Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Michel Bony

Majorations a priori et problèmes frontière elliptiques du second ordre

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 1 (1965-1966), exp. nº 3 et 4, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A3_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
5e année, 1965/66, n° 3 et 4

13 et 20 janvier 1966

MAJORATIONS A PRIORI
ET PROBLÈMES FRONTIÈRE ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE

par Jean-Michel BONY

L'importance des majorations a priori dans les espaces de fonctions höldériennes pour la résolution des problèmes frontière a été mise en évidence par J. SCHAUDER. Celles-ci lui permettaient de résoudre le problème de Dirichlet et de montrer la régularité des solutions à l'aide de quelques arguments simples d'analyse fonctionnelle (voir par exemple [8]) ([1]). Dans cet exposé, l'emploi de quelques techniques devenues classiques, en particulier l'usage du théorème de stabilité de l'indice, permet de simplifier notablement l'établissement de ces majorations et de résoudre, sur une variété, par des moyens élémentaires, les problèmes frontière elliptiques du second ordre définis au n° I.3.

On trouvera dans [1] la démonstration de majorations a priori pour des problèmes elliptiques d'ordre quelconque et leur application à la résolution de ces problèmes, les démonstrations étant évidemment moins élémentaires. Toutefois, les propriétés de maximum spéciales à l'ordre 2 permettent d'établir ici des théorèmes de positivité, d'unicité et d'existence des solutions qui ne sont pas généralisables à un ordre quelconque. Les résultats essentiels sont énoncés dans les théorèmes I (n° II.3), I' (n° II.4), II (n° III.5) et III (n° IV.2).

I.1. Espaces de fonctions höldériennes.

Dans cet exposé, M désignera une variété à bord C^∞, compacte, connexe, de dimension n (le bord ∂M pouvant éventuellement être vide). $\mathring{M}$ désignera l'intérieur de M.

On dit qu'une fonction réelle u, définie dans un ouvert Ω de $\overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$

$$(\overline{\underset{\sim}{R}^n_+} = \{x \in \underset{\sim}{R}^n \mid x_n \geqslant 0\})$$

([1]) Voir aussi [4] pour le problème des dérivées obliques.

vérifie une condition de Hölder d'exposant λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ s'il existe une constante C telle que

$$\forall\ x\ ,\ y \in \Omega\ , \qquad |u(y) - u(x)| \leqslant C|y - x|^{\lambda}\ .$$

On notera $C^{0,\lambda}(\Omega)$ l'espace formé de telles fonctions muni de la norme

$$\|u\|_{0,\lambda} = \sup_{x}\ |u(x)| + \sup_{y \neq x} \frac{|u(y) - u(x)|}{|y - x|^{\lambda}}\ .$$

C'est un espace de Banach.

On notera $C^{k,\lambda}(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k appartiennent à $C^{0,\lambda}$. Muni de la norme

$$\|u\|_{k,\lambda} = \sum_{0 \leqslant |i| \leqslant n} \|D^{i}\ u\|_{0,\lambda} \quad (^2)\ ,$$

c'est un espace de Banach.

Sur la variété M, on notera $C^{k,\lambda}(M)$ l'espace des fonctions telles qu'au voisinage de chaque point il existe une carte locale $(U\ ,\ \chi)$ telle que $u \circ \chi$ soit de classe $C^{k,\lambda}$ dans l'ouvert de $\overline{\underset{\sim}{R}_{+}^{n1}}$, $\chi(U)$. Soient $(U_i\ ,\ \chi_i)$ un recouvrement fini de M par des cartes locales, ω_i une partition de l'unité subordonnée, on peut munir $C^{k,\lambda}(M)$ de la norme

$$\|u\|_{k,\lambda,(M)} = \sum \|\omega_i\ u \circ \chi_i\|_{k,\lambda,[\chi_i(U_i)]}\ .$$

C'est un espace de Banach, un changement de U_i, χ_i, ω_i transforme la norme en une norme équivalente.

PROPOSITION 1. - La boule unité de $C^{k,\lambda}$ est un sous-ensemble compact de C^{k}.

La boule unité de $C^{0,\lambda}$ est équicontinue, donc relativement compacte dans C d'après le théorème d'Ascoli. De plus, une limite uniforme de fonctions vérifiant $|u(x) - u(y)| \leqslant |y - x|^{\lambda}$ vérifie encore cette relation. La boule de $C^{0,\lambda}$ est donc compacte dans C. Le résultat s'étend sans difficulté à k quelconque.

C^{∞} n'est pas dense dans $C^{k,\lambda}$, mais on a le résultat suivant :

$(^2)$ $D^{i}\ u = \dfrac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}\ u\ .$

PROPOSITION 2. - Soit $u \in C^{k,\lambda}$; il existe une suite $u_p \in C^\infty$ telle que $u_p \to u$ dans C^k et

$$\sup_p \|u_p\|_{k,\lambda} < \infty .$$

Dans $\mathbb{R}^n$, ce résultat se démontre par régularisation : φ étant une fonction C^∞ positive à support compact, valant 1 au voisinage de l'origine, telle que $\int \varphi = 1$, posons

$$\varphi_p(x) = p^n \varphi(px) \qquad \text{et} \qquad u_p = \varphi_p \star u .$$

Si $u \in C^{0,\lambda}$,

$$|u_p(x) - u_p(y)| = |\int [u(x-t) - u(y-t)] \varphi_p(t)\, dt| \leqslant \|u\|_{0,\lambda} |y-x|^\lambda$$

et $u_p \to u$ dans C^0 . De la relation $D^i u_p = \varphi_p \star D^i u$, on déduit le résultat dans $\mathbb{R}^n$ pour $u \in C^{k,\lambda}$, et on obtient le résultat sur la variété M par recollement.

PROPOSITION 3. - Si u et v appartiennent à $C^{k,\lambda}(M)$, alors $uv \in C^{k,\lambda}(M)$, et il existe une constante C telle que

$$\|uv\|_{k,\lambda} \leqslant C\Big(\sum_{p=0}^{k} \|u\|_{p,\lambda} \|v\|_{k-p} + \sum_{p=0}^{k} \|u\|_p \|v\|_{k-p,\lambda}\Big) .$$

Dans un ouvert de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, on a

$$u(y)\, v(y) - u(x)\, v(x) = u(y)(v(y) - v(x)) - v(x)(u(y) - u(x)) ,$$

d'où

$$\|uv\|_{0,\lambda} \leqslant \|u\|_0 \|v\|_{0,\lambda} + \|u\|_{0,\lambda} \|v\|_0 .$$

Dans une variété compacte, le résultat pour $k = 0$ s'obtient par recollement. Pour k quelconque, la proposition résulte de la formule de Leibniz.

I.2. Opérateurs différentiels elliptiques.

Un opérateur différentiel elliptique du second ordre sur M , à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$, est une application linéaire continue A de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M)$ qui, pour tout x appartenant à une carte locale (U , χ) , se met sous la forme :

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a(x)\, u(x) ,$$

les fonctions a_{ij} , a_i , a (dépendant de la carte locale) étant de classe $C^{k,\lambda}$.

la forme quadratique $\sum a_{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j$ étant définie positive pour chaque x.

Rappelons les deux propriétés de maximum suivantes :

PROPOSITION 4. - Soit A elliptique, $a(x) = A1(x) \leqslant 0$ $(\forall\ x)$ et soit $u \in C^2(M)$ telle que $Au \geqslant 0$.

Alors u ne peut atteindre un maximum $\geqslant 0$ à l'intérieur de M sans être constante.

PROPOSITION 5. - Supposons $\partial M \neq \emptyset$. Soit A elliptique, $a(x) \leqslant 0$ et soit $u \in C^2(M)$ telle que $Au \geqslant 0$.

Si u atteint un maximum $\geqslant 0$ en un point $x_0 \in \partial M$, on a :

- ou bien u est constante dans M,
- ou bien $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0$ pour tout vecteur ν en x_0 strictement dirigé vers l'intérieur.

On en trouvera une démonstration dans [8], p. 4 et 5.

I.3. Problèmes frontière elliptiques.

Nous noterons ici L un opérateur différentiel à la frontière qui à une fonction u définie sur M fait correspondre la fonction Lu définie sur ∂M (la régularité exigée pour les fonctions et les opérateurs sera précisée ultérieurement dans chaque cas).

Le problème frontière associé à A et L est la recherche des solutions u du système

$$\left| \begin{array}{l} Au(x) = f(x)\ ,\quad \forall\ x \in M \\ Lu(x') = \varphi(x')\ ,\quad \forall\ x' \in \partial M \end{array} \right. \quad (^3)$$

pour chaque couple de fonctions données : f sur M et φ sur ∂M.

Nous résoudrons les trois types de problèmes suivants (qui sont les seuls problèmes frontière elliptiques du second ordre au sens de [1]). Leur solution fera l'objet respectivement des théorèmes I, II et III.

1° Problème de Dirichlet : $Lu(x') = u(x')$.

2° Problème des dérivées obliques : $Lu(x') = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \alpha(x')\ u(x')$, ν étant

---

(3) Nous désignerons les points de ∂M par des lettres affectées d'un ' (prime).

un champ de vecteurs défini sur ∂M strictement dirigé vers l'intérieur, α une fonction sur ∂M .

3° Problème de Višik : $Lu(x') = Bu(x') + \frac{\partial u}{\partial \tau}(x')$, B étant un opérateur différentiel elliptique sur la variété ∂M , τ un champ de vecteurs quelconque défini sur ∂M .

Remarquons que si $\partial M = \emptyset$ (M variété compacte sans bord), ces problèmes se réduisent à un seul : Résoudre $Au = f$ (théorème I').

I.4. Le théorème de stabilité de l'indice.

Ce sera un outil essentiel pour l'étude des problèmes frontière.

E et F étant deux espaces de Banach, rappelons quelques définitions :

– Un opérateur linéaire K de $E \to F$ est dit compact si l'image de la boule unité de E par K est relativement compacte dans F . Le composé d'un opérateur compact et d'un opérateur borné est compact. Nous avons vu (proposition 1) que l'injection de $C^{k,\lambda} \to C^k$ est un opérateur compact.

– Un opérateur linéaire continu T de $E \to F$ est dit d'indice fini si son noyau est de dimension finie et son image de codimension finie (il en résulte alors qu'elle est fermée). L'indice χ de T est, par définition,

$$\chi(T) = \dim(\operatorname{Ker} T) - \operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) \ .$$

– Lorsque T est d'indice 0 , on dit que l'alternative de Fredholm a lieu pour l'équation $Te = f$: ou bien il y a existence et unicité de la solution pour chaque f , ou bien l'équation homogène $Te = 0$ admet p solutions linéairement indépendantes, et l'équation $Te = f$ n'est résoluble que si f satisfait à p conditions linéaires continues.

THÉORÈME de stabilité de l'indice (4). – Soient T un opérateur d'indice fini et K un opérateur compact. Alors $T + K$ est d'indice fini et

$$\chi(T + K) = \chi(T) \ .$$

On en trouvera une démonstration dans [5] ou [9] par exemple.

---

(4) Nous n'aurons à l'appliquer ici que dans le cas où T est un isomorphisme. C'est alors une conséquence simple du théorème de Riesz.

II. Le problème de Dirichlet

A étant un opérateur différentiel elliptique du second ordre à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$ $(k \geq 0\ ,\ 0 < \lambda < 1)$, nous cherchons les solutions $u \in C^{k+2,\lambda}$ du problème

$$\left| \begin{array}{l} Au = f \\ \gamma^0\, u = \varphi \end{array} \right. \quad (^5)$$

pour $f \in C^{k,\lambda}(M)$ et $\varphi \in C^{k+2,\lambda}(\partial M)$. Nous chercherons en particulier des conditions sous lesquelles l'opérateur $u \longmapsto (Au\ ,\ \gamma^0\, u)$ est un isomorphisme de $C^{k+2,\lambda}(M)$ sur $C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M)$, on a alors existence et unicité du problème de Dirichlet.

II.1. Etablissement des majorations a priori.

Le but de ce paragraphe est d'établir une majoration du type suivant : il existe $C > 0$ tel que

$$(1) \quad \forall\, u \in C^{k+2,\lambda}\ , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leq C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \quad (^6)\ .$$

Nous établirons ce résultat en six étapes.

(a) A est le laplacien Δ, la variété est une boule B de $\mathbb{R}^n$. – Nous admettrons le résultat suivant : pour tout couple de données $f \in C^{k,\lambda}(B)$ et $\varphi \in C^{k+2,\lambda}(\partial B)$, il y a existence et unicité de la solution de

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u = f \\ \gamma^0\, u = \varphi \end{array} \right.$$

et la solution $u \in C^{k+2,\lambda}(B)$. Le principe de la démonstration est simple : on connaît explicitement le noyau de Green et le noyau de Poisson pour la boule, il suffit de vérifier, qu'appliqués aux fonctions f et φ, ils fournissent des fonctions de $C^{k+2,\lambda}(B)$, mais la démonstration elle-même est délicate et pose des

---

(5) γ^0 étant l'opérateur qui à une fonction définie sur M fait correspondre sa restriction à ∂M.

(6) La constante notée C peut changer de valeur à chaque ligne, mais doit être indépendante de u. Par contre, les constantes, notées C_1, C_2, etc., gardent une même valeur.

problèmes non triviaux de dérivation sous le signe somme [7].

L'opérateur $u \longmapsto (\Delta u\ ,\ \gamma^0\ u)$ est continu et bijectif de $C^{k+2,\lambda}(B)$ sur $C^{k,\lambda}(B) \times C^{k+2,\lambda}(\partial B)$. D'après le théorème de Banach, c'est donc un isomorphisme, et on a

$$(2) \qquad \forall\ u \in C^{k+2,\lambda}(B)\ , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|\Delta u\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\ u\|_{k+2,\lambda})\ .$$

(b) A <u>est le laplacien</u> Δ , u <u>est à support dans un compact fixe du demi-espace</u> $\overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$ (γ^0 désigne alors la restriction au bord du demi-espace). – Une inversion de pôle $\omega \notin \overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$, de puissance 1 , transforme le compact K du demi-espace en un compact K_1 , disjoint de ω , d'une boule B . Les fonctions $u(x) \in C^{k,\lambda}\ \overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$ et à support dans K , sont transformées en $u_1(x_1) \in C^{k,\lambda}(B)$ et à support dans K_1 .

Rappelons les formules de transformation de Kelvin :

$$\Delta u(x) = \overline{\omega x_1}^{\,n+2}\ \Delta\Big(\frac{u_1(x_1)}{\overline{\omega x_1}^{\,n-2}}\Big) \qquad \text{pour} \quad n \neq 2\ ,$$

$$\Delta u(x) = \overline{\omega x_1}^{\,4}\ \Delta u_1(x_1) \qquad \text{pour} \quad n = 2\ .$$

L'inversion étant un difféomorphisme C^∞ , dans le complémentaire de ω , le rapport des normes de u et de u_1 dans $C^{k,\lambda}$ reste compris entre deux constantes fixes strictement positives. La fonction $x_1 \longmapsto \overline{\omega x_1}$ étant C^∞ ainsi que son inverse en dehors de ω , le rapport des normes de $u(x_1)$ et de $u(x_1).\overline{\omega x_1}^{\,\alpha}$ dans $C^{k,\lambda}$ reste compris entre deux constantes strictement positives fixes.

De la majoration (2) appliquée à u_1 et des remarques précédentes, on déduit :

$$(3) \quad \forall\ u \in C^{k+2,\lambda}\ , \quad \operatorname{Supp} u \subset K\ , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|\Delta u\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\ u\|_{k+2,\lambda})$$ [8].

(c) A <u>est un opérateur à coefficients constants sans termes d'ordre</u> 1 <u>et</u> 0 , u <u>est à support dans un compact fixe</u> K <u>de</u> $\overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$.

$$Au(x) = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j}(x)\ .$$

---

[7] On trouvera l'essentiel d'une démonstration dans [7]. Voir aussi la note [8].

[8] Cette majoration est un cas particulier des majorations établies dans [1].

Il existe une transformation affine de l'espace qui transforme A en le laplacien. Le rapport des normes dans $C^{k,\lambda}$ d'une fonction u et de sa transformée reste compris entre deux constantes strictement positives. De la majoration (3) pour le laplacien, on déduit :

(4) $\quad \forall\, u \in C^{k+2,\lambda}\,,\quad \operatorname{Supp} u \subset K\,,\qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\, u\|_{k+2,\lambda})$.

(d) A <u>est un opérateur à coefficients constants,</u> u <u>est à support dans un compact fixe</u> K <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

$$Au(x) = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a\, u(x) \quad .$$

Soit A_1 : $A_1\, u(x) = \sum a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x)$,

$$\|A_1\, u\|_{k,\lambda} \leqslant \|Au\|_{k,\lambda} + \sum |a_i|\, \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{k,\lambda} + |a|\, \|u\|_{k,\lambda} \quad ,$$

$$\|A_1\, u\|_{k,\lambda} \leqslant \|Au\|_{k,\lambda} + C\|u\|_{k+1,\lambda} \quad .$$

De la majoration (4) valable pour A_1 , on déduit :

(5) $\quad \forall\, u \in C^{k+2,\lambda}\,,\quad \operatorname{Supp} u \subset K\,,\quad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+1,\lambda})$.

(e) A <u>est un opérateur à coefficients</u> $C^{k,\lambda}$, u <u>est à support dans un compact assez petit de</u> $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. - Soit A défini dans un voisinage de x_0 . Nous prendrons les fonctions u à support dans $\overline{\mathbb{R}^n_+} \cap B(x_0\,,\,\delta)$ où $B(x_0\,,\,\delta)$ est une boule de centre x_0 , de rayon δ assez petit que nous fixerons ultérieurement.

Soit A_0 l'opérateur à coefficients constants :

$$A_0\, u(x) = \sum a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum a_i(x_0) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a(x_0)\, u(x) \quad .$$

D'après (5), il existe C_1 telle que

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C_1(\|A_0\, u\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0\, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+1,\lambda}) \quad .$$

Evaluons $\|Au - A_0\, u\|_{k,\lambda}$:

$$Au - A_0\, u = \sum (a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \sum (a_i(x) - a_i(x_0)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

$$+ (a(x) - a(x_0))\, u(x) \quad .$$

D'après la proposition 3, nous avons la majoration suivante :

$$\|(a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x)\|_{k,\lambda}$$

$$\leqslant C_2(\|(a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0))\|_0 \, \|u\|_{k+2,\lambda} + \|(a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0))\|_{k,\lambda} \, \|u\|_{k+2}) \ .$$

Choisissons δ assez petit pour que $\|(a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0))\|_0 \leqslant \frac{1}{2n^2 \, C_1 \, C_2}$ dans $B(x_0 \, , \, \delta) \cap \overline{\underset{\sim}{R}^n_+}$.

$$\|Au - A_0 \, u\|_{k,\lambda} \leqslant \frac{1}{2C_1} \|u\|_{k+2,\lambda} + C_3\|u\|_{k+2} \ ,$$

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C_1(\|Au\|_{k,\lambda} + \|(A - A_0)u\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 \, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+1,\lambda}) \ ,$$

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant \frac{1}{2} \|u\|_{k+2,\lambda} + C_4(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 \, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \ ,$$

(6) $$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant 2C_4(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 \, u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \ .$$

(f) A <u>est défini sur la variété à bord compacte</u> M . — Tout point x de M possède une carte locale $(U_i \, , \, \chi_i)$ au voisinage. Soit V_i un voisinage de x assez petit pour qu'on ait, dans $\chi(V_i)$ et pour l'opérateur $\widetilde{A}_i$ transporté de A par χ , une majoration du type (6). Recouvrons M par un nombre fini de tels V_i, soit φ_i une partition de l'unité C^∞ subordonnée aux V_i . Nous choisirons la norme de $C^{k,\lambda}(M)$ associée à V_i , χ_i , φ_i (n° I.1).

$$\|u\|_{k+2,\lambda} = \sum \|\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i\|_{k+2,\lambda} \quad (9) \ ,$$

$$\|\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|\widetilde{A}_i(\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0(\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k+2,\lambda} + \|\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i\|_{k+2}) \ ,$$

$$\widetilde{A}_i(\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i) = \widetilde{\varphi}_i(\widetilde{A}_i \, \widetilde{u}_i) + \dots \ ,$$

$$\|\widetilde{A}_i(\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k,\lambda} \leqslant \|\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{A}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k,\lambda} + C\|u\|_{k+1,\lambda} \ ,$$

d'où

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\sum \|\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{A}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k,\lambda} + \sum \|\gamma^0(\widetilde{\varphi}_i \, \widetilde{u}_i)\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \ ,$$

---

(9) En posant $\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ \chi_i^{-1}$, $\widetilde{u}_i = u_i \circ \chi_i^{-1}$.

$$(7) \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leq C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u\|_{k+2,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \ .$$

C. Q. F. D.

II.2. Majorations pour un opérateur injectif.

PROPOSITION 6. - Supposons l'opérateur $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ de

$$C^{k+2,\lambda}(M) \rightarrow C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M)$$

injectif, il existe alors une constante C telle que

$$(8) \qquad \forall\, u \in C^{k+2,\lambda}(M) , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leq C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u\|_{k+2,\lambda}) \ .$$

S'il n'existait pas de telle constante, il existerait une suite $u_n \in C^{k+2,\lambda}$ telle que :

$$\|u_n\|_{k+2,\lambda} = 1 \qquad \text{et} \qquad (\|Au_n\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u_n\|_{k+2,\lambda}) \leq \frac{1}{n} \ .$$

En extrayant au besoin une sous-suite (notée encore u_n), on a $u_n \rightarrow u$ dans C^{k+2} , $u \in C^{k+2,\lambda}$ (proposition 1). Donc $Au_n \rightarrow Au$ dans C^k , $\gamma^0 u_n \rightarrow \gamma^0 u$ dans C^{k+2} . Mais $Au_n \rightarrow 0$ dans $C^{k,\lambda}$, $\gamma^0 u_n \rightarrow 0$ dans $C^{k+2,\lambda}$. D'où $Au = 0$, $\gamma^0 u = 0$ et d'après l'injectivité $u = 0$.

Ecrivons la majoration (7) pour chaque u_n :

$$\|u_n\|_{k+2,\lambda} \leq C(\|Au_n\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u_n\|_{k+2,\lambda} + \|u_n\|_{k+2}) \ .$$

Le second membre tend vers 0 tandis que le premier reste égal à 1 , ce qui est la contradiction cherchée.

PROPOSITION 7. - La meilleure constante C_A intervenant dans (8) est une fonction continue de l'opérateur A . (L'ensemble des opérateurs A étant muni de la topologie d'espace normable complet de la convergence de ses coefficients dans $C^{k,\lambda}$ sur tout compact d'une carte locale.)

On a

$$\inf_{\{u \mid \|u\|_{k+2,\lambda} \leq 1\}} (\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u\|_{k+2,\lambda}) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_A} & \text{si (8) a lieu ,} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour chaque u , l'application $A \longmapsto (\|Au\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u\|_{k+2,\lambda})$ est continue et ces fonctions sont équicontinues lorsque u parcourt la boule unité de $C^{k+2,\lambda}$.

Leur borne inférieure est donc une fonction continue de A . En particulier, sur l'ensemble des A injectifs, C_A est une fonction continue.

II.3. Problème de Dirichlet pour une variété à bord non vide $(\partial M \neq \emptyset)$.

PROPOSITION 8. - Considérons l'ensemble des opérateurs A tels que $a(x) \leqslant 0$. L'ensemble des opérateurs A , tels que $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ soit un isomorphisme de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M)$, y est ouvert et fermé.

Si $a(x) \leqslant 0$, $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ est injectif. En effet, d'après la proposition 4, si $Au = 0$, $\gamma^0 u = 0$, le maximum et le minimum de u sont atteints au bord, donc $u = 0$.

D'après le théorème des approximations successives, si $u \longmapsto (A_0 u , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme, $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme pour A suffisamment voisin de A_0 . L'ensemble cherché est donc ouvert, montrons qu'il est fermé.

Soit $A_n \to A$, les A_n étant bijectifs. D'après la proposition 7, si $C > C_A$, on a, pour n assez grand,

$$\forall\, u \in C^{k+2,\lambda} , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|A_n u\|_{k,\lambda} + \|\gamma^0 u\|_{k+2,\lambda}) \quad .$$

Pour un couple (f , φ) quelconque de $C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M)$, soit u_n la solution de $A_n u = f$, $\gamma^0 u = \varphi$.

$$\|u_n\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|f\|_{k,\lambda} + \|\varphi\|_{k+2,\lambda}) \quad .$$

On peut extraire une sous-suite (notée encore u_n) telle que :

$$u_n \to u \quad \text{dans } C^{k+2} , \qquad u \in C^{k+2,\lambda} \qquad \text{(proposition 1)} .$$

D'où

$$Au_n \to Au \quad \text{dans } C^k , \quad Au = f \qquad \text{et} \qquad \gamma^0 u_n \to \gamma^0 u \quad \text{dans } C^{k+2} , \quad \gamma^0 u = \varphi .$$

L'opérateur $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ est surjectif, donc un isomorphisme.

C. Q. F. D.

L'ensemble des opérateurs elliptiques, tels que $a(x) \leqslant 0$, étant convexe, donc connexe, il suffit de montrer que l'un des opérateurs $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ est bijectif pour démontrer qu'ils le sont tous. Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut montrer directement le résultat pour le laplacien, la démonstration étant assez délicate (10). Nous allons prouver que $u \longmapsto (Au\ ,\ \gamma^0 u)$ est bijectif, pour un opérateur à coefficients C^∞ sur une variété M, en utilisant le résultat suivant, mieux connu :

PROPOSITION 9. - Soit A un opérateur elliptique à coefficients C^∞, $a(x) \leqslant 0$. Alors $u \longmapsto (Au\ ,\ \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^\infty(M) \to C^\infty(M) \times C^\infty(\partial M)$.

Ce résultat s'établit souvent à l'aide de théorèmes d'existence et de régularité dans les espaces H^s (voir par exemple [1], [2] ou [6]). On pourrait aussi montrer l'existence dans $C^{1,\lambda}$ par la méthode des équations intégrales, puis utiliser les majorations a priori précédentes pour prouver la régularité.

PROPOSITION 10. - Soit A un opérateur différentiel à coefficients C^∞, $a(x) \leqslant 0$. Alors $u \longmapsto (Au\ ,\ \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de

$$C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M) .$$

L'opérateur étant injectif, il suffit de montrer qu'il est surjectif. Soient alors $f \in C^{k,\lambda}(M)$ et $\varphi \in C^{k+2,\lambda}(\partial M)$. D'après la proposition 2, il existe une suite f_n, une suite φ_n, et une constante C_1,

$$f_n \in C^\infty(M)\ , \qquad f_n \to f \quad \text{dans} \quad C^k(M)\ , \qquad \|f_n\|_{k,\lambda} \leqslant C_1\ ,$$

$$\varphi_n \in C^\infty(\partial M)\ , \qquad \varphi_n \to \varphi \quad \text{dans} \quad C^{k+2}(\partial M)\ , \qquad \|\varphi_n\|_{k+2,\lambda} \leqslant C_1 .$$

Soit u_n la solution de

$$\left| \begin{array}{l} Au_n = f \\ \gamma^0\, u_n = \varphi . \end{array} \right.$$

D'après la proposition 6, il existe C_2 telle que

$$\|u_n\|_{k+2,\lambda} \leqslant C_2(\|f_n\|_{k,\lambda} + \|\varphi_n\|_{k+2,\lambda}) \leqslant 2C_2\, C_1 .$$

On peut extraire de $\{u_n\}$ une sous-suite (notée encore u_n) telle que

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad C^{k+2}\ , \qquad u \in C^{k+2,\lambda} \qquad \text{(proposition 1)} .$$

D'où

(10) Voir [7].

$$Au_n \to Au \quad \text{dans} \quad C^k(M) \ , \qquad Au = f$$

et

$$\gamma^0 u_n \to \gamma^0 u \quad \text{dans} \quad C^{k+2}(\partial M) \ , \qquad \gamma^0 u = \varphi \ .$$

THÉORÈME I. - Soit M une variété à bord compacte connexe, $\partial M \neq \emptyset$. Soit A un opérateur différentiel elliptique du second ordre, à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$.

1° L'opérateur $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+2,\lambda}(\partial M)$ est d'indice 0. L'alternative de Fredholm a lieu (n° I.4).

2° Si $a(x) \leqslant 0$, $u \longmapsto (Au , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme.

Il y a existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet.

Le 2° est une conséquence immédiate des propositions 8 et 10 et du fait que l'ensemble des opérateurs A, tels que $a(x) \leqslant 0$, est connexe.

Pour démontrer le 1°, soit A un opérateur elliptique.

D'après le 2°, $u \longmapsto (Au - au , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme donc d'indice 0. L'opérateur $u \longmapsto (au , 0)$ est compact : une boule de $C^{k+2,\lambda}$ est compacte dans $C^{k,\lambda}$, la multiplication par a étant continue dans $C^{k,\lambda}$ la transforme en un compact de $C^{k,\lambda}$. Le théorème résulte alors du théorème de stabilité de l'indice (n° I.4).

DÉFINITION 11. - Dans le cas où $a(x) \leqslant 0$, on appelle <u>opérateur de Green</u> l'opérateur $G : C^{k,\lambda}(M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à toute $f \in C^{k,\lambda}(M)$, fait correspondre $u = Gf$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} Au = - f \\ \gamma^0 u = 0 \ . \end{array} \right.$$

D'après la proposition 4, c'est un opérateur positif, donc il se prolonge continûment en un opérateur de $C(M) \to C_0(\overset{\circ}{M})$ (fonctions continues sur M, nulles sur ∂M).

DÉFINITION 12. - Si $a(x) \leqslant 0$, on appelle <u>opérateur harmonique</u> (ou <u>noyau de Poisson</u>) l'opérateur $H : C^{k+2,\lambda}(\partial M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à toute $\varphi \in C^{k,\lambda}(\partial M)$, fait correspondre $u = H\varphi$ telle que

$$\left| \begin{array}{l} Au = 0 \\ \gamma^0 u = \varphi \ . \end{array} \right.$$

D'après la proposition 4, H est positif et se prolonge continûment en un opérateur de $C(\partial M) \to C(M)$.

II.4. Problème de Dirichlet sur une variété sans bord.

THÉORÈME I'. - Soit M une variété compacte connexe sans bord. Soit A un opérateur différentiel elliptique du second ordre à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$.

1° L'opérateur $u \mapsto Au$ de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M)$ est d'indice 0 . L'alternative de Fredholm a lieu.

2° Si $a(x) \leqslant 0$, a n'étant pas identiquement nulle, $u \mapsto Au$ est un isomorphisme.

Il y a existence et unicité du problème de Dirichlet.

Les démonstrations étant tout-à-fait semblables à celles du n° II.3, nous nous bornerons à quelques brèves indications.

D'après la proposition 4, si $a(x) \leqslant 0$, $Au = 0$ entraîne u constante. Si de plus a prend des valeurs strictement négatives $A1(x) = a(x)$, les constantes ne sont pas solutions. Sous l'hypothèse du 2°, $u \mapsto Au$ est injectif.

On montre, comme dans la proposition 8, que dans l'ensemble des opérateurs vérifiant l'hypothèse du 2°, l'ensemble des A , tels que $u \mapsto Au$ soit un isomorphisme, est ouvert et fermé. L'existence et l'unicité du problème de Dirichlet dans C^∞ est encore valable pour les opérateurs à coefficients C^∞ et vérifiant l'hypothèse du 2°. On en déduit, comme dans la proposition 10, l'existence et l'unicité dans $C^{k+2,\lambda}$. Un argument de connexité prouve alors la seconde partie du théorème. Si maintenant A est un opérateur quelconque, $u \mapsto (Au - au - u)$ est un isomorphisme d'après le 2°, $u \mapsto Au$ est donc d'indice 0 .

DÉFINITION 13. - Si $a(x) \leqslant 0$, a n'étant pas identiquement nulle, on appelle opérateur de Green l'opérateur $G : C^{k,\lambda}(M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à $f \in C^{k,\lambda}$, fait correspondre la solution $u = Gf$ de

$$Au = - f \quad .$$

D'après la proposition 4, c'est un opérateur positif, donc se prolongeant continûment en un opérateur de $C(M) \to C(M)$.

III. Le problème des dérivées obliques

On suppose désormais $\partial M \neq \emptyset$.

A étant un opérateur elliptique du second ordre à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$ $(k \geqslant 0 \; , \; 0 < \lambda < 1)$, L étant un opérateur frontière du type :

$$Lu(x') = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \alpha(x')\, u(x') \quad ,$$

où ν est un champ de vecteurs sur ∂M strictement dirigé vers l'intérieur, de classe $C^{k+1,\lambda}$, et α une fonction de $C^{k+1,\lambda}(\partial M)$, nous cherchons les solutions $u \in C^{k+2,\lambda}(M)$ du problème

$$\left| \begin{array}{l} Au = f \\ Lu = \varphi \end{array} \right.$$

pour tout couple de données $(f \; , \; \varphi) \in C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$.

III.1. Une condition suffisante d'unicité.

PROPOSITION 14.

1° Supposons $a \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$. Si $u \in C^2(M)$ est telle que $Au \geqslant 0$, $Lu \geqslant 0$, u ne peut atteindre de maximum positif sans être constante.

2° Si de plus l'une des fonctions a et α n'est pas identiquement nulle, $Au \geqslant 0$ et $Lu \geqslant 0$ entraînent $u \leqslant 0$.

En effet, d'après la proposition 4, u ne peut atteindre de maximum positif à l'intérieur sans être constante. Si elle atteignait un maximum positif en $x_0 \in \partial M$ sans être constante, on aurait, d'après la proposition 5, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, donc $Lu(x_0) < 0$, ce qui est impossible.

Pour une fonction constante positive $u(x) = m$, on a

$$Au(x) = ma(x) \qquad \text{et} \qquad Lu(x') = m\alpha(x) \quad .$$

Sous l'hypothèse du 2°, elles prennent des valeurs strictement négatives. Si une fonction vérifie $Au \geqslant 0$ et $Lu \geqslant 0$, elle est donc nécessairement négative.

COROLLAIRE 15. - Si $a \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, a et α n'étant pas identiquement nulles, on a

$$Au = 0 \; , \; Lu = 0 \implies u = 0 \quad .$$

III.2. Un cas particulier : opérateurs à coefficients C^∞ .

Soit A un opérateur elliptique à coefficients C^∞ avec $a(x) < 0$. G et H désigneront respectivement l'opérateur de Green et le noyau de Poisson associés (n° II.3, définitions 11 et 12).

Soit L un opérateur frontière du type

$$Lu(x') = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \quad ,$$

où ν est un champ de vecteurs C^∞ sur ∂M strictement dirigé vers l'intérieur.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 16. - Sous les hypothèses précédentes, l'opérateur

$$u \longmapsto (Au\ ,\ Lu)$$

de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$ est un isomorphisme.

A la partie principale de A , on peut associer une métrique riemannienne g de classe C^∞ (11) : dans chaque carte locale $(U\ ,\ \chi)$ où

$$Au(x) = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}(x) + \ldots \quad ,$$

la métrique g a pour composantes les g^{ij} tels que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\ g^{kj}(x) = \delta_i^j \quad .$$

Soit n un champ de vecteurs C^∞ sur M tel que, $\forall\ x' \in \partial M$, $n(x')$ soit la normale intérieure associée à g . On voit facilement que, $\forall\ x' \in \partial M$,

$$Au(x') = \frac{\partial}{\partial n} \circ \frac{\partial}{\partial n} u(x') + C(x') \frac{\partial u}{\partial n}(x') + Bu(x') \quad ,$$

où B est un opérateur différentiel elliptique sur la variété sans bord ∂M .

Enfin, on peut mettre ν sous la forme

$$\nu(x') = \beta(x')(n(x') + \tau(x')) \quad ,$$

où $\beta(x') \in C^\infty$, $\beta(x') > 0$, τ étant un champ de vecteurs sur ∂M tangent à ∂M . On notera encore τ un prolongement quelconque C^∞ du précédent à la variété M entière.

---

(11) Pour des définitions plus intrinsèques, voir [3].

Rechercher une solution u de $\left|\begin{array}{l} Au = f \\ Lu = \varphi \end{array}\right.$ revient, en appelant u_0 la solution de $\left|\begin{array}{l} Au = 0 \\ Lu = \varphi \end{array}\right.$, à chercher une fonction $v = u - u_0$ vérifiant

$$\left|\begin{array}{l} Au = 0 \\ Lv = \varphi - Lu_0 \end{array}\right. ,$$

ou encore en mettant v sous la forme $H\psi$ à résoudre le problème

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \circ H\, \psi(x') = \frac{\varphi - Lu_0}{\beta}(x') \quad .$$

Il nous suffira de montrer que l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \circ H$ est un isomorphisme de $C^{k+2,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M)$. Pour cela, nous allons montrer que l'opérateur

$$Q = \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \circ H \circ \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \circ H$$

est égal, à un opérateur compact près, à un opérateur différentiel elliptique sur ∂M.

<u>Notation</u>. - P_1 et P_2 étant deux opérateurs linéaires continus de

$$C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M) \quad ,$$

nous poserons $P_1\, \varphi \sim P_2\, \varphi$ si $P_1\, \varphi - P_2\, \varphi \in C^{k+2,\lambda}$.

Nous utiliserons le lemme suivant que nous démontrerons plus loin.

LEMME 17. - Soit $u \in C^{k+3,\lambda}(M)$ vérifiant $Au = 0$. Soit θ un champ de vecteurs C^∞ sur M.

Alors $H \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \in C^{k+3,\lambda}(M)$.

$$Q\varphi = \frac{\partial}{\partial n} H \circ \frac{\partial}{\partial n} H\varphi - \frac{\partial}{\partial \tau} H \frac{\partial}{\partial \tau} H\varphi + \left(\frac{\partial}{\partial n} H \frac{\partial}{\partial \tau} H - \frac{\partial}{\partial \tau} H \frac{\partial}{\partial n} H\right)\varphi \quad .$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial n} H \circ \frac{\partial}{\partial n} H\varphi(x') \sim \frac{\partial}{\partial n} \circ \frac{\partial}{\partial n} H\varphi(x') \qquad \text{d'après le lemme 17} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H \circ \frac{\partial}{\partial n} H\varphi(x') \sim - C \frac{\partial}{\partial n} H\varphi(x') - BH\varphi(x') \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H \frac{\partial}{\partial n} H\varphi(x') \sim - B\varphi(x') \quad ,$$

$$- \frac{\partial}{\partial \tau} \circ H \circ \frac{\partial}{\partial \tau} H\varphi = - \frac{\partial}{\partial \tau} \circ \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} H \frac{\partial}{\partial n} H\varphi \sim \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial n} H\varphi \qquad \text{d'après le lemme 17 ,}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} H \frac{\partial}{\partial n} H\varphi \sim \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial}{\partial\tau} H\varphi$$

l'opérateur $\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial n}$ étant du premier ordre seulement,

$$\frac{\partial}{\partial\tau} H \frac{\partial}{\partial n} H\varphi \sim \frac{\partial}{\partial n} H \frac{\partial}{\partial\tau} H\varphi \qquad \text{d'après le lemme 17 .}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} H \frac{\partial}{\partial\tau} H - \frac{\partial}{\partial\tau} H \frac{\partial}{\partial n} H\right)\varphi \sim 0$$

et

$$Q\varphi \sim -\left(B + \frac{\partial}{\partial\tau}\circ\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\varphi$$

$$Q\varphi = -\left(B + \frac{\partial}{\partial\tau}\circ\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\varphi + K\varphi \quad ,$$

K étant un opérateur linéaire appliquant $C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+2,\lambda}(\partial M)$ et continu de $C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M)$. Donc, d'après le théorème du graphe fermé, il est continu de $C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+2,\lambda}(\partial M)$ et compact de $C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M)$.

$B + \frac{\partial}{\partial\tau}\circ\frac{\partial}{\partial\tau}$ est un opérateur différentiel elliptique sur ∂M . Il résulte du théorème I' et du théorème de stabilité de l'indice (n° I.4) que Q est d'indice 0 .

D'après l'hypothèse faite $(a(x) < 0)$ et le corollaire 15,

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)H \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)H$$

sont injectifs, Q est donc injectif, donc surjectif, donc un isomorphisme de $C^{k+3,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M)$, d'inverse Q^{-1} .

L'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial\tau}\right)H$ a pour inverse l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)HQ^{-1}$. C'est donc un isomorphisme de $C^{k+2,\lambda}(\partial M) \to C^{k+1,\lambda}(\partial M)$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Démonstration du lemme 17. - u étant de classe $C^{k+3,\lambda}$, on a

$$A\frac{\partial}{\partial\theta} u - \frac{\partial}{\partial\theta} Au \in C^{k+1,\lambda} \quad ,$$

l'opérateur $A\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta} A$ étant du second ordre seulement. Mais $Au = 0$, d'où $A\frac{\partial}{\partial\theta} u \in C^{k+1,\lambda}$. On a

$$\frac{\partial}{\partial\theta} u = G(- A \frac{\partial}{\partial\theta} u) + H(\frac{\partial}{\partial\theta} u) \quad .$$

G étant continu de $C^{k+1,\lambda}(M) \to C^{k+3,\lambda}(M)$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} u - H \frac{\partial}{\partial\theta} u \in C^{k+3,\lambda} \quad .$$

PROPOSITION 18. - Si A est elliptique à coefficients C^∞ , $Lu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u$ à coefficients C^∞ :

1° $u \longmapsto (Au , Lu)$ est d'indice 0 de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$;

2° Si $a \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, l'une des deux fonctions n'étant pas identiquement nulle, $u \longmapsto (Au , Lu)$ est un isomorphisme.

En effet, l'opérateur $u \longmapsto ((A - a - 1)u , (L - \alpha)u)$ est bijectif d'après la proposition 16. Les opérateurs $u \longmapsto ((\alpha + 1)u , 0)$ et $u \longmapsto (0 , \alpha u)$ étant compacts, le 1° résulte du théorème de stabilité de l'indice.

Le 2° provient de l'injectivité de $u \longmapsto (Au , Lu)$ (corollaire 15).

PROPOSITION 19. - A et L étant à coefficients C^∞ , il existe une constante C telle que

$$\forall\ u \in C^{k+2,\lambda}(M) , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+1,\lambda}) \quad .$$

En effet, $u \longmapsto ((A - a - 1)u , (L - \alpha)u)$ étant un isomorphisme, on a

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|(A - a - 1)u\|_{k,\lambda} + \|(L - \alpha)u\|_{k+1,\lambda}) \quad ,$$

d'où la majoration.

III.3. Majorations a priori : cas général.

PROPOSITION 20. - Soient A un opérateur elliptique à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$, $L = \frac{\partial}{\partial\nu} + \alpha$ un opérateur frontière de classe $C^{k+1,\lambda}$.

Pour tout point x_0 de M , il existe un voisinage V de x_0 et une constante C tels que, pour toute fonction $u \in C^{k+2,\lambda}(M)$ à support dans V , on ait

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) \quad .$$

(U , χ) étant une carte locale au voisinage de x_0 , désignons par A' un opérateur elliptique à coefficients C^∞ sur M tel que

$$a_{ij}(x_0) = a'_{ij}(x_0) \quad ,$$

les $a_{ij}(x)$ (resp. $a'_{ij}(x)$) étant les coefficients du second ordre de A (resp. A') dans la carte (U , χ) .

De même, soit $L' = \frac{\partial}{\partial\nu'} + \alpha'$ un opérateur frontière C^∞ tel que

$$\nu(x_0) = \nu'(x_0) \quad [12] .$$

D'après la proposition 19, il existe une constante C_1 telle que,

$$\forall\, u \in C^{k+2,\lambda}(M) , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C_1(\|A'u\|_{k,\lambda} + \|L'u\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) .$$

D'autre part, une démonstration très semblable à celle du n° II.1 (e) montre qu'il existe un voisinage V de x_0 , image par χ^{-1} d'une boule centrée en $\chi(x_0)$ et de rayon δ assez petit tel que pour u à support dans V :

$$\|Au - A'u\|_{k,\lambda} \leqslant \frac{1}{3C_1} \|u\|_{k+2,\lambda} + C_2\|u\|_{k+2} ,$$

$$\|Lu - L'u\|_{k+1,\lambda} \leqslant \frac{1}{3C_1} \|u\|_{k+2,\lambda} + C_3\|u\|_{k+2} .$$

On en déduit alors :

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant \frac{2}{3} \|u\|_{k+2,\lambda} + C_4(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) ,$$

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant 3C_4(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) .$$

PROPOSITION 21. - Si A est de classe $C^{k,\lambda}$ et L de classe $C^{k+1,\lambda}$, il existe une constante C telle que

$$\forall\, u \in C^{k+2,\lambda}(M) , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) .$$

D'après la proposition précédente, on peut recouvrir M par un nombre fini d'ouverts V_i tels que la majoration précédente ait lieu pour les fonctions à supports dans V_i . φ_i étant une partition de l'unité subordonnée à V_i , on a

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant \sum_i \|\varphi_i\, u\|_{k+2,\lambda} \leqslant \sum_i C(\|A\varphi_i\, u\|_{k,\lambda} + \|L\varphi_i\, u\|_{k+1,\lambda} + \|\varphi_i\, u\|_{k+2}) ,$$

d'où on déduit simplement

$$\|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C'(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda} + \|u\|_{k+2}) .$$

---

[12] Dans le cas où $x_0 \in \partial M$.

III.4. Majorations pour un opérateur injectif.

PROPOSITION 22. - Supposons l'opérateur $u \longmapsto (Au , Lu)$ de

$$C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$$

injectif, il existe alors une constante C telle que

$$(9) \qquad \forall\, u \in C^{k+2,\lambda}(M) , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|Au\|_{k,\lambda} + \|Lu\|_{k+1,\lambda}) .$$

Ce résultat se déduit du précédent par une démonstration tout-à-fait semblable à celle de la proposition 6.

PROPOSITION 23. - La meilleure constante $C_{A,L}$ intervenant dans (9) est une fonction continue des opérateurs A et L (pour les topologies de la convergence dans $C^{k,\lambda}$ des coefficients de A et de la convergence dans $C^{k+1,\lambda}$ des coefficients de L).

La démonstration est semblable à celle de la proposition 7.

III.5. Résolution du problème des dérivées obliques.

PROPOSITION 24. - Considérons l'ensemble des opérateurs (A , L) tels que $a \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, a et α n'étant pas toutes deux identiquement nulles. L'ensemble des couples (A , L) tels que $u \longmapsto (Au , Lu)$ soit un isomorphisme de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(M)$ y est ouvert et fermé.

D'après le théorème des approximations successives, si $u \longmapsto (A_0\, u , L_0\, u)$ est un isomorphisme, $u \longmapsto (Au , Lu)$ est aussi un isomorphisme pour (A , L) voisin de (A_0 , L_0) .

Soient maintenant $A_n \to A$ et $L_n \to L$ tels que $u \longmapsto (A_n\, u , L_n\, u)$ soit un isomorphisme. $u \longmapsto (Au , Lu)$ étant injectif, il suffit de vérifier qu'il est surjectif. D'après la proposition 23, si $C > C_{A,L}$ on a, pour n assez grand,

$$\forall\, u \in C^{k+2,\lambda} , \qquad \|u\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|A_n\, u\|_{k,\lambda} + \|L_n\, u\|_{k+1,\lambda}) .$$

Pour un couple (f , φ) quelconque de $C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$, soit u_n la solution de $A_n\, u = f$, $L_n\, u = \varphi$.

$$\|u_n\|_{k+2,\lambda} \leqslant C(\|f\|_{k,\lambda} + \|\varphi\|_{k+1,\lambda}) .$$

On peut, d'après la proposition 1, en extraire une sous-suite convergeant dans C^{k+2} vers $u \in C^{k+2,\lambda}$.

$$A_n u_n \to Au \quad \text{dans} \quad C^k , \qquad Au = f ,$$

$$L_n u_n \to Lu \quad \text{dans} \quad C^{k+1} , \qquad Lu = \varphi .$$

Et $u \longmapsto (Au , Lu)$ est un isomorphisme.

THÉORÈME II. - Soit M une variété à bord compacte connexe $(\partial M \neq \emptyset)$.

Soit A un opérateur différentiel elliptique du second ordre, à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$.

Soit L un opérateur frontière : $Lu(x') = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \alpha(x')\, u(x')$, ν étant un champ de vecteurs de classe $C^{k+1,\lambda}$ sur ∂M strictement dirigé vers l'intérieur, $\alpha \in C^{k+1,\lambda}(\partial M)$.

1° L'opérateur $u \longmapsto (Au , Lu)$ de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k+1,\lambda}(\partial M)$ est d'indice 0 .

2° Si de plus $a \leqslant 0$, $\alpha \leqslant 0$, a et α n'étant pas toutes deux identiquement nulles, $u \longmapsto (Au , Lu)$ est un isomorphisme. Il y a existence et unicité de la solution du problème des dérivées obliques.

Les opérateurs (A , L) vérifiant l'hypothèse du 2° forment un cône convexe, donc connexe. Le sous-ensemble des opérateurs (A , L) , qui sont des isomorphismes, est ouvert et fermé. Il est non vide puisqu'il contient les opérateurs à coefficients C^∞ (proposition 18). Ceci prouve le 2°.

Pour un couple (A , L) quelconque, considérons l'opérateur

$$u \longmapsto ((A - a - 1)u , (L - \alpha)u) ,$$

qui est un isomorphisme d'après le 2°, donc d'indice 0 . Les opérateurs

$$u \longmapsto ((a + 1)u , 0) \qquad \text{et} \qquad u \longmapsto (0 , \alpha u)$$

étant compacts (proposition 1), le 1° résulte du théorème de stabilité de l'indice.

DÉFINITION 25. - Sous les hypothèses du théorème II.2°, on appelle <u>opérateur de Green</u> relatif à L l'opérateur G^L de $C^{k,\lambda}(M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à $f \in C^{k,\lambda}(M)$, fait correspondre la solution $u = G^L f$ de $\left| \begin{array}{l} Au = -f \\ Lu = 0 \end{array} \right.$.

D'après la proposition 14, c'est un opérateur positif, donc prolongeable continûment de $C(M) \to C(M)$.

DÉFINITION 26. - Sous les hypothèses du théorème II.2°, on appelle <u>opérateur harmonique</u> relatif à L, l'opérateur H^L de $C^{k+1,\lambda}(\partial M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à $\varphi \in C^{k+1,\lambda}(\partial M)$, fait correspondre la solution $u = H^L \varphi$ de $\left|\begin{array}{l} Au = 0 \\ Lu = -\varphi \end{array}\right.$.

D'après la proposition 14, c'est un opérateur positif, donc se prolongeant continûment de $C(\partial M) \to C(M)$.

IV. Le problème de Višik

On suppose $\partial M \neq \emptyset$.

A étant un opérateur différentiel elliptique à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$, L étant un opérateur frontière du type

$$Lu(x') = Bu(x') + \frac{\partial u}{\partial \tau}(x') ,$$

où B est un opérateur différentiel elliptique sur la variété ∂M, à coefficients de classe $C^{k,\lambda}$, et τ un champ de vecteurs défini sur ∂M, de classe $C^{k,\lambda}$, nous cherchons les solutions $u \in C^{k+2,\lambda}$ du problème

$$\left|\begin{array}{l} Au = f \\ Lu = \varphi \end{array}\right.$$

pour tout couple de données $(f, \varphi) \in C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M)$.

IV.1. Une condition suffisante d'unicité.

PROPOSITION 27. - Sous les hypothèses suivantes :

τ dirigé vers l'intérieur, $a(x) = A1(x) \leqslant 0$, $b(x') = B1(x') \leqslant 0$;
en tout point frontière x', ou bien $b(x') < 0$, ou bien τ est strictement dirigé vers l'intérieur.

1° Si $Au \geqslant 0$, $Lu \geqslant 0$, u ne peut atteindre de maximum strictement positif sans être constante.

2° Si de plus l'une des fonctions a ou b n'est pas identiquement nulle, $Au \geqslant 0$, $Lu \geqslant 0 \Longrightarrow u \leqslant 0$.

u ne peut atteindre de maximum positif à l'intérieur sans être constante (proposition 4). Supposons que u atteigne un maximum strictement positif en $x' \in \partial M$. Si $b(x') < 0$, on a $Bu(x') < 0$ et $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x') \leqslant 0$, d'où $Lu(x') < 0$, ce qui est absurde. Si τ est strictement dirigé vers l'intérieur, on a $\frac{\partial u}{\partial \tau}(x') < 0$ à moins que u ne soit constante (proposition 5), et $Bu(x') \leqslant 0$, d'où $Lu(x') < 0$, ce qui est encore absurde.

Si de plus l'une des fonctions a ou b n'est pas identiquement nulle, l'une des fonctions $A1$ ou $L1$ prend des valeurs strictement négatives. Si $Au \geqslant 0$, $Lu \geqslant 0$, on a donc nécessairement $u \leqslant 0$.

COROLLAIRE 28. - Sous les hypothèses du 2° de la proposition 27, l'opérateur $u \longmapsto (Au , Lu)$ est injectif.

IV.2. Résolution du problème de Višik.

THÉORÈME III. - Soit A elliptique à coefficients $C^{k,\lambda}$.

Soit $L = B + \frac{\partial}{\partial\tau}$ un opérateur frontière où B est elliptique sur ∂M , de classe $C^{k,\lambda}$, τ un champ de vecteurs défini sur ∂M de classe $C^{k,\lambda}$.

1° L'opérateur $u \longmapsto (Au , Lu)$ de $C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M)$ est d'indice 0 .

2° Sous l'hypothèse de la proposition 27.2°, l'opérateur $u \longmapsto (Au , Lu)$ est un isomorphisme.

Il y a existence et unicité de la solution du problème frontière.

Considérons l'opérateur $u \longmapsto ((A - a)u , (B - b - 1)u)$ de

$$C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M) .$$

Résoudre le problème

$$\left|\begin{array}{l}(A - a)u = f \\ \\ (B - b - 1)u = \varphi\end{array}\right. \qquad \text{pour} \quad (f , \varphi) \in C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M)$$

revient à chercher $w \in C^{k+2,\lambda}(\partial M)$ telle que $(B - b - 1)w = \varphi$, puis à chercher $u \in C^{k+2,\lambda}(M)$ telle que

$$\left|\begin{array}{l}(A - a)u = f \\ \gamma^0 u = w .\end{array}\right.$$

Il y a existence et unicité de w (problème de Dirichlet sur une variété sans bord : théorème I'), puis existence et unicité de u (problème de Dirichlet sur une variété à bord : théorème I).

$u \longmapsto ((A - a)u , (B - b - 1)u)$ est un isomorphisme, donc d'indice 0 . Les opérateurs

$$u \longmapsto (au\ ,\ 0)\ ,\qquad u \longmapsto (0\ ,\ (b+1)u)\ ,\qquad u \longmapsto \left(0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$$

sont continus de $C^{k+1,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M)$, donc compacts de

$$C^{k+2,\lambda}(M) \to C^{k,\lambda}(M) \times C^{k,\lambda}(\partial M) \qquad \text{(proposition 1)} .$$

La première partie du théorème résulte alors du théorème de stabilité de l'indice (n° I.4).

Sous l'hypothèse de la proposition 27.2°, l'opérateur $u \longmapsto (Au\ ,\ Lu)$ est injectif et d'indice 0 . C'est donc un isomorphisme.

DÉFINITION 29. - Sous les hypothèses du théorème III.2°, on appelle opérateur de Green relatif à L , l'opérateur $G^L : C^{k,\lambda}(M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à $f \in C^{k,\lambda}(M)$, fait correspondre la solution $u = G^L f$ de $\left|\begin{array}{l} Au = -f \\ Lu = 0 \end{array}\right.$.

D'après la proposition 27, c'est un opérateur positif, il se prolonge donc continûment en un opérateur de $C(M) \to C(M)$.

DÉFINITION 30. - Sous les hypothèses du théorème III.2°, on appelle opérateur harmonique relatif à L , l'opérateur $H^L : C^{k,\lambda}(\partial M) \to C^{k+2,\lambda}(M)$ qui, à $\varphi \in C^{k,\lambda}(\partial M)$, fait correspondre la solution $u = H^L \varphi$ de

$$\left|\begin{array}{l} Au = 0 \\ \\ Lu = -\varphi \end{array}\right. .$$

D'après la proposition 27, c'est un opérateur positif, il se prolonge donc continûment en un opérateur de $C(\partial M) \to C(M)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIREMBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., Comm. pure and appl. Math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[2] AGMON (Shmuel). - Lectures on elliptic boundary value problems. - Princeton, D. Van Nostrand Comp., 1965 (Van Nostrand mathematical Studies, 2).

[3] COURRÈGE (Philippe). - Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 10e année, 1965/66, exposés n° 1 à 3, 30, 38 et 48 p.

[4] FIORENZA (Rapato). - Sui problemi di derivate obliqua per le equazioni ellittiche, Ric. di Mat., t. 8, 1959, p. 83-110.

[5] GRISVARD (Pierre). - Opérateurs à indice : lemme de compacité, Séminaire Cartan-Schwartz : Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique, 16e année, 1963/64, exposé n° 12, 9 p.

[6] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[7] KELLOG (O. D.). - On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Trans. Amer. math. Soc., t. 33, 1931, p. 486-510.

[8] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik, neue Folge, 2).

[9] PALAIS (Richard S.). - Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. - Princeton, Princeton University Press, 1965 (Annals of Mathematics Studies, 57).