i au compact K , et $\tilde{f}_i$ et $\tilde{f}$ sont s. c. s. sur K_x , et $\tilde{f} = \inf \tilde{f}_i$.

Alors il est facile de voir que

$$\inf_{i\in I} \sup_{\mu\in K_x} \tilde{f}_i(\mu) = \sup_{\mu\in K_x} \inf_{i\in I} \tilde{f}_i(\mu)$$

(utiliser une famille filtrante décroissante de compacts dans l'espace $X \times \underline{R}$).

Soit

$$\inf_{i\in I} \widehat{f_i}(x) = \sup_{\mu\in K_x} \tilde{f}(\mu) = \hat{f}(x) \quad .$$

(c) $\varphi = \inf_{h\in\mathfrak{F}} h$, où $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des fonctions convexes continues $h > \varphi$.
Donc, d'après (b),

$$\hat{\varphi} = \inf \hat{h} \text{ , et } \mu(\hat{\varphi}) = \inf \mu(\hat{h}) \quad .$$

Or, si μ est maximale, $\mu(\hat{h}) = \mu(h)$. Donc

$$\mu(\hat{\varphi}) = \inf \mu(h) = \mu[\inf h] = \mu(\varphi) \quad .$$

C. Q. F. D.

LEMME 22.

(a) Si f est convexe s. c. s. minorée, et g concave s. c. i. majorée, sur X, et si $f \leqslant g$, alors $\hat{f} \leqslant \check{g}$ (où $\check{g} = -\,(\widehat{-g})$).

(b) Si X est un simplexe, et si f est convexe s. c. s. minorée, alors $\hat{f}$ est affine.

(a) $\hat{f}(x) \leqslant \sup_{\text{barycentre de } \mu = x} \mu(f) \leqslant \sup \mu(g) \leqslant g(x)$ d'après le lemme 21 (a).
Donc $\hat{f} \leqslant g$, et la même démonstration prouve que $\hat{f} \leqslant \check{g}$.

(b) $f = \inf_{h\in\mathfrak{F}} h$ où $\mathfrak{F} = \{h$ convexes continues $\mid h > f\}$, et $\mathfrak{F}$ est filtrant décroissant. D'après le lemme 21 (b) :

$$\hat{f} = \inf \hat{h} \quad .$$

Les $\hat{h}$ sont affines, puisque X est un simplexe, et les $\hat{h}$ sont filtrants décroissants. Donc $\inf \hat{h}$ est affine, et $\hat{f}$ aussi.

C. Q. F. D.

LEMME 23. - Si X est un simplexe, et F une face de X , soit φ une fonction convexe s. c. s. sur X , affine sur F , et minorée sur X . Alors $\varphi = \hat{\varphi}$ sur F .

$\hat{\varphi}$ est affine s. c. s. (lemme 22 (b)). Soit $x \in F$, et soit μ_x la mesure maximale de barycentre x . Puisque $\hat{\varphi}$ est affine s. c. s.,

$$\hat{\varphi}(x) = \mu_x(\hat{\varphi}) \quad .$$

Puisque μ_x est maximale,

$$\mu_x(\hat{\varphi}) = \mu_x(\varphi) \qquad \text{(lemme 21 (c)).}$$

F est une face, donc $S\mu_x \subset F$, donc

$$\mu_x(\varphi) = \mu_x(\varphi | F) \quad .$$

φ est affine sur F, donc $\mu_x(\varphi|F) = \varphi_{|F}(x) = \varphi(x)$. D'où

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) \quad .$$

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant démontrer un théorème dû à EDWARDS (cf. [13], [14]). Nous utiliserons un point de vue plus géométrique que le sien.

THÉORÈME 14 (EDWARDS). - Soit X un simplexe d'un espace localement convexe séparé. Soient φ une fonction convexe s. c. s. et ψ une fonction concave s. c. i., telles que

$$\varphi \leqslant \psi \quad .$$

Alors, il existe une fonction affine continue h telle que

$$\varphi \leqslant h \leqslant \psi \quad .$$

Démonstration.

1° Il est clair qu'on peut supposer φ et ψ bornées. D'après le lemme 22 (a), $\hat{\varphi} \leqslant \check{\psi}$, et d'après le lemme 22 (b), $\hat{\varphi}$ et $\check{\psi}$ sont affines. Il suffit donc de trouver h telle que

$$\hat{\varphi} \leqslant h \leqslant \check{\psi} \quad .$$

2° $\hat{\varphi} < \check{\psi} + 1$, affine s. c. i. En utilisant le lemme 20 (a), on voit que les compacts $\{x \mid f(x) \leqslant \hat{\varphi}(x)\}$, pour f affine continue, $f < \check{\psi} + 1$, forment une famille filtrante décroissante d'intersection vide. Donc l'un d'eux est vide. Donc $\exists\, h_1$ affine continue telle que

$$\hat{\varphi} < h_1 < \check{\psi} + 1 \quad .$$

3° Construisons h_n par récurrence. Supposons trouvées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ affines continues telles que

$$\forall\, p \leqslant n \,, \quad \hat{\varphi} < h_p < \check{\psi} + \frac{1}{2^{p-1}} \quad \text{et} \quad \|h_{p-1} - h_p\| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}} \quad .$$

Alors

$$f_1 = \sup(\hat{\varphi} \,,\, h_n - \frac{1}{2^n}) < \inf(h_n \,,\, \check{\psi} + \frac{1}{2^n}) = f_2 \quad .$$

Supposons qu'on ait montré $\widehat{f_1} < \widecheck{f_2}$. $\widehat{f_1}$ est affine s. c. s., $\widecheck{f_2}$ affine s. c. i., donc, comme au 2°, on peut trouver h_{n+1} telle que

$$f_1 \leqslant \widehat{f_1} < h_{n+1} < \widecheck{f_2} \leqslant f_2$$

d'où

$$\hat{\varphi} < h_{n+1} < \check{\psi} + \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|h_n - h_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad .$$

4° On a ainsi construit une suite h_n de Cauchy dans $A(X)$, vérifiant

$$\hat{\varphi} < h_n < \check{\psi} + \frac{1}{2^{n-1}} \, , \qquad h_n \longrightarrow h \in A(X) \quad ,$$

et

$$\varphi \leqslant \hat{\varphi} \leqslant h \leqslant \check{\psi} \leqslant \psi \quad .$$

5° Il reste donc à montrer que :

<u>Si</u> α <u>et</u> f <u>sont affines s. c. s.</u>, β <u>et</u> g <u>affines s. c. i.</u>, <u>sur</u> X <u>simplexe</u>, <u>et si</u>

$$\lambda = \sup(f \, , \alpha) < \inf(g \, , \beta) = \mu \quad ,$$

<u>alors</u>

$$\widehat{\sup(f \, , \alpha)} < \widecheck{\inf(g \, , \beta)} \quad .$$

Toutes les fonctions étant bornées, plaçons-nous dans l'espace compact $X \times [-M \, , +M]$, et utilisons, pour une fonction $\theta : X \longrightarrow [-M \, , +M]$, les ensembles

$$A_\theta = \{(x \, , \lambda) \mid \lambda \geqslant \theta(x)\} \quad \text{et} \quad B_\theta = \{(x \, , \lambda) \mid \lambda \leqslant \theta(x)\} \quad ,$$

et les ensembles $\widetilde{A}_\theta$ et $\widetilde{B}_\theta$ définis de façon analogue, avec les inégalités strictes.

$B_{\hat{\lambda}}$ est inclus dans l'enveloppe convexe de $B_f \cup B_\alpha$, qui est compact, et inclus dans $\widetilde{B}_g \cap \widetilde{B}_\beta$. Donc

$$\hat{\lambda} < \inf(g \, , \beta) = \mu \quad .$$

$\hat{\lambda}$ est affine, donc $\widetilde{A}_{\hat{\lambda}}$ est convexe, et contient $A_g \cup A_\beta$, donc leur enveloppe convexe, compacte, qui contient elle-même $A_{\check{\mu}}$. Donc $\hat{\lambda} < \check{\mu}$.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 18. - Si $\varphi < \psi$, il est clair qu'on peut choisir h telle que $\varphi < h < \psi$.

COROLLAIRE 1. - <u>Soient</u> X <u>un simplexe</u>, <u>et</u> F <u>une face de</u> X . <u>Si</u> φ <u>est convexe s. c. s.</u>, <u>affine continue sur</u> F , <u>et si</u> g <u>est concave s. c. i.</u>, <u>telles que</u> $\varphi \leqslant g$, <u>alors il existe</u> h <u>affine continue telle que</u>

$$\varphi \leqslant h \leqslant g \, , \qquad \varphi = h \ \underline{\text{sur}} \ F \, .$$

Ce lemme généralise un lemme d'EFFROS (cf. [15]). Posons

$$\psi = g \times 1_{X \setminus F} + \varphi \times 1_F \quad .$$

ψ est concave s. c. i., $\varphi \leqslant \psi$, et $\psi = \varphi$ sur F . D'après le théorème précédent il existe h affine continue, telle que $\varphi \leqslant h \leqslant \psi \leqslant g$. Donc $\varphi \leqslant h \leqslant g$, et $h = \varphi$ sur F .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 2 (MOKOBODZKI). - Soit X un simplexe, et soient F_1 , F_2 deux faces disjointes de X . Il existe une fonction affine continue sur X , h , telle que

$$0 \leqslant h \leqslant 1 , \qquad h = 1 \ \underline{\text{sur}}\ F_1 , \qquad h = 0 \ \underline{\text{sur}}\ F_2 .$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 24. - Soit X un convexe compact dans un espace localement convexe séparé. Toute face F de X possède un système fondamental de voisinages dans X formés de tranches (intersection de X avec un demi-espace ouvert).

(Ce lemme permet de montrer simplement un résultat de DAVIES : Toute face d'un simplexe qui est un G_δ est "exposée" cf. [12].)

Démonstration du lemme. - Soit U un ouvert de X , $F \subset U$. En utilisant le théorème de Hahn-Banach et la compacité de $X \setminus U$, on voit facilement qu'il existe n formes linéaires continues $f_1 , \ldots , f_n$ telles que

$$F \subset X \cap \{f_1 < 1\} \cap \{f_2 < 1\} \cap \ldots \cap \{f_n < 1\} \subset U \quad .$$

Les ensembles $Y_i = X \cap \{f_i \geqslant 1\}$ sont convexes compacts, inclus dans le convexe $X \setminus F$. Donc l'enveloppe convexe Z de la réunion des Y_i est compacte et incluse dans $X \setminus F$. Soit $\{f = 1\}$ un hyperplan fermé séparant strictement Z de F . Alors $F \subset X \cap \{f < 1\} \subset U$.

C. Q. F. D.

Démonstration du corollaire. - Posons $U_1 = X \setminus F_2$, et $U_2 = X \setminus F_1$. Il existe h_1 et h_2' linéaires continues, telles que

$$X \cap \{x \mid h_1 > 1\} \subset U_1 \quad \text{et} \quad X \cap \{x \mid h_2' < 1\} \subset U_2 \quad .$$

Soit $\alpha > 0$, tel que $\sup\limits_X(h_2' - \alpha) < \inf\limits_X h_1$. Posons $h_2 = h_2' - \alpha$. Alors

$$\{x \mid h_2 < 1 - \alpha\} \subset U_2 \quad .$$

Posons

$$f_1 = \inf(1 , h_1) \times 1_{X \setminus F_2} + (1 - \alpha) \times 1_{F_2} \quad ,$$

$$f_2 = \sup(1 - \alpha , h_2) \times 1_{X \setminus F_1} + 1_{F_1} \quad .$$

f_2 est concave s. c. s., f_1 est convexe s. c. i., et $f_1 = f_2 = \begin{cases} 1 & \text{sur } F_1 \\ 1 - \alpha & \text{sur } F_2 . \end{cases}$

D'après le théorème 14, $\exists\ h'$ continue affine telle que $f_2 \leqslant h' \leqslant f_1$. Donc $1-\alpha \leqslant h' \leqslant 1$, $h' = 1$ sur F_1, $h' = 1-\alpha$ sur F_2. Donc, si $h = \frac{1}{\alpha}[h' - (1-\alpha)]$,

$$0 \leqslant h \leqslant 1 , \qquad h = 1 \text{ sur } F_1 , \qquad h = 0 \text{ sur } F_2 .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 3. - Si F est une face d'un simplexe X, $F \neq X$, il existe h affine continue, $h \not\equiv 0$, $h = 0$ sur F.

En effet, si $F \neq X$, il existe un point extrémal de X, x_0, qui n'appartient pas à F (théorème de Krein et Milman). On applique le corollaire 2 à F et $\{x_0\}$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4. - Soient X un simplexe et F une face de X, $F \neq X$. L'espace $A_F(X)$ des fonctions affines continues nulles sur F est non réduit à $\{0\}$, et F est exactement l'ensemble des zéros communs à toutes ces fonctions.

Il suffit de montrer que, si $x_0 \in X \setminus F$, $\exists\ h \in A_F(X)$, telle que $h(x_0) \neq 0$. On peut même avoir $h(x_0) = 1$ et $h \in A_F^+(X)$: soit $h_1 \in A(X)$ telle que $h_1 > 1$ sur F et $h_1(x_0) < 1$. Soit $\lambda > 0$ tel que $-\lambda < \inf h_1$. Posons

$$h_2 = \frac{1}{\lambda}\inf(h_1 , 1) + 1 ,$$

concave continue, et $h_3 = 1_F$, convexe s. c. s. D'après le théorème 14, il existe $h' \in A(X)$ telle que

$$h_3 \leqslant h' \leqslant h_2 , \qquad 0 \leqslant h' \leqslant 1 , \qquad h' \equiv 1 \text{ sur } F , \qquad h'(x_0) < 1 .$$

Alors $h = \dfrac{1-h'}{1-h'(x_0)}$ est la fonction cherchée.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 20. - Soient X un simplexe et F une face de X, et soit $A_F(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X, nulles sur F, muni de la norme uniforme, et de boule unité B. $A_F(X)$ est un espace de Banach ordonné vérifiant:

(1) $A_F^+(X)$ est fermé ;
(2) $A_F(X) = A_F^+(X) - A_F^+(X)$;
(3) $A_F(X)$ vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;
(4) La norme est croissante sur $A_F^+(X)$;
(5) $B^+ = B \cap A_F^+(X)$ est filtrante croissante ;
(6) $B = \overline{B^+ - B^+}$.

Les mêmes propriétés sont vérifiées pour $A(X)$, et de plus $\sup B^+ = 1$ dans ce cas.

Démonstration.

(1) est évident.

(2) Soit $f \in A_F(X)$. f^+ est convexe continue, majorée par $\|f\| \times 1_{X\setminus F}$, concave s. c. i. D'après le théorème 14 (ou son corollaire 1), il existe $h \in A(X)$: $f^+ \leqslant h \leqslant \|f\| \times 1_{X\setminus F}$. Donc

$$h \in A_F^+(X) \ , \qquad h - f \in A_F^+(X) \ , \text{ et } \ f = h - (h - f) \ .$$

(3) Soient $f_1 , \dots , f_n , g_1 , \dots , g_p \in A_F(X)$, avec $f_i \leqslant g_j$. On applique le théorème 14 à $\sup(f_1 , \dots , f_n)$ et à $\inf(g_1 , \dots , g_p)$, et on obtient

$$h \in A_F(X) \ , \text{ avec } \ f_i \leqslant h \leqslant g_j \ .$$

(4) est évident.

(5) Soient $f_1 , f_2 \in B^+$. $\sup(f_1 , f_2)$ est convexe continue, majorée par $1_{X\setminus F}$, concave s. c. i. Donc $\exists\, h \in A(X)$:

$$\sup(f_1 , f_2) \leqslant h \leqslant 1_{X\setminus F} \ .$$

Donc $h \in B^+$. Il est clair que pour $A(X)$, $1 = \sup B^+$.

(6) Soit $f \in \mathring{B}$: $\|f\| < 1$. Posons

$$f^+ = \sup(f , 0) \ , \quad f^- = \sup(- f , 0) \ .$$

Les fonctions $\widehat{f^+}$ et $\widehat{f^-}$ sont affines s. c. s. Raisonnons sur $\widehat{f^+}$, par exemple. L'ensemble $\mathfrak{F}$ des fonctions affines continues h qui majorent strictement $\widehat{f^+}$ est filtrant décroissant, et

$$\inf_{h\in\mathfrak{F}} h = \widehat{f^+} \qquad \text{(lemme 20 (a)).}$$

Soit $\ell \in A_F'(X)$ (dual topologique de $A_F(X)$). Il existe une mesure μ sur X , telle que $\forall\, f \in A_F(X)$, $\mu(f) = \ell(f)$,

$$\lim_{\mathfrak{F}} \mu(h) = \mu(\widehat{f^+}) \ .$$

Soit λ une constante telle que $\|f^+\| < \lambda < 1$. Alors $\widehat{f^+} < \lambda$. Si on est dans le cas de $A_F(X)$, et non de $A(X)$, considérons la fonction $\lambda \times 1_{X\setminus F}$, concave s. c. i., et qui majore $\widehat{f^+}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h_+^\varepsilon \in A(X)$, telle que

$$\widehat{f^+} \leqslant h_+^\varepsilon \leqslant \lambda \times 1_{X\setminus F} \ ,$$

d'après le théorème 14, et telle que

$$0 \leqslant \mu(h_+^\varepsilon) - \mu(\widehat{f^+}) < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

d'après la relation $\lim_{\mathfrak{F}} \mu(h) = \mu(\widehat{f^+})$. $h_+^\varepsilon \in A_F^+(X)$, et $\|h_+^\varepsilon\| \leqslant \lambda < 1$:

$$h_+^\varepsilon \in B^+ \quad .$$

Or, en écrivant $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on a pu prendre μ^+ et μ^- maximales au sens de G. CHOQUET. Mais alors $\mu(\widehat{f^+}) = \mu(f^+)$.

On construit de même h_-^ε , pour $\widehat{f^-}$, et en définitive, on a montré que :

$\forall\ f \in \overset{\circ}{B}$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \ell \in E'$, $\exists\ h_+^\varepsilon$, $h_-^\varepsilon \in B^+$ telles que

$$\left|\ell[(h_+^\varepsilon - h_-^\varepsilon) - f]\right| < \varepsilon \quad .$$

Ceci prouve que $B \subset \overline{B^+ - B^+}$ pour $\sigma(E\ ,\ E')$, donc pour la norme. Comme il est clair que $B^+ - B^+ \subset B$, on a l'égalité.

(Pour le cas $A(X)$, au lieu de $\lambda \times 1_{X \setminus F}$, il suffisait de prendre la fonction constante égale à λ .)

C. Q. F. D.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental caractérisant les espaces simpliciaux. Ce théorème résoud le problème, posé par EFFROS dans [15], de caractériser un tel espace directement, et non plus par des propriétés de son dual ; ceci nous sera utile pour les espaces de fonctions continues.

THÉORÈME 15. - Soit E un espace de Banach ordonné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) E est un espace simplicial, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (1) & E^+ \text{ est fermé ;} \\ (2) & E' \text{ est un L-espace de Kakutani.} \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} (1) & E^+ \text{ est fermé ;} \\ (2) & E = E^+ - E^+ \text{ ;} \\ (3) & E \text{ vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;} \\ (4) & \text{La norme est croissante sur } E^+ \text{ ;} \\ (5) & B^+ \text{ est filtrante croissante ;} \\ (6) & B = \overline{B^+ - B^+} \text{ .} \end{cases}$$

(c) Il existe un simplexe X d'un espace localement convexe séparé F tel que E soit isométrique et isomorphe pour l'ordre à $A(X)$ (cas d'un élément unité, où alors, dans (b), B^+ a un sup), ou à $A_{x_0}(X)$, où $x_0 \in \mathcal{E}(X)$ (cas sans élément unité, où B^+ n'a pas de sup).

COROLLAIRE 1. - Si X est un simplexe, et F une face de X, l'espace $A_F(X)$, pour l'ordre naturel et la norme uniforme, est un espace simplicial. De même pour $A(X)$.

COROLLAIRE 2. - Tout simplexe X est isomorphe affinement à un chapeau universel K d'un cône convexe fermé réticulé C, le sommet de C correspondant à un point extrémal arbitraire de X.

Démonstration du corollaire 1. - Cela résulte immédiatement de la proposition 20.

Démonstration du corollaire 2. - Soit $x_0 \in \mathcal{E}(X)$. $A_{x_0}(X)$ est un espace simplicial. Soit K le chapeau universel du dual. $\varphi : x \longmapsto \delta_x : X \longrightarrow K$ est injective (car $A_{x_0}(X)$ sépare X), continue, $\varphi(X)$ est compact, et $\varphi(X)$ est maximisant pour $A^+_{x_0}(X) \xrightarrow{\sim} A^+_0(K)$ (proposition 19), donc contient $\mathcal{E}(K)$ (lemme 17), donc $\varphi(X) = K$.

Démonstration du théorème 15.

(a) $\Longrightarrow$ (c) résulte de la proposition 19.

(c) $\Longrightarrow$ (b) résulte de la proposition 20.

(b) $\Longrightarrow$ (a) :

1° E^+ est fermé.

2° $E = E^+ - E^+$, donc $E^{*+} = E'^+$ (cf. [32]).

La norme est croissante sur E^+, donc $E' = E'^+ - E'^+$ (cf. [23]). E'^+ est réticulé : Si ℓ et $m \in E'^+$, on pose, pour $x \in E^+$,

$$\sup(\ell\ , m)(x) = \sup_{\substack{0 \leqslant y \\ 0 \leqslant z \\ y+z=x}} [\ell(y) + m(z)] \ .$$

Le lemme de décomposition de Riesz prouve immédiatement que $\sup(\ell\ , m)$ est linéaire sur E^+, donc s'étend à E, et est bien le sup de ℓ et m.

Donc E' est réticulé.

3° Soit $\ell \in E'^+$.

$$\|\ell\| = \sup_{x \in B} \ell(x) \geqslant \sup_{x \in B^+} \ell(x)$$

$$\|\ell\| = \sup_{x \in \overline{B^+ - B^+}} \ell(x) = \sup_{x \in B^+ - B^+} \ell(x) = \sup_{y,z \in B^+} [\ell(y) - \ell(z)] \leqslant \sup_{y \in B^+} \ell(y) \ .$$

Donc

$$\|\ell\| = \sup_{x\in B^+} \ell(x) = \lim_{B^+} \ell(x)$$

car B^+ est filtrante croissante.

Donc $\ell \longrightarrow \|\ell\|$ <u>est additive sur</u> E'^+. De plus si $\sup B = e \in E$, $\|\ell\| = \ell(e)$.

4° $\||\ell|\| = \|\ell^+ + \ell^-\| = \|\ell^+\| + \|\ell^-\| \geqslant \|\ell^+ - \ell^-\| = \|\ell\|$. Soit $x \in E^+$,

$$|\ell|(x) = \sup_{\substack{0\leqslant y,z\\ y+z=x}} [\ell(y) - \ell(z)] .$$

Donc

$$\||\ell|\| = \sup_{x\in B^+} \sup_{\substack{0\leqslant y,z\\ y+z=x}} \ell(y-z) = \sup_{\substack{0\leqslant y,z\\ y+z\in B^+}} \ell(y-z)$$

$$\leqslant \sup_{\substack{y\in B^+\\ z\in B^+}} \ell(y-z) = \sup_{u\in B^+-B^+} \ell(u) = \sup_{u\in\overline{B^+-B^+}} \ell(u) = \|\ell\| .$$

Donc $\||\ell|\| = \|\ell\|$. Donc E' <u>est un</u> L-<u>espace</u>.

C. Q. F. D.

Donnons une forme plus faible de la condition (b-5), plus facile à vérifier dans la pratique.

PROPOSITION 21. - <u>Sous les conditions</u> (b)-(1, 2, 3, 4, 6) <u>du théorème</u> 15, <u>la condition</u> (5) : B^+ <u>est filtrante croissante</u>, <u>est équivalente à la condition</u> :

(5') <u>Si</u> $x, y \in E^+$, <u>et</u> $\|x\|, \|y\| < 1$, $\exists z \in B^+$ <u>tel que</u> $x, y \leqslant z$.

La condition (5) ne sert qu'à montrer l'additivité de la norme sur E'^+. Si nous montrons que (5') entraîne cette additivité, alors (5) sera vraie d'après le théorème 15. Et (5) $\Longrightarrow$ (5'), bien sûr.

Soient donc $\ell, m \in E'^+$. $\|\ell + m\| \leqslant \|\ell\| + \|m\|$. Soient $\lambda < 1$, et $\varepsilon > 0$. On sait que

$$\|\ell\| = \sup_{x\in B^+} \ell(x) \quad \text{et} \quad \|m\| = \sup_{y\in B^+} \ell(y) .$$

Soient $x, y \in B^+$ tels que $\ell(x) > \|\ell\| - \varepsilon$ et $m(y) > \|m\| - \varepsilon$. $\exists z \in B^+$ tel que $z \geqslant \lambda x$ et λy. Donc

$$\|m + \ell\| \geqslant (m + \ell)(z) \geqslant \ell(\lambda x) + m(\lambda y) > \lambda(\|\ell\| + \|m\| - 2\varepsilon) , \quad \forall \varepsilon > 0 , \quad \forall \lambda < 1 .$$

D'où $\|m + \ell\| = \|\ell\| + \|m\|$.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant aborder les rapports entre M-espaces de Kakutani et espaces simpliciaux.

EFFROS a donné une caractérisation des espaces simpliciaux à élément unité qui sont des M-espaces.

THÉORÈME 16 (EFFROS). - Soit E un espace simplicial à élément unité. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) Z est fermé (Z est le spectre de E) ;
(b) $L(K)$ est un simplexe de Bauer ;
(c) K est un simplexe de Bauer ;
(d) $\mathcal{E}(E'^{+})$ est fermé ;
(e) E est isomorphe à $C(\overline{Z})$ pour l'ordre (et pour la norme) ;
(f) E est un M-espace de Kakutani (à élément unité).

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
& (d) \arrow[dr, Rightarrow] & & (c) \arrow[dd, Rightarrow] \\
(f) \arrow[ur, Rightarrow] & & (a) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & \\
& (e) \arrow[ul, Rightarrow] & & (b) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Elle ne présente aucune difficulté.

PROPOSITION 22. - Soit E un M-espace de Kakutani. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Z est fermé ;
(b) $L(K)$ est fermé ;
(c) $L(K)$ est une base compacte de E'^{+} ;
(d) E a un élément unité.

(c) $\Longrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (a) d'après la proposition 2.

(b) $\Longrightarrow$ (c) d'après la proposition 17.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d) est évident.

C. Q. F. D.

On peut renforcer le théorème 16, en caractérisant les espaces simpliciaux (a priori sans unité) qui sont des M-espaces de Kakutani à élément unité :

PROPOSITION 23. - Soit E un espace simplicial. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Z <u>est fermé</u> ;
(b) E <u>est isomorphe à</u> $C(\overline{Z})$;
(c) E <u>est un</u> M-<u>espace de Kakutani à élément unité</u>.

(b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a) est clair.

De (a), on déduit que $\mathcal{E}(E'^{+})$ est fermé. Alors, d'après la proposition 2, $L(K)$ est fermé ; donc, d'après la proposition 17, E possède un élément unité, et on applique alors le théorème 16.

C. Q. F. D.

Le théorème suivant, qui généralise le théorème 16 au cas où E n'a pas d'élément unité, résoud partiellement un problème posé par EFFROS dans [15].

THÉORÈME 17. - <u>Soit</u> E <u>un espace simplicial</u>, <u>et posons</u> $\Gamma = \mathcal{E}(E'^{+}) \cap K$. <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $\overline{Z} \subset \Gamma$;
(b) Γ <u>est fermé</u> (pour $\sigma(E', E)$) ;
(c) $\mathcal{E}(E'^{+})$ <u>est fermé</u> (pour $\sigma(E', E)$) ;
(d) E <u>est un</u> M-<u>espace de Kakutani</u> ;
(e) E <u>est isomorphe à un espace</u> K-<u>canonique sur</u> $\overline{Z}$.

<u>Démonstration</u>.

(d) $\Longrightarrow$ (e) résulte du théorème 5.

(e) $\Longrightarrow$ (c) résulte du lemme 9.

(c) $\Longrightarrow$ (a) est clair.

(a) $\Longrightarrow$ (b) , car Γ est l'enveloppe semi-équilibrée de $\overline{Z}$ compact.

(b) $\Longrightarrow$ (d) : On sait que $E \xrightarrow{\sim} A_0(K)$, et $\|f\|_{A_0(K)} = \sup_{\overline{Z}} |f|$. Donc

$$E \xrightarrow{\sim} A_0(K) \xrightarrow{\subset} C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$$

est une injection qui transporte l'ordre et la norme.

Pour montrer que $E \xrightarrow{\sim} C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$, et donc que E est un M-espace de Kakutani, il suffit de montrer que leurs duaux sont les mêmes. Or, d'après le théorème 3, $E' \xrightarrow{\sim} M_Z(\overline{Z})$. Posons $F = C_Z(\overline{Z}, \lambda, u)$.

Soit $\varphi : F' \longrightarrow E'$ l'application restriction $(E \subset F)$.

Soit $\psi : E' \longrightarrow F'$ l'application composée : $E' \xrightarrow{\sim} M_Z(\overline{Z}) \longrightarrow F'$ définie par : $\ell \longmapsto \mu_\ell \longmapsto \psi(\ell)$, où $\psi(\ell)(f) = \mu_\ell(f)$.

$\varphi \circ \psi = 1_{E'}$, donc ψ est injective.

$\forall\, \alpha \in F'$, $\exists\, \mu \in M(\overline{Z})$ telle que, $\forall\, f \in F$, on ait

$$\mu(f) = \alpha(f) \qquad \text{(HAHN-BANACH)}$$

(si $0 \in \overline{Z}$, on peut supposer $\mu(\{0\}) = 0$). Si $\mu \geqslant 0$, on définit $\widetilde{\mu}$ par :

$$\forall\, \varphi \in C(\overline{Z}) \ , \quad \widetilde{\mu}(\varphi) = \int_Z \varphi \, d\mu + \int_{\overline{Z}\setminus Z} \lambda(y)\, \varphi[u(y)]\, d\mu(y) \quad .$$

$\widetilde{\mu}$ est $\geqslant 0$. Si $\mu = \mu^+ - \mu^-$, on pose $\widetilde{\mu} = \widetilde{\mu^+} - \widetilde{\mu^-}$. $\widetilde{\mu} \in M(\overline{Z})$, et il est clair que $\widetilde{\mu}_{|F} = \alpha$, et que $\widetilde{\mu}(1_{\overline{Z}\setminus Z}) = 0$. Donc $\widetilde{\mu} \in M_Z(\overline{Z}) \xrightarrow{\sim} E'$, et $\psi(\widetilde{\mu}) = \alpha$.

ψ est donc surjective, d'où $E' \xrightarrow{\sim} F'$, et $E = F$.

C. Q. F. D.

DÉFINITION 22. - Si X est un simplexe, et si $x_0 \in \mathcal{E}(X)$, on dira que x_0 est K-normal si l'espace $A_{\{x_0\}}(X)$ est réticulé.

Voici un corollaire important du théorème 17 :

COROLLAIRE.

1° Soient X un simplexe, et $x_0 \in \mathcal{E}(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) x_0 est K-normal ;

(b) L'enveloppe semi-équilibrée de $\mathcal{E}(X)$ relativement à x_0 (c'est-à-dire $x_0 + \bigcup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \lambda[\mathcal{E}(X) - x_0]$) est fermée ;

(c) La restriction de $A_{\{x_0\}}(X)$ à $\overline{(\mathcal{E}(X) \setminus \{x_0\})}$ est un espace K-canonique.

2° Si un simplexe X possède un point extrémal K-normal, alors $\mathcal{E}(X)$ est un borélien, et les mesures maximales au sens de G. CHOQUET sont celles portées par $\mathcal{E}(X)$.

Cela résulte immédiatement de la démonstration du corollaire 2 du théorème 15, et du théorème 17.

Remarque 19. - La réciproque de 2° est fausse. En effet, il existe dans $\ell^2(\underset{\sim}{N})$ un simplexe X (pour la topologie faible) tel que $\overline{\mathcal{E}(X)} = X$. Si $x_0 \in \mathcal{E}(X)$, il est clair que l'enveloppe semi-équilibrée de $\mathcal{E}(X)$ par rapport à x_0 ne peut être X entier, donc ne peut être fermée. Pourtant X est métrisable, donc $\mathcal{E}(X)$ est un G_δ , et les mesures maximales sont celles portées par $\mathcal{E}(X)$ (cf. [31]).

Remarque 20. - La démonstration du corollaire 2 du théorème 15 suggère une étude de la "catégorie" des simplexes. Par exemple, on peut définir le quotient d'un simplexe X par une face F : X/F est le chapeau universel K de $[A_F(X)]'^+$. On pourrait définir des morphismes de simplexes, des produits de simplexes, etc., une telle étude permettant celle de la "catégorie" des espaces simpliciaux. Nous ne le ferons pas ici.

Enonçons enfin, avant d'appliquer cette étude aux espaces de fonctions continues, un théorème qui fait le pendant du théorème 6, et qui est dû à EDWARDS (cf. [14]) (nous avons utilisé ce résultat pour démontrer la proposition 17).

THÉORÈME 18. - Soit X un convexe compact d'un espace localement convexe séparé E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) X est un simplexe ;

(b) L'espace $A(X)$, pour l'ordre naturel, vérifie le lemme de décomposition de Riesz ;

(c) L'espace $A(X)$ vérifie le lemme de décomposition faible : $\forall\, f_i < g_j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, $\exists\, h \in A(X)$ telle que

$$f_i < h < g_j, \qquad \forall\, i, j.$$

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b) résulte de la proposition 20.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est évident.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Soient $f_1, \ldots, f_n \in A(X)$, et $\varphi = \sup(f_1, \ldots, f_n)$.

$$\hat{\varphi} = \inf_{\substack{h \in A(X) \\ h \geqslant \varphi}} h = \inf_{\substack{h \in A(X) \\ h > \varphi}} h$$

est affine, car l'ensemble des $h \in A(X)$ qui majorent φ est filtrant décroissant d'après le lemme de décomposition faible.

Soit f convexe continue. Il existe des $\varphi_i = \sup(f_1^i, \ldots, f_{n_i}^i)$, où $f_K^i \in A(X)$, qui convergent uniformément en croissant vers f.

$$\hat{f}(x) = \sup_{\text{barycentre de } \mu = x} \mu(f) = \sup_\mu[\sup_i \mu(\varphi_i)] = \sup_i[\sup_\mu \mu(\varphi_i)] = \sup_i \widehat{\varphi_i}(x)$$

qui est convexe. Comme $\hat{f}$ est concave, $\hat{f}$ est donc affine, et X est un simplexe (cf. [11]).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Soit X un convexe compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) X est un simplexe ;

(b) X vérifie le théorème d'Edwards (théorème 14) ;

(c) X vérifie le théorème d'Edwards faible : Si $-f$ et g sont concaves s. c. i. et $f < g$, $\exists\, h \in A(X)$ telle que $f < h < g$.

COROLLAIRE 2. - Soit X un convexe compact. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) X est un simplexe de Bauer ;

(b) $\mathcal{E}(X)$ est fermé, et $A(X)$ vérifie le lemme de décomposition de Riesz (resp. le lemme faible).

Donnons une définition, qui va nous permettre de représenter fonctionnellement certains espaces simpliciaux :

Soient B un espace compact, et $\pi : B \longrightarrow M^+(B)$ une application **scalairement de 1re classe**, nulle en au plus un point, et telle que

(α) $Z = \{x \mid \pi(x) = \delta_x\}$ est dense et borélien ;

(β) $\forall\, x \in B$, $\pi(x)$ est portée par Z , et de masse inférieure à 1 .

DÉFINITION 23. - On dit que le sous-espace de $C(B)$:

$$\{f \mid \forall\, x \in B ,\ f(x) = \pi(x)(f)\} ,$$

est un espace S-canonique s'il sépare les points de B . On le note alors

$$C^Z(B , \pi) .$$

On dit que c'est un espace S-canonique fort si de plus,

$$\forall\, x \in Z ,\ \exists\, f \in C^Z(B , \pi) \text{ telle que } 0 \leqslant f \leqslant 1 , \text{ et } f(x) = 1 .$$

On dit qu'il est régulier si π est borélienne (exemple B métrisable). Tout espace K-canonique est S-canonique régulier.

DÉFINITION 24. - Nous dirons qu'un espace simplicial E est "à bon spectre" si, K étant le chapeau universel de E'^+ , toute mesure maximale sur K est portée par $\mathcal{E}(K)$, qu'on suppose borélien.

Nous allons pouvoir donner une représentation fonctionnelle des espaces simpliciaux à bons spectres.

THÉORÈME 19.

1° Tout M-espace de Kakutani est à bon spectre.

2° Tout espace simplicial séparable est à bon spectre.

3° Tout espace simplicial à bon spectre E est isomorphe pour l'ordre et isométrique à un espace S-canonique fort $C^Z(\overline{Z}, \pi)$, et il existe une isométrie de Banach réticulés entre E' et $M_Z(\overline{Z})$ (Z est le spectre de E).

4° Si E est séparable, l'espace $C^Z(\overline{Z}, \pi)$ est régulier et vérifie de plus : $\forall x \in Z$, $\exists f \in C^Z(\overline{Z}, \pi)$ telle que $f(x) = 1$, $0 \leqslant f(y) < 1$, $\forall y \neq x$.

1° résulte du théorème 3.

2° Si E est séparable, K est faiblement métrisable, et toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(K)$ qui est un G_δ.

3° (a) $\{\ell \in E'^+ \mid \|\ell\| = 1\} = L(K)$ est un G_δ de K, et tout $\ell \in L(K)$ possède une mesure maximale, de résultante ℓ, portée par Z, et tout point $\ell \in K$ a une mesure maximale portée par $Z \cup \{0\}$. En effet,

$$Z \cup \{0\} = \mathcal{E}(K) \quad .$$

D'où l'isomorphisme de Banach réticulés entre E' et $M_Z(\overline{Z})$.

(b) Soit F l'espace $C^Z(\overline{Z}, \pi)$. $E \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{\subset} C(\overline{Z})$. Soit E' le dual de E. $\tilde{\pi} : E' \xrightarrow{\sim} M_Z(\overline{Z})$ prolonge $\pi : K \longrightarrow M_Z^+(\overline{Z})$. Soit $\psi : E' \longrightarrow F'$ l'application $\ell \longrightarrow \psi(\ell)$ définie par $\psi(\ell)(f) = \pi(\ell)(f)$, et soit $\varphi : F' \longrightarrow E'$ l'application restriction.

Il est clair que $\varphi \circ \psi = 1_{E'}$, et donc que ψ est injective.

Montrons que ψ est surjective. Soit $\ell \in F'$. Soit ν une mesure de Radon sur $\overline{Z}$, telle que $\nu_{|F} = \ell$ (HAHN-BANACH). Si ν est positive, posons

$$\forall \varphi \in C(\overline{Z}) : \qquad \tilde{\nu}(\varphi) = \int_Z \varphi(x)\, d\nu(x) + \int_{\overline{Z}\setminus Z} \left[\int_{\overline{Z}} \varphi(y)\, d\pi(x)(y)\right] d\nu(x)$$

ce qui a un sens car $x \rightarrow \pi(x)$ est scalairement de 1re classe ($\int_{\overline{Z}} \varphi(y)\, d\pi(x)(y)$ est limite uniforme de différences de deux fonctions s. c. s. ; cf. [11]).

$$\varphi \geqslant 0 \implies \tilde{\nu}(\varphi) \geqslant 0 \quad ,$$

donc $\tilde{\nu} \in M^+(\overline{Z})$. Si ν n'est pas positive, on posera $\tilde{\nu} = \widetilde{\nu^+} - \widetilde{\nu^-}$.

Si $f \in F$,

$$\tilde{\nu}(f) = \int_Z f(x)\, d\nu(x) + \int_{\overline{Z}\setminus Z} f(x)\, d\nu(x) = \nu(f) = \ell(f) \quad ,$$

par définition de F. Donc $\tilde{\nu}_{|F} = \ell$.

$$\tilde{\nu}(1_{\overline{Z}\setminus Z}) = \int_Z 0 \times d\nu(x) + \int_{\overline{Z}\setminus Z}\left[\int_{\overline{Z}} 1_{\overline{Z}\setminus Z}(y)\ d\pi(x)(y)\right] d\nu(x) = 0$$

car $\pi(x)$ est portée par Z . Donc $\tilde{\nu} \in M_Z(\overline{Z})$, et $\psi[\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\nu})] = \ell$. Donc ψ est surjective, et $E' = F'$. Par suite, $E = F$ (HAHN-BANACH). $C^Z(\overline{Z}, \pi)$ est S-canonique fort, d'après le corollaire 2 du théorème 14.

4° Cela résulte des travaux de BOBOC, CORNEA et DAVIES (cf. [3] et [12]).

C. Q. F. D.

10. Le problème de Dirichlet pour un espace simplicial.

PROPOSITION 24. - *Soient* X *un espace compact, et* H *un sous-espace fermé, séparant de* $C(X)$, *contenant la fonction* 1 . *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) *Pour l'ordre naturel,* H *vérifie le lemme de décomposition de Riesz (resp. le lemme faible)* ;

(b) *Pour la norme uniforme et l'ordre naturel,* H *est un espace simplicial*.

(b) $\Longrightarrow$ (a) est clair.

(a) $\Longrightarrow$ (b) : La norme uniforme est croissante sur H^+ , donc $H' = H'^+ - H'^+$. $H = H^+ - H^+$, H^+ est fermé, donc $H'^+ = H^{*+}$ (cf. [23]). Donc, si

$$K = \{\ell \in H'^+ \mid \|\ell\| \leqslant 1\} ,$$

K est un chapeau universel de H'^+ , car $L(K) = \{\ell \in H'^+ \mid \ell(1) = 1\}$ est une base compacte de H'^+ . Donc, d'après le théorème 13, $A[L(K)] \xrightarrow{\sim} H$, et d'après le théorème 18, $L(K)$ est un simplexe, donc H'^+ est réticulé.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 20. - *Soit* H *un sous-espace fermé, séparant de* $C(X)$, *contenant* 1 . *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(a) H *est un espace simplicial, et* $E(H)$ *est fermé* ;

(b) H *vérifie le lemme de Riesz, et* $E(H)$ *est fermé* ;

(c) H *est réticulé* ;

(d) $r_H(H) = C[S(H)]$.

Cela résulte immédiatement du théorème 16 et de la proposition 24 (ou du corollaire 2 du théorème 18).

COROLLAIRE (Théorème de Stone-Weierstrass <u>fort</u>). - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace séparant de</u> $C(X)$, <u>fermé contenant les constantes</u>. <u>Si</u> H <u>vérifie le lemme de décomposition de Riesz</u>, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) $E(H) = X$;

(b) $H = C(X)$;

(c) H <u>est un "sous-espace réticulé" de</u> $C(X)$.

<u>Remarque</u> 21. - Par analogie avec le corollaire du théorème 7 (H réticulé), on pourrait penser que la condition

$$S(H) = X$$

équivaut aux précédentes. Il n'en est rien, comme le prouve l'exemple où X est un simplexe à points extrémaux partout denses, et $H = A(X)$ (cf. [31]). Cela tient à ce que la condition " H réticulé" implique que $E(H) = S(H)$.

<u>Exemple</u>. - Soient X un espace compact, $\mu_1 , \dots , \mu_n$ n mesures $\geqslant 0$, de masses 1 , diffuses (ne chargeant aucun point), et soient $a_1 , \dots , a_n$ n points distincts, non isolés. Posons

$$H = \{f \mid \mu_i(f) = f(a_i) , \quad i = 1 , 2 , \dots , n\} .$$

Alors H est un espace simplicial à élément unité (la fonction 1),

$$E(H) = X \setminus \{a_1 , a_2 , \dots , a_n\} , \quad S(H) = X .$$

$H = \hat{H}$ (cf. définition 13), D_H est l'ensemble des sous-espaces fermés de $C(X)$ contenant H (codim $H = n$) , H' est isomorphe pour l'ordre et la norme (isométrie) à l'espace des mesures qui ne chargent pas $\{a_1 , \dots , a_n\}$.

PROPOSITION 25. - <u>Soit</u> H <u>un sous-espace fermé de</u> $C(X)$, <u>tel que</u> :

(D) $H = H^+ - H^+$;

(DR) H <u>vérifie le lemme de décomposition de Riesz</u> ;

(B) $B \subset \overline{B^+ - B^+}$ (où B est la boule unité de H) ;

(F') B^+ <u>est faiblement filtrante croissante</u>, <u>c'est-à-dire</u> $\forall f , g$ <u>telles que</u> $0 \leqslant f , g < 1$, $\exists h \in B^+$ <u>telle que</u>

$$\sup(f , g) \leqslant h .$$

<u>Alors</u> H <u>est</u>, <u>pour l'ordre naturel et la norme uniforme</u>, <u>un espace simplicial</u>. <u>La réciproque est vraie</u>.

Cela résulte immédiatement du théorème 15 et de la proposition 21. On voit ainsi, en comparant à la proposition 24, que la présence de la fonction 1 dans H réalise d'un seul coup les conditions (D), (B) et (F') (et même (F)). Bien entendu, le lemme faible de Riesz suffit pour la validité de cette proposition.

PROPOSITION 26. - *Soit* H *un sous-espace fermé et séparant de* $C(X)$, *qui est un espace simplicial* (c'est-à-dire qui vérifie (D), (DR), (B), (F')). *Soit* $Z = E(H^+)$ *la frontière de Choquet de* H^+ . *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(a) H *est réticulé* ;

(b) $\forall\, y \in \overline{Z}$, $\exists\, x \in Z$ et $\lambda \in [0 , 1]$ *tel que* $f(y) = \lambda f(x)$, $\forall\, f \in H$.

C'est un corollaire immédiat du théorème 17.

Dans le cas où l'espace H est un espace simplicial qui n'est pas réticulé, le problème de Dirichlet peut se résoudre si H est à bon spectre. Ce sera le cas par exemple si X est métrisable.

THÉORÈME 21. - *Soient* X *un compact métrisable, et* H *un sous-espace fermé et séparant de* $C(X)$, *qui est un espace simplicial. Soient* Z *la frontière de Choquet* $E(H^+)$ *de* H^+ , $S(H^+)$ *sa frontière de Šilov. Alors la restriction*

$$H \longrightarrow C(\overline{Z})$$

est une isométrie d'espaces simpliciaux de H *sur un espace* S-*canonique fort et régulier*

$$C^Z(\overline{Z} , \pi) \quad ,$$

qui transporte l'ordre.

Cela résulte immédiatement du théorème 19.

Remarque 22. - Bien entendu, si X n'est pas métrisable, on pourra supposer que toute mesure maximale est portée par Z . Par exemple, ce sera le cas *si* Z *est* K-*souslinien* (cf. [11]). Mais on ne sera plus assuré que $C^Z(\overline{Z} , \pi)$ est régulier.

PROPOSITION 27. - *Sous les hypothèses du théorème* 21, *supposons de plus que* H *soit linéairement séparant. Alors* $Z = E(H^+) = L(H)$, *frontière linéaire de* H , *et,* $\forall\, x \in \overline{Z} \setminus Z$, $\pi(x)$ *n'est pas à support ponctuel. De plus,* H *possède un élément unité*.

C'est évident à partir de la condition de séparation linéaire et de la proposition 17.

11. Applications à la théorie du potentiel.

H. BAUER, dans [2], BOBOC et CORNEA, dans [3], et EDWARDS, dans [13], ont donné des applications à la théorie du potentiel de leurs résultats sur les frontières d'ensembles de fonctions. Nous donnons ici un aperçu de leurs travaux.

Nous nous placerons dans le cadre de l'axiomatique de Brelot : Y est un espace localement compact, non compact, connexe et localement connexe, à base dénombrable. Nous supposons vérifiés les axiomes 1, 2, 3 tels qu'ils figurent dans la thèse de Mme HERVÉ (cf. [18]), nous postulons l'existence d'un potentiel > 0 dans Y, et nous supposons que la fonction 1 est harmonique.

On trouvera, dans [18], le lemme suivant :

LEMME 25. - Tout compact X de Y possède un système fondamental de voisinages formé d'ouverts réguliers.

THÉORÈME 22. - Soit ω un ouvert relativement compact de Y, d'adhérence $\overline{\omega} = X$. Soit H l'espace des fonctions harmoniques dans ω, continues sur X. On suppose que :

(S) H sépare X ;

(G) Toute fonction de H est limite uniforme de fonctions harmoniques sur un voisinage de X ;

(K) Pour tout point x_0 régulier de $\partial\omega$, $\exists\, h \in H$ qui a un maximum strict en x_0 ;

(d) ω est déterminant.

Alors :

1° H est un espace simplicial à élément unité et à bon spectre ;

2° La frontière de Choquet de H est exactement l'ensemble $\mathcal{R}$ des points réguliers de $\partial\omega$;

3° Les traces des fonctions de H sur $\overline{\mathcal{R}}$ forment un espace S-canonique fort sur $\overline{\mathcal{R}}$.

Démonstration.

1° Il suffit de montrer que H vérifie le lemme de Riesz faible. Soient

$$\varphi = \sup(f_1 , \ldots , f_n) < \psi = \inf(g_1 , \ldots , g_p) , \quad f_i \text{ et } g_j \in H .$$

Soit $k = \inf(\psi - \varphi) > 0$. Il existe un voisinage V_1 de X , et $f'_1 , \ldots , f'_n$, $g'_1 , \ldots , g'_p$ harmoniques dans V_1 , telles que, si $\varphi' = \sup(f'_1 , \ldots , f'_n)$ et $\psi' = \inf(g'_1 , \ldots , g'_p)$,

$$|\varphi - \varphi'| < \frac{k}{4} \quad \text{et} \quad |\psi - \psi'| < \frac{k}{4} \quad \text{sur } X \ .$$

Donc, il existe un ouvert V_2 régulier tel que

$$X \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1 \ , \text{ et } \ \varphi' < \psi' \ \text{ sur } \overline{V_2} \ .$$

Soit $\theta = \frac{\varphi' + \psi'}{2}\Big|_{\partial V_2}$, et soit $H_\theta^{V_2}$ la solution du problème de Dirichlet pour V_2 et θ . Alors

$$h = H_\theta^{V_2}|_X \in H \ , \text{ et } \ \varphi < h < \psi \ .$$

2° La fonction 1 étant dans H , $E(H) = E(H^+)$ (car $H \xrightarrow{\sim} A[L(K)]$, K chapeau universel de H'^+).

(a) Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des points réguliers de $\partial\omega$. ω étant déterminant, $\forall\, y \in \omega$, ρ_y^ω , mesure harmonique (au sens de la théorie du potentiel) de y , est portée par $\mathcal{R}$ (cf. [18]).

Montrons que $E(H) \supset \mathcal{R} \Longrightarrow E(H) = \mathcal{R}$. En effet, si $y \in \omega$, ρ_y^ω est portée par $E(H)$, donc est maximale. Montrons que, si $y \longrightarrow x \in E(H)$, $y \in \omega$, alors $\rho_y^\omega \longrightarrow \delta_x$. Cela résulte du lemme suivant :

LEMME 26. - <u>Si</u> K <u>est un simplexe</u>, et μ_x <u>la mesure maximale d'un point</u> x <u>de</u> K , <u>l'application</u> $x \longrightarrow \mu_x$ <u>est vaguement continue aux points de</u> $\mathcal{E}(K)$.

(b) Montrons que $E(H) \supset \mathcal{R}$. Cela résulte de l'hypothèse (K) : la seule mesure équivalente à δ_{x_0} , si $x_0 \in \mathcal{R}$, ne peut être que δ_{x_0} .

Donc $E(H) = \mathcal{R}$.

3° Cela résulte immédiatement du théorème 21, car X est métrisable.

C. Q. F. D.

<u>Remarque</u> 23.

1° L'hypothèse (K) est vraie dans le cas classique d'un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$ (cf. les travaux de KELDYŠ : [22]), et même dans des cas plus généraux (cf. BOBOC et CORNEA [3], et les travaux de BRELOT (2)).

---

(2) Voir en particulier : BRELOT (Marcel). - Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, J. Anal., Jésusalem, t. 8, 1960/61, p. 273-288.

2° Dans le cas classique d'un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$, il est facile de voir que $\overline{\mathcal{R}} = \partial\omega$ si $\omega = \overset{\circ}{X}$ (cf. [2]).

COROLLAIRE (BAUER). - Sous les hypothèses du théorème 22, si de plus

$$\overline{\mathcal{R}} = \partial\omega \quad ,$$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) ω est régulier ;

(b) H est réticulé.

Cela résulte immédiatement du théorème 16.

Un deuxième type d'applications à la théorie du potentiel des résultats sur les frontières est dû à LION (cf. [25] et [26]), et concerne la frontière de Choquet de l'image de $C(X)$ (X compact métrisable) par une famille résolvante $(R_\lambda)_{\lambda>0}$. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de LION.

12. Conclusion et problèmes ouverts.

Nous avons pu résoudre le problème de Dirichlet de BAUER dans un certain nombre de cas, mais après avoir modifié la frontière, dans chaque cas. Il semble, en définitive, que la bonne manière de formuler le problème de Dirichlet soit la suivante:

Etant donné un sous-espace, séparant, fermé H de $C(X)$ (X compact), peut-on caractériser la structure d'espace de Banach (resp. d'espace de Banach ordonné si $H^+ \neq \{0\}$) de H au moyen des traces de ses éléments sur un compact minimal convenable de X ?

C'est le problème que nous avons résolu dans les cas suivants :

(1) $1 \in H$, H est réticulé (théorème 7),

(2) H est linéairement séparant et réticulé (théorème 10),

(3) $1 \notin H$, H est réticulé (théorème 12),

(4) H est un espace simplicial, et X est métrisable (théorème 21).

Bien entendu, le premier problème est de trouver d'autres cas où l'on saura caractériser H par une frontière. Une première direction, mais en abandonnant la condition de fermeture pour H , peut être trouvée à partir des travaux de FUCHS sur les "antilattices" : espaces ordonnés vérifiant le lemme de Riesz et la condition supplémentaire :

$$\text{Si } \inf(x , y) \text{ existe, c'est } x \text{ ou } y$$

(exemple : les polynômes sur $[0 , 1]$).

Un théorème de représentation des espaces normés "antilattices" existe :

Un tel espace est un sous-espace de $C(X)$, X compact, ordonné pour l'ordre strict :

$$f < g \iff f \equiv g \text{ ou } f(x) < g(x) , \ \forall x .$$

Citons les problèmes que soulève directement l'étude précédente.

1° Les M-espaces de Kakutani.

La proposition 5 est-elle valable pour un espace K-canonique quelconque ?

2° Les espaces simpliciaux.

(a) Sous quelle condition simple, un espace S-canonique fort est-il régulier ? Un espace S-canonique est-il simplicial ? Peut-on généraliser la proposition 5 aux espaces S-canoniques ?

(b) Un espace simplicial est-il "souvent" à bon spectre, et quand peut-on supprimer l'hypothèse "métrisable" dans le théorème 21 ?

(c) Dans le théorème 15, peut-on remplacer la condition $B = \overline{B^+ - B^+}$ par $B = B^+ - B^+$? (C'est vrai pour un M-espace.)

(d) A-t-on, pour les espaces simpliciaux, une caractérisation agréable de $\mathcal{E}(E'^+)$ remplaçant le lemme 9 ?

3° Les espaces de fonctions continues et les frontières.

(a) Peut-on trouver des conditions, plus maniables que celles de la proposition 25, suffisantes pour que H soit un espace simplicial ?

(b) Le problème de Dirichlet généralisé de la définition 5 peut-il être résolu complètement dans des cas intéressants ? L'ensemble

$$C_H = \{V \text{ sous-espace de } C(X) \mid V \supset H , \ V \text{ est fermé, } E(V) = E(H)\}$$

est-il inductif ? A-t-il des éléments maximaux ? Peut-on les caractériser ?

4° Applications à la théorie du potentiel.

(a) L'espace $H(\omega)$ des fonctions harmoniques dans ω , continues sur $\overline{\omega}$, est-il maximum dans $D_{H(\omega)}$? Est-il direct dans $C(\overline{\omega})$? (C'est vrai si ω est régulier.) L'espace $H(\omega)_{|\partial\omega}$ est-il direct dans $C(\partial\omega)$? (C'est vrai si $\partial\omega$ ne possède qu'un nombre fini de points irréguliers.)

(b) Sous quelles conditions simples, les hypothèses du théorème 22 sont-elles vérifiées ? (Cf. note (2) ci-dessus.)

5° Les convexes compacts.

(a) Il serait probablement utile de développer l'étude de la "catégorie" des simplexes, et par là même celle des espaces simpliciaux.

(b) A quelle condition suffisante, dans un simplexe, l'application $x \longrightarrow \mu_x$ est-elle borélienne ?

(c) La proposition 10 peut-elle s'étendre à un simplexe qui ne soit pas de Bauer? Plus précisément, X étant un fermé d'un convexe compact Y, contenant $\mathcal{E}(Y)$, et tout point de X ne possédant qu'une seule mesure maximale, à quelle condition sur H_X, espace des traces sur X des fonctions de $A(Y)$, Y est-il un simplexe ? C'est un problème important pour l'étude des espaces de fonctions continues sur un compact.

(d) Peut-on obtenir des théorèmes de séparation, analogues à celui d'EDWARDS (théorème 14), dans le cas d'un convexe compact quelconque ?

Par exemple, on peut, en utilisant sa méthode, montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 28. - Soient X un espace compact, S un sous-ensemble fermé de $C(X)$ tel que $S + \mathbb{R} \subset S$. Soit Σ un sous-ensemble de fonctions s. c. i., tel que $\Sigma + \mathbb{R} \subset \Sigma$. Supposons que :

(α) $\forall f \in S$, $g \in \Sigma$, $\inf(f, g) \in \Sigma$;

(β) $\forall f \in \Sigma$, l'ensemble $\mathcal{S}_f = \{h \in S \mid h < f\}$ est non vide, filtrant croissant, et $f = \sup \mathcal{S}_f$.

Alors, $\forall f \in \Sigma$ et $\forall g$ s. c. s. telles que $g \leqslant f$, $\exists h \in S$ telle que

$$g \leqslant h \leqslant f .$$

COROLLAIRE. - Soient X un convexe compact, et f concave s. c. i. sur X. $\forall g$ s. c. s., telle que $g \leqslant f$, il existe h concave continue, telle que :

$$g \leqslant h \leqslant f .$$

13. Appendice. Le théorème de Boboc, Cornea et Davies.

THÉORÈME 23. - Soient X un simplexe, et F une face de X (convexe, fermée), qui est un G_δ. Alors il existe $f \in A(X)$ telle que :

$$f = 0 \text{ sur } F , \qquad 0 < f \leqslant 1 \text{ sur } X \setminus F .$$

F étant un G_δ , on déduit du lemme 24 qu'il existe des $(f_n)_{n\geq 1}$ de $A(X)$ telles que :

(1) $\|f_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$;

(2) $F = \bigcap_{n\geq 1} \{x \mid f_n(x) \leqslant 0\}$.

Posons :

$$\varphi_n = \sup(0\ ,\ f_n)\ ,\ \text{convexe s. c. s.}$$

$$\psi_n = \frac{1}{2^n} \times 1_{X\setminus F}\ ,\ \text{concave s. c. i.}$$

$\varphi_n \leqslant \psi_n$, donc, d'après le théorème 14, $\exists\ h_n \in A(X)$ telle que

$$\varphi_n \leqslant h_n \leqslant \psi_n \quad .$$

Donc :

$$f_n \leqslant h_n\ , \qquad h_n = 0 \ \text{ sur } \ F\ , \qquad 0 \leqslant h_n \leqslant \frac{1}{2^n} \quad .$$

Posons $f = \sum_{n\geq 1} h_n$. $f \in A(X)$, $f = 0$ sur F , $0 \leqslant f \leqslant 1$ sur X . Si $x \in X \setminus F$, $\exists$ n tel que $f_n(x) > 0$; alors

$$f(x) \geqslant h_n(x) \geqslant f_n(x) > 0 \quad .$$

Donc $f > 0$ sur $X \setminus F$.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.

[2] BAUER (Heinz). - Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 7, 23 p.

[3] BOBOC (N.) et CORNEA (A.). - Cônes des fonctions continues sur un espace compact, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2564-2567.

[4] BONY (Jean-Michel). - Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 3, 1964, n° 5, 7 p.

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 2 : Espaces de Riesz. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind. 1175 ; Bourbaki, 13).

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2, 3-5. - Paris, Hermann, 1953-1955 (Act. scient. et ind. 1189, 1229 ; Bourbaki, 15, 18).

[7] BRELOT (Marcel). - Eléments de la théorie classique du potentiel, 3e édition. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1965 (Les Cours de Sorbonne).

[8] BRELOT (Marcel). - Lectures on potentiel theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[9] CHOQUET (Gustave). - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, Proceedings of the international congress of mathematicians [1962. Stockholm], p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[10] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., Série 9, t. 36, 1957, p. 179-189.

[11] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[12] DAVIES (E. B.). - Exposed sets in convexity theory (à paraître).

[13] EDWARDS (David Albert). - Minimum-stable wedges of semicontinuous functions, Colloquium on convexity [1965. Copenhague] (à paraître).

[14] EDWARDS (David Albert). - Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, 1965, p. 2798-2800.

[15] EFFROS (Edward G.). - Structure in simplexes, Aarhus University, 1965 (multigr.).

[16] FULLERTON (R. E.). - Geometrical characterizations of certain function spaces, Proceedings of the international symposium on linear spaces [1960. Jerusalem], p. 227-236. - Jerusalem, Jerusalem Academic Press, 1961.

[17] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques, 3e édition. - São Paulo, Sociedade de Matematica de São Paulo, 1964.

[18] HERVÉ (Mme R.-M.). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[19] KADISON (Richard V.). - Transformations of states in operator theory and dynamics, Topology, t. 3, 1965, suppl. 2, p. 177-198.

[20] KAKUTANI (Shizuo). - Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 994-1024.

[21] KAKUTANI (Shizuo). - Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Annals of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 523-537.

[22] KELDYŠ (M. V.). - Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 8, 1941, p. 171-231.

[23] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1963 (The University Series in higher Mathematics).

[24] KRÉE (Paul). - Frontière de Šilov, d'après H. Bauer, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 1, 1962, n° 3 bis, 12 p.

[25] LION (Georges). - Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3621-3623.

[26] LION (Georges). - Familles résolvantes et frontières de Choquet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 9, 1964/65, n° 6, 8 p.

[27] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 6, 1961/62, n° 9, 3 p.

[28] MOKOBODZKI (Gabriel). - Principe de balayage, principe de domination, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 1, 1962, n° 1, 11 p.

[29] NACHBIN (Leopoldo). - Topology and order. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 4).

[30] PHELPS (Robert R.). - Lectures on Choquet's theorem. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1966 (Van Nostrand mathematical Studies, 7).

[31] POULSEN (E. T.). - A simplex with dense extreme points, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 83-87.

[32] ROGALSKI (Marc). - Représentations fonctionnelles d'espaces vectoriels réticulés, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 5, 1965/66, n° 2, 31 p.