Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Alain Goullet de Rugy

Le théorème de Whitney sur les extensions différentiables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 1 (1965-1966), exp. nº 5, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A4_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 5

27 janvier 1966

LE THÉORÈME DE WHITNEY SUR LES EXTENSIONS DIFFÉRENTIABLES

par Alain GOULLET de RUGY

I

1. Notations. - Pour simplifier les expressions des dérivées multiples, nous introduisons les n-uples :

$$k = (k_1 , \ldots , k_n) \qquad k_1 , \ldots , k_n \in \underset{\sim}{N} ,$$

et nous notons

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} k_i ,$$

$$(x' - x)^k = \prod_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^{k_i} ,$$

pour x' et x quelconques $\in \underset{\sim}{R}^n$,

$$\binom{k}{\ell} = \binom{k_1}{\ell_1} \times \ldots \times \binom{k_n}{\ell_n}$$

lorsque ℓ est un n-uple tel que

$$\ell_i \leqslant k_i , \qquad i = 1 , \ldots , n ,$$

et

$$D_k f(x) = \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} f(x)$$

lorsque f est une application de $\underset{\sim}{R}^n \longrightarrow \underset{\sim}{R}$ telle que la dérivée considérée existe en x .

2. DÉFINITION 1. - Soient m un entier $\geqslant 0$, et A un fermé, borné ou non, de $\underset{\sim}{R}^n$. Soient f et f_k $(\sigma_k \leqslant m)$ des fonctions réelles définies dans A $(f_{(0,\ldots,0)} = f)$. On dit que f est de classe C^m sur A , relativement aux f_k $(\sigma_k \leqslant m)$, si, écrivant, pour x et x' quelconques dans A :

$$(1) \qquad f_k(x') = \sum_{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!}(x'-x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad ,$$

$R_k(x' ; x)$ a la propriété :

$$\forall\ \eta > 0\ ,\quad \forall\ x^o \in A\ ,\quad \exists\ \delta > 0$$

tel que, pour tout x et $x' \in A$ tels que $d(x , x^o) < \delta$ et $d(x' , x^o) < \delta$, on a

$$(2) \qquad |R_k(x' ; x)| \leqslant \eta[d(x' ; x)]^{m-\sigma_k} \quad .$$

Cette définition se justifie par les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1. - Pour tout k, tel que $\sigma_k \leqslant m$, les f_k sont continues dans A. Il suffit, pour le vérifier, d'écrire (1) sous la forme

$$f_k(x') - f_k(x) = \sum_{\substack{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k \\ \sigma_\ell \neq (0,\ldots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!}(x'-x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si f est de classe C^m sur A relativement aux f_k $(\sigma_k \leqslant m)$, alors en tout point $x \in \mathring{A}$, f_k est la dérivée k-ième de f, i. e.

$$D_k\ f(x) = f_k(x) \quad .$$

Montrons dans ce but que, si k est tel que $\sigma_k < m$, et si $x \in \mathring{A}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_h} f_k(x) = f_{k'}(x) \qquad (h = 1 , \ldots , n) \quad \text{où} \quad (k' = k , \ldots , k_{h+1} , \ldots , k_n) \quad .$$

Pour cela il suffit, dans (1), de prendre $x' = (x_1 , \ldots , x_h + \Delta_h , \ldots , x_n)$; nous avons alors

$$f_k(x') - f_k(x) - \Delta x_k\ f_{k'}(x) = \sum_{\substack{\ell \\ \ell \neq (0,\ldots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!}(x'-x)^\ell + R_k(x' ; x) \quad .$$

Chaque terme de la somme est soit nul, soit contient $(\Delta x_h)^2$, et, d'après (2), $R_k(x' ; x)$ est un $o(\Delta x_h)$. D'où le résultat.

De ces deux propriétés il résulte que f est C^m, au sens ordinaire, dans $\mathring{A}$; en particulier, les f_k sont déterminés de manière unique en ces points.

D'autre part, si g est une fonction réelle C^m dans un voisinage de A, sa restriction f à A est C^m sur A relativement aux $f_k = D_k\, g$ d'après la formule de Taylor.

La différence entre ces deux définitions apparaît en les points frontière de A, où f n'est plus C^m au sens ordinaire, et où f peut être C^m relativement à un système de f_k.

Il importe de noter que f peut être C^m sur A relativement à plusieurs systèmes de f_k. Ainsi, pour $n = m = 2$, et si A est un segment parallèle à l'axe Ox_2, on pourra prendre n'importe quelle fonction continue pour $f_{(1,0)}$.

3. THÉORÈME 1. - Soient $m \in \mathbb{N}$, et A un fermé de $\mathbb{R}^n$; soient f, f_k $(\sigma_k \leqslant m)$ des fonctions réelles définies dans A, telles que f soit C^m sur A relativement aux f_k. Alors il existe une fonction réelle F définie dans $\mathbb{R}^n$, C^m au sens ordinaire (que nous appellerons extension de f à $\mathbb{R}^n$) telle que :

1° $F(x) = f(x)$ sur A,

2° $D_k\, F(x) = f_k(x)$ sur A $\quad(\sigma_k \leqslant m)$,

3° $F(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n - A$.

(Evidemment, 2° $\Longrightarrow$ 1°.)

4. Construction d'un recouvrement fermé $\mathcal{K}$ et d'un recouvrement ouvert $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}^n - A$.

On définit ce recouvrement par récurrence comme suit :

On commence par diviser $\mathbb{R}^n$ en hypercubes fermés de longueur de côté égale à 1, et dont les sommets sont à coordonnées entières. Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ces cubes.

- $K_0 = \{C \in \mathcal{H}$ tel que $d(C, A) \geqslant 6\sqrt{n}\}$.
- $K'_0 = \{C \in \mathcal{H},\ C \notin K_0\}$.
- K''_0 = ensemble des cubes fermés obtenus en divisant chaque cube de K'_0 en 2^n cubes de côté $\frac{1}{2}$.

Et soit :

$$K_1 = \{C \in K''_0 \text{ tel que } d(C, A) \geqslant 6\sqrt{n}\cdot 2^{-1}\} .$$

Plus généralement, on suppose défini K''_{s-2}, K_{s-1}. On pose alors :

- $K'_{s-1} = \{C \in K''_{s-2},\ C \notin K_{s-1}\}$.

- K''_{s-1} = ensemble des cubes fermés obtenus en divisant chaque cube de K'_{s-1} en 2^n cubes de côté 2^{-s} , et

$$K_s = \{C \in K''_{s-1} \ , \ d(C , A) \geq 6\sqrt{n}\, 2^{-s}\} \ .$$

Et on pose $\mathcal{K} = \cup K_s$. $\mathcal{K}$ est manifestement un recouvrement de $E - A$.

PROPRIÉTÉ 1. - Soient $C \in K_s$ et $y \in C$, alors

(3) $$d(A , C) < 14\sqrt{n}\, 2^{-s} \qquad (s \geq 1)$$

(4) $$d(A , C) > \frac{2}{3} d(y , A) \ .$$

Démontrons (3). Le cube C est obtenu par division en 2^n parties d'un cube $C' \in K'_{s-1}$. Donc $C' \notin K_{s-1}$, et par suite :

$$d(C' , A) < 6\sqrt{n}\, 2^{-s+1} \ ,$$

donc

$$d(C , A) \leq \mathrm{diam}(C') + d(C' , A) < 7\sqrt{n}\, 2^{-s+1} = 14\sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

Démontrons (4). Comme $y \in C \in K_s$,

$$d(y , A) \geq 6\sqrt{n}\, 2^{-s} \ ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} d(A , C) &\geq d(y , A) - \mathrm{diam}\, C \\ &\geq d(y , A) - \sqrt{n}\, 2^{-s} \\ &\geq \frac{5}{6} d(y , A) > \frac{2}{3} d(y , A) \ . \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 2. - Si $C \in K_s$ et $C' \in K_t$ avec $t > s + 1$,

(5) $$d(C , C') > \sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

On écrit que

$$d(C , C') \geq d(A , C) - d(A , C') - \mathrm{diam}(C') \ .$$

D'où l'on déduit le résultat, compte tenu de (3), de $d(C , A) \geq 6\sqrt{n}\, 2^{-s}$ et $t \geq s + 2$.

5. Construction du recouvrement $\mathfrak{J}$.

Notons $y^1 , y^2 , \ldots , y^\nu , \ldots$ les sommets des cubes de $\mathcal{K}$. Posons, pour tout $\nu \in \underset{\sim}{N}$:

- $r_\nu = d(y^\nu A)$;
- b^ν = longueur de l'arête du plus grand cube de $\mathcal{K}$ de sommet y^ν ;
- I_ν le cube ouvert ;
- $I_\nu = \{x \in \underset{\sim}{R}^n$ tel que $|x_h - y_h^\nu| < b_\nu$, $h = 1 , \dots , n\}$;
- $\mathfrak{I} = \bigcup_\nu \{\mathfrak{I}_\nu\}$.

PROPRIÉTÉ 1. – $\mathfrak{I}$ est un recouvrement ouvert de $E - A$.

PROPRIÉTÉ 2. – Soient $I_\nu \in \mathfrak{I}$, $C' \in K_t$ de sommet y^ν de longueur d'arête b^ν , et $C \in K_s$ un cube tel que $I_\nu \cap C \neq \emptyset$.

Alors, $s = t$ ou $t + 1$.

Par suite, il existe un entier M tel que, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$ et tout $C \in K_s$, le nombre des I_ν distincts rencontrant C est $< M$.

D'abord si $x \in I_\nu \cap C$, alors $d(x , y^\nu) \leqslant \sqrt{n}\, 2^{-t}$, donc, comme $y^\nu \in C'$, la relation (5) (ou plutôt sa négation) entraîne $s \leqslant t + 1$.

D'autre part, supposons $s < t$; alors, comme les sommets de C sont multiples de $2^{-s} > 2^{-t}$ ainsi que ceux de C' , $C \cap \overline{I_\nu}$ est un cube de côté 2^{-t} et de sommet y^ν ou bien $\overline{I_\nu}$ lui-même. Chacun de ces deux cas est impossible : le premier parce qu'alors C' ne serait pas un plus grand cube de sommet y^ν , le second parce qu'un cube $\in \mathcal{K}$ ne saurait être inclus dans un autre cube $\in \mathcal{K}$.

Cela étant, soit c le centre de C :

$$d(c , y^\nu) < \operatorname{diam}(C) + \operatorname{diam} C' < 3\sqrt{n}\, 2^{-s} \quad . \tag{6}$$

D'autre part, $2b_\nu = 2^{-s+1}$ ou 2^{-s+2} .

Enfin les coordonnées de y^ν sont multiples de 2^{-s} . Par suite

$$\{I_\nu \text{ tels que } I_\nu \cap C \neq 0\}$$

est inclus dans l'ensemble $\mathcal{K}_C$ des cubes ouverts de centre satisfaisant à (6) et à coordonnées multiples de 2^{-s} et de longueur d'arête 2^{-s+1} ou 2^{-s+2} .

Or le nombre d'éléments de $\mathcal{K}_C$ est $< 2(6\sqrt{n} + 1)^n = M$. Il en va de même du nombre d'éléments de l'ensemble de ces I_ν .

DÉFINITION 2. – Soient C et $C' \in K$, et

$$\mathfrak{J} = \{I_\nu \text{ tel que } I_\nu \cap C \neq \emptyset\} \ ,$$
$$\mathfrak{J}' = \{I_\nu \text{ tel que } I_\nu \cap C' \neq \emptyset\} \ .$$

On dit que C et C' sont de même type s'il existe une application

$$\varphi : \underset{\sim}{R}^n \longrightarrow \underset{\sim}{R}^n$$

composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $\geqslant 0$ telle que :

- $C' = \varphi(C)$,
- $\forall\, I_{\nu'} \in \mathfrak{J}'$, $\exists\, I_\nu \in \mathfrak{J}$ tel que $I_{\nu'} = \varphi(I_\nu)$,
- $\forall\, I_\nu \in \mathfrak{J}$, $\varphi(I_\nu) \in \mathfrak{J}'$.

PROPRIÉTÉ 3. - Il existe un nombre fini de types possibles de cubes.

Ceci se déduit facilement de la 2e partie de la propriété 2 et des précisions données au cours de la démonstration de celle-ci.

PROPRIÉTÉ 4. - Soient $C \in K_s$ et $I_\nu \in \mathfrak{J}$ tels que $I_\nu \cap C \neq \emptyset$. Alors pour tout $y \in C$,

(7) $$d(x^o , y^\nu) < 2d(x^o , y) \qquad \text{pour tout } x^o \in A \ ,$$

(7') $$d(A , y^\nu) < 2d(A , y) \ .$$

La démonstration de cette dernière propriété est facile dès que l'on a vu que :

$$d(y^\nu , y) \leqslant 3\sqrt{n}\, 2^{-s} \ .$$

6. Partition de l'unité associée au recouvrement $\mathfrak{J}$.

Soit $\Theta(x)$ une fonction réelle C^∞ sur $\underset{\sim}{R}^n$, strictement positive sur le cube $R = \{x \ ; \ |x_h| < 1 \ , \ h = 1 \ , \ \dots \ , n\}$, nulle en dehors. [Prendre par exemple

$$\Theta(x) = \prod_i \exp(x_i^2 - 1)^{-1}$$

dans le cube.]

Pour tout $\nu \in \underset{\sim}{N}$, posons

$$\pi_\nu(x) = \Theta\left(\frac{x}{2b_\nu}\right) \qquad \text{et} \qquad \Phi_\nu(x) = \frac{\pi_\nu(x)}{\sum_\lambda \pi_\lambda(x)} \ .$$

PROPRIÉTÉ 1. - $(\Phi_\nu)_{\nu \in N}$ est une partition C^∞ de l'unité de $\underset{\sim}{R}^n - A$, subordonnée au recouvrement $\mathfrak{J}$.

Le seul point peut-être non trivial est que cette partition soit C^∞ . Cela résulte de ce qu'au voisinage de chaque point il y a un nombre fini de π_ν non nuls.

PROPRIÉTÉ 2. - Soit un n-uple k ; il existe un nombre $N_k > 0$, tel que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout cube $C \in K_s$,

$$(8) \qquad |D_k \Phi_\nu(x)| < 2^{s\sigma_k} N_k \quad \text{dans } C \qquad (\nu = 1 , 2 , \ldots) .$$

Soient $C_1 , \ldots , C_d$ des cubes de $\mathcal{K}$ représentant tous les types possibles de cubes (et, en outre, choisis de façon à ce que chacun appartienne à un K_s d'indice aussi petit que possible).

Soit maintenant $C \in K_s$ un cube quelconque de $\mathcal{K}$, et soit C_p $(p \leqslant d)$, $C_p \in K_t$ de même type que C . Soient $I_{\lambda'_1} , \ldots , I_{\lambda'_q}$ ceux des I_ν rencontrant C_p , $I_{\lambda_1} , \ldots , I_{\lambda_q}$ ceux rencontrant C .

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $C_p = \varphi(C)$ (cf. définition 2). Soit

$$I_{\lambda_\alpha} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant q) \qquad \text{et} \qquad I_{\lambda'_{\alpha'}} = \varphi(I_{\lambda_\alpha}) \quad (1 \leqslant \alpha' \leqslant q) .$$

Comme l'homothétie intervenant dans la définition de φ est de rapport 2^{s-t} , nous avons pour $x \in I_{\lambda_\alpha}$

$$\Phi_{\lambda_\alpha}(x) = \Phi_{\lambda'_{\alpha'}}(y^{\lambda'_{\alpha'}} + 2^{s-t}(x - y^{\lambda_\alpha})) ,$$

ce qui, différencié k fois, donne

$$D_k \Phi_{\lambda_\alpha}(x) = 2^{(s-t)\sigma_k} D_k(\Phi_{\lambda'_{\alpha'}}(y^{\lambda'_{\alpha'}} + 2^{s-t}(x - y^{\lambda_\alpha}))) ;$$

de sorte que, si nous posons

$$N_k = \sup_{\substack{x \in \bigcup_{i=1}^{d} C_i \\ \nu \text{ tel que } I_\nu \cap \bigcup_{i=1}^{d} C_i \neq \emptyset}} |D_k \Phi_\nu(x)| ,$$

nous avons pour $x \in C \cap I_{\lambda_\alpha}$, et compte tenu de $0 \leqslant s - t \leqslant s$:

$$|D_k \Phi_{\lambda_\alpha}(x)| < 2^{s\sigma_k} N_k ,$$

d'où (8).

II

La démonstration du théorème proprement dit.

1. Les fonctions $\psi_k(x' ; x)$.

DÉFINITION 3. - Pour $x' \in \mathbb{R}^n$ et $x \in A$, posons :

$$\psi_k(x' ; x) = \sum_{\sigma_\ell \leq m-\sigma_k} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (x' - x)^\ell \qquad (\sigma_k \leqslant m) \quad . \tag{9}$$

Lorsque x est fixé, $\psi_k(x' ; x)$ est un polynôme de degré $m - \sigma_k$ au plus en $(x' - x)$. Lorsque x' varie dans A , $\psi_k(x' ; x)$ approche $f_k(x)$ à l'ordre $m - \sigma_k$ puisque nous avons :

$$\psi_k(x' ; x) + R_k(x' ; x) = f_k(x') \quad . \tag{10}$$

PROPRIÉTÉ 1. - La ℓ-ième dérivée de $\psi_k(x' ; x)$ en x' est

$$\psi_{k+\ell}(x' ; x) \qquad (\sigma_\ell \leqslant m - \sigma_k) \quad .$$

PROPRIÉTÉ 2. - Pour x et $x' \in A$, et $x'' \in \mathbb{R}^n$,

$$\psi_k(x'' ; x') = \psi_k(x'' ; x) + \sum_\ell \frac{R_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell \quad . \tag{11}$$

Ecrivons d'abord $\psi_k(x'' ; x)$ par son développement de Taylor en x' :

$$\psi_k(x'' ; x) = \sum_\ell \frac{\psi_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell = \sum_\ell (x'' - x')^\ell \Big[\sum_\gamma \frac{f_{k+\ell+\gamma}(x)}{\gamma!} (x' - x)^\gamma \Big] \quad .$$

Compte tenu de cette identité, de (9) et de (10), $\psi_k(x'' ; x')$ devient :

$$\psi_k(x'' ; x') = \sum_\ell \frac{(x'' - x')^\ell}{\ell!} \Big[\sum_\gamma \frac{f_{k+\ell+\gamma}(x)}{\gamma!} (x' - x)^\ell + R_{k+\ell}(x' ; x) \Big]$$

$$= \psi_k(x' ; x) + \sum_\ell \frac{R_{k+\ell}(x' ; x)}{\ell!} (x'' - x')^\ell \quad .$$

2. L'extension de f .

Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, soit $x^\nu \in A$ un point tel que $d(x^\nu , y^\nu) = d(A , y^\nu)$. On pose alors :

$$\begin{cases} F(x) = \sum_{\nu} \Phi_{\nu}(x)\ \psi_{(0,\dots,0)}(x\ ;\ x^{\nu}) & \text{dans } \underset{\sim}{R}^n - A \\ F(x) = f(x) & \text{dans } A\ . \end{cases}$$

Par construction, F est C^{∞} dans $\underset{\sim}{R}^n - A$. D'autre part, en tous les points intérieurs de A , F coïncide avec f ainsi que leurs dérivées partielles successives. En outre, toutes ces fonctions sont continues en ces points (propriétés 1 et 2 du § 2 du I). Il nous reste à voir ce qui se passe aux points frontières, à savoir qu'en ces points, $D_k F(x)$ existe, que $D_k F(x) = f_k(x)$, et qu'elle est continue $(\sigma_k \leqslant m)$.

Or pour vérifier ceci il nous suffit de montrer que

$D_k F(x) \longrightarrow f_k(x^o)$ lorsque $x \longrightarrow x^o$ (x^o appartenant à la frontière de A)

en restant dans $\underset{\sim}{R}^n - A$. C'est ce que nous allons montrer.

3. Points frontières.

Soient :

- x^o appartenant à la frontière de A ;
- ε réel > 0 ;
- η réel > 0 tel que :

$$\eta < \varepsilon\{2M[(m+2)!]^n\ (84\sqrt{n})^m\ N\}^{-1} \quad \text{et} \quad \eta < \varepsilon/6 \qquad \text{où } N = \sup_{\sigma_k \leqslant m} N_k \ ;$$

- δ réel > 0 tel que :

$$\delta < \varepsilon[6(m+1)^n\ L]^{-1} \quad \text{et} \quad \delta < 1 \qquad \text{où } L > \sup_{\substack{\sigma_k \leqslant m \\ d(x,x^0) \leqslant 1}} |f_k(x)| \ ,$$

δ étant en outre assez petit pour que η satisfasse à la définition 1.

De plus, notons :

- y un point quelconque de $\underset{\sim}{R}^n - A$ tel que $d(y\ ,\ x^o) < \frac{\delta}{4}$;
- $\delta^* = 4d(y\ ,\ A)$;
- $x \in A$ tel que $d(x\ ,\ y) = d(A\ ,\ y)$;
- $C \in K_s$ tel que $y \in C$; et
- $I_{\lambda_1}\ ,\ \dots\ ,\ I_{\lambda_t}$ ceux des I_{ν} rencontrant C .

Nous allons voir que dans ces conditions :

(12) $$|D_k(F(y)) - f_k(x^o)| < \varepsilon \qquad (\sigma_k \leqslant m) \ .$$

L'astuce est alors de ramener la comparaison de ces deux nombres à celle de chacun d'entre eux à $\psi_k(y\ ;\ x)$.

Ainsi, vérifions que

(13) $$|\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x^o)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\sigma_k \leqslant m) \ .$$

Par définition de ψ_k, nous avons :

$$\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x) = \sum_{\substack{\sigma_\ell \leqslant m-\sigma_k \\ \ell \neq (0,\dots,0)}} \frac{f_{k+\ell}(x)}{\ell!} (y - x)^\ell \ .$$

Comme $d(x\ ,\ y) = \frac{\delta^*}{4} < \delta < 1$, chaque terme de la somme est majoré par $L.\delta$. Cette somme comportant au plus $(m + 1)^n$ termes, nous avons :

$$|\psi_k(y\ ;\ x) - f_k(x)| < (m + 1)^n L\delta < \frac{\varepsilon}{6} \ .$$

De manière analogue, comme

$$d(x\ ;\ x^o) < \frac{\delta^*}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta < 1 \ ,$$

$$|\psi_k(x\ ;\ x^o) - f_k(x^o)| < \frac{\varepsilon}{6} \ .$$

Enfin, de (10) nous déduisons

$$|f_k(x) - \psi_k(x\ ;\ x^o)| = |R_k(x\ ;\ x^o)| \leqslant \eta < \frac{\varepsilon}{6} \ .$$

D'où (13).

Montrons maintenant que

$$|D_k(F(y)) - \psi_k(y\ ;\ x)| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

DÉFINITION 4. - Pour $\nu \in \underset{\sim}{N}$ et $z \in \underset{\sim}{R}^n$, posons :

$$\zeta_{\nu;k}(z) = \psi_k(z\ ;\ x^\nu) - \psi_k(z\ ;\ x) \ .$$

PROPRIÉTÉ 1. - $D_k(\zeta_{\nu;0}(z)) = \zeta_{\nu;k}(z)$.

PROPRIÉTÉ 2. - Pour tout $z \in C$:

(14) $$|\zeta_{\nu;k}(z)| < (m + 1)^n \delta_*^{m-\sigma_k} \eta \ .$$

Comme $d(x^\nu , x) \leq d(x^\nu , y^\nu) + d(y^\nu , x)$ et que, d'après (7) et (7'),

$$d(x^\nu , y^\nu) = d(\Lambda , y^\nu) < 2d(\Lambda , y) = \frac{\delta^*}{2} , \qquad d(y^* , x) < 2d(y , x) = \frac{\delta^*}{2} ,$$

$$d(x^\nu , x) < \delta^* < \delta < 1 .$$

Nous avons par définition

$$|R_{K+\ell}(x^\nu ; x)| < \delta^{*m-\sigma_k-\sigma_\ell} \eta ,$$

de sorte que, comme $d(z , x^\nu) \leq 2d(y^\nu x^\nu) < 4d(y , x) = \delta^*$, nous avons bien :

$$|\zeta_{\nu;k}(z)| < (m + 1)^n \delta^{*m-\sigma_k} \eta .$$

Cela étant, faisons apparaître $\psi(z ; x)$ dans $F(z)$:

$$(\psi(z ; x) = \psi_{(0,\dots,0)}(z ; x)) ,$$

$$g(z) = \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_1} \psi(z ; x^{\lambda_i}) ,$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_i}(z)[\zeta_{\lambda_i;0}(z) + \psi(z ; x)] ,$$

$$= \psi(z ; x) + \sum_{i=1}^{t} \Phi_{\lambda_i}(z) \zeta_{\lambda_i;0}(z) ,$$

de sorte que :

$$D_k(F(z)) - \psi_k(z ; x) = \sum_{i=1}^{t} [\sum_{\ell} \binom{k}{\ell} D_\ell(\Phi_{\lambda_i}(z)) \zeta_{\lambda_i;k-\ell}(z)] .$$

Minorons le second membre. D'abord :

$$|D_\ell \Phi_{\lambda_i}(z)| < 2^{s\sigma_\ell} N ,$$

d'après (8). Utilisant (14), nous déduisons, compte tenu de

$$t < M \qquad \text{et de} \qquad \binom{k}{\ell} = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_1}{\ell_1} \leq (m!)^n ,$$

(15) $$|D_k(F(z)) - \psi_k(z , x)| < \sum_{\ell} M[(m + 1)!]^n 2^{s\sigma_\ell} \delta^{*m-\sigma_k-\sigma_\ell} N\eta .$$

Reste à considérer $2^{s\sigma_\ell}\delta^{*\sigma_\ell}$. Or nous avons vu (inégalités (3) et (4)) que

$$14\sqrt{n}\,2^{-s} > d(A\ ,\ C) > \frac{2}{3}\,d(y\ ,\ A)\quad ,$$

$$d(y\ ,\ A) = \delta^* \implies 2^s\,\delta^* < 84\sqrt{n}\quad .$$

Enfin, comme la somme en (15) porte sur $(m+1)^n < (m+2)^n$ termes, nous voyons que

$$|D_k\,F(z) - \psi_k(z\ ;\ x)| < \frac{\varepsilon}{2}\quad ,$$

d'où (12).

BIBLIOGRAPHIE

Ce théorème, et l'amélioration de ce théorème, qui affirme que l'on peut prendre l'extension analytique dans le complémentaire du fermé, se trouvent dans l'article de WHITNEY :

WHITNEY (H.). - Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 36, 1934, p. 63-89.

L'extension de ce théorème, au cas où les fonctions prennent leurs valeurs dans un Banach, se trouve dans l'article de GLAESER :

GLAESER (G.). - Etude de quelques algèbres tayloriennes, J. Analyse, Jérusalem, t. 6, 1958, p. 1-124 (Thèse Sc. math. Paris, 1957).