Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier

Approximation dans les algèbres bornologiques

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 5, nº 1 (1965-1966), exp. nº 1, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1965-1966__5_1_A1_0>

APPROXIMATION DANS LES ALGÈBRES BORNOLOGIQUES

par Jean-Pierre FERRIER

1. - Le but de l'étude qui suit est de généraliser le problème de l'approximation des fonctions continues sur un espace topologique non nécessairement compact ; ce problème a été déjà abordé sous une forme assez générale par F. W. ANDERSON et J. E. FENSTAD (voir, par exemple, ANDERSON [2]), seulement, l'approximation y est considérée, soit au sens de la convergence uniforme, soit pour la "m-topologie", dans laquelle un système fondamental de voisinages de zéro est constitué par les ensembles $\{f \mid |f| \leqslant m\}$ où m est une fonction continue positive ne s'annulant pas. La deuxième topologie est compatible avec la structure d'anneau de l'ensemble des fonctions continues, mais aucune des deux n'est compatible avec la multiplication par les scalaires ; elles sont d'autre part trop fines et conduisent à des hypothèses trop restrictives pour l'obtention de résultats d'approximation.

Un cas bien plus particulier est celui du problème classique de Bernstein. Rappelons que, si ξ désigne l'application identique de $\underset{\sim}{R}$ et $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R})$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur $\underset{\sim}{R}$ tendant vers zéro à l'infini, munie de la norme uniforme, on dit qu'une fonction w de $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R})$ est un poids si elle décroit plus vite que les inverses de polynômes, c'est-à-dire si $w\underset{\sim}{R}[\xi] \subset \mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R})$, et qu'un poids w est fondamental si l'espace vectoriel $w\underset{\sim}{R}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R})$. Le problème de Bernstein consiste à donner des conditions sur la décroissance de w à l'infini, pour qu'un poids w soit fondamental. Comme l'a fait remarquer L. NACHBIN [7], si on désigne par $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur $\underset{\sim}{R}$ à croissance polynomiale, c'est-à-dire majorées par un polynôme, pour qu'un poids w soit fondamental, il faut et il suffit qu'il ne s'annule pas et que $\underset{\sim}{R}[\xi]$ soit dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ pour la semi-norme $f \longmapsto \|fw\|$. Sous cette forme, apparait tout de suite une généralisation : Soit π une semi-norme finie sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$; on dira que π est fondamentale si $\underset{\sim}{R}[\xi]$ est dense dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ pour cette semi-norme.

2. - Le théorème qui suit a été démontré par H. POLLARD [9] dans le cas où π était l'une des semi-normes : $f \longmapsto \|fw\|$ et $f \longmapsto [\int (fw)^2\, dx]^{1/2}$. La démonstration qui suit s'inspire de celles de H. POLLARD dont l'analogie faisait pressentir une unification.

THÉORÈME 1. - <u>Pour qu'une semi-norme finie croissante</u> π <u>sur</u> $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ <u>soit fondamentale, il suffit que</u> :

$$\sup \{\int \frac{\log^+ |p(x)|}{1+x^2} dx \mid p \in \mathbb{R}[\xi] , \pi(p) \leqslant 1\} = +\infty .$$

Rappelons que π est dite croissante si $|f| \leqslant g$ entraîne $\pi(f) \leqslant \pi(g)$; d'autre part, on a posé : $\log^+ = \sup(\log , 0)$ et de même $\log^- = -\inf(\log , 0)$. Cela étant dit, supposons que π ne soit pas fondamentale ; il existe alors d'après HAHN-BANACH une forme linéaire continue non nulle μ sur $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ telle que $\mu(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}[\xi]$. Il nous faudra savoir qu'une telle forme linéaire est une intégrale ; de façon précise :

LEMME 1. - <u>Soit</u> μ <u>une forme linéaire sur</u> $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ <u>bornée pour la bornologie de l'ordre, et soit</u> $d\mu$ <u>la mesure de Radon définie par la restriction de</u> μ <u>à l'espace</u> $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ <u>des fonctions continues à support compact. Alors</u> :

(i) <u>Toute fonction de</u> $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ <u>est</u> $d\mu$-<u>intégrable</u> ;

(ii) <u>Si</u> $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$, $\int f(x)\, d\mu(x) = \mu(f)$;

(iii) <u>Si</u> $f \in \mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ et $f \geqslant 0$, $\int f(x)\, |d\mu|(x) = \sup\limits_{\substack{|g|\leqslant f \\ g\in\mathcal{C}_p(\mathbb{R})}} |\mu(g)|$.

<u>Preuve de (i)</u>. - Remarquons d'abord que (iii) est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ par définition de $|d\mu|$. D'autre part, il suffit de prouver (i) lorsque f est positive ; f est alors limite simple d'une suite croissante (f_n) de fonctions de $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant f_n \leqslant f$.

On a donc successivement :

$$\sup_{n\in N} \int f_n(x)\, |d\mu|(x) = \sup_{n\in N} \sup_{\substack{|g|\leqslant f_n \\ g\in\mathcal{C}_K(\mathbb{R})}} |\int g(x)\, d\mu(x)|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|g|\leqslant f \\ g\in\mathcal{C}_K(\mathbb{R})}} |\int g(x)\, d\mu(x)| \leqslant \sup_{\substack{|g|\leqslant f \\ g\in\mathcal{C}_p(\mathbb{R})}} |\mu(g)| < +\infty .$$

Par suite, d'après FATOU, $f = \sup f_n$ est $|d\mu|$-intégrable, donc $d\mu$-intégrable.

<u>Preuve de (ii)</u>. - La relation est vraie si $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$; or $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ est dense au sens de MACKEY dans $\mathcal{C}_p(\mathbb{R})$ pour la bornologie de l'ordre, et μ et $d\mu$ sont toutes deux bornées pour cette dernière.

<u>Preuve de (iii)</u>. – Compte tenu de (ii), c'est un simple résultat d'intégration. Dans un sens, on a

$$\sup_{\substack{|g|\leqslant f\\ g\in\mathcal{C}_P(\underset{\sim}{R})}} \left|\int g(x)\ d\mu(x)\right| \leqslant \sup_{\substack{|g|\leqslant f\\ g\in\mathcal{C}_P(\underset{\sim}{R})}} \int |g(x)|\ |d\mu|(x) \leqslant \int f(x)\ |d\mu|(x) \quad .$$

Dans l'autre, on écrit f comme limite d'une suite croissante de fonctions f_n de $\mathcal{C}_K(\underset{\sim}{R})$ telles que $0 \leqslant f_n \leqslant f$. Alors :

$$\int f(x)\ |d\mu|(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n(x)\ |d\mu|(x)$$

et

$$\int f_n(x)\ |d\mu|(x) = \sup_{\substack{|g|\leqslant f_n\\ g\in\mathcal{C}_K(\underset{\sim}{R})}} \left|\int g(x)\ d\mu(x)\right| \leqslant \sup_{\substack{|g|\leqslant f\\ g\in\mathcal{C}_K(\underset{\sim}{R})}} \left|\int g(x)\ d\mu(x)\right| \quad .$$

Il résulte de (iii) que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_P(\underset{\sim}{R})$, la mesure $f\ d\mu$ est bornée ; de plus, pour toute semi-norme bornée pour la bornologie de l'ordre sur $\mathcal{C}_P(\underset{\sim}{R})$, on a :

$$\|f\ d\mu\| \leqslant \|f\|\cdot\|\mu\| \quad .$$

Revenons à la preuve du théorème ; pour prouver que

$$\sup_{\pi(p)\leqslant 1} \int \frac{\log^+ |p(x)|}{1+x^2}\, dx < +\infty \quad ,$$

il suffit, par FATOU, de voir que la fonction

$$y \longmapsto \sup_{\pi(p)\leqslant 1} \int \frac{\log^+ |p(x+iy)|}{1+x^2}\, dx$$

est bornée au voisinage de zéro dans l'intervalle $]0\ ,\ \rightarrow[$. Introduisons la fonction analytique $H(z) = \int \frac{d\mu(u)}{u-z}$. On a clairement :

$$\int \frac{\log^+ |p(z)|}{1+x^2}\, dx \leqslant \int \frac{\log^+ |p(z)\ H(z)|}{1+x^2}\, dx + \int \frac{|\log |H(z)||}{1+x^2}\, dx \quad .$$

Pour majorer chaque terme, il nous faudra utiliser un lemme approprié :

LEMME 2 (TITCHMARSH). – <u>Il existe des constantes positives</u> y_0 , M , <u>avec</u> $y_0 > 0$, <u>telles que pour toute mesure</u> μ <u>de norme</u> $\leqslant 1$ <u>sur</u> R , <u>si on pose</u> $H(z) = \int \frac{d\mu(u)}{u-z}$, <u>on ait</u> :

$$\int \frac{|H(z)|^{1/2}}{1+x^2}\, dx \leqslant M \quad \text{pour} \quad \operatorname{Im} z \in \left]0\, , y_0\right] \ .$$

Ce lemme se trouve énoncé dans POLLARD [9] sans démonstration ; celle-ci se fonde sur un argument de TITCHMARSH ([11], p. 144-145).

On peut d'abord se ramener au cas où μ est positive, en écrivant $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Posons alors pour tout nombre positif a :

$$H_a(z) = \int_{-a}^{a} \frac{d\mu(u)}{u-z} , \qquad \operatorname{Re}(H_a) = U_a \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(H_a) = V_a \ .$$

On a clairement :

$$V_a(z) = \int_{-a}^{a} \frac{y}{|u-z|^2}\, d\mu(x) > 0 \quad \text{pour} \quad a \quad \text{assez grand}$$

et si on choisit la détermination de $z^{1/2}$ qui, pour z non imaginaire négatif, prend des valeurs dont l'argument est compris entre 0 et π , on peut écrire :

$$\int \frac{|H_a(z)|^{1/2}}{1+x^2}\, dx \leqslant \int \frac{|H_a^{1/2}(z) - U_a^{1/2}(z)|}{1+x^2}\, dx + \int \frac{|U_a(z)|^{1/2}}{1+x^2}\, dx \ .$$

Pour majorer le premier terme du second membre, remarquons que si $s \in \underset{\sim}{R}$, $t \in \underset{\sim}{R}^+$, on a : $|\sqrt{s+it} - \sqrt{s}| \leqslant t+2$. En effet si $|s| \geqslant 1$,

$$|\sqrt{s+it} - \sqrt{s}| = \left|\int_s^{s+it} \frac{dz}{2\sqrt{z}}\right| \leqslant \frac{t}{2\sqrt{s}} \leqslant t$$

et si $|s| \leqslant 1$,

$$|\sqrt{s+it} - \sqrt{s}| \leqslant \sqrt{1+t} + 1 \leqslant t+2 \ .$$

Par suite :

$$\int \frac{|H_a^{1/2}(z) - U_a^{1/2}(z)|}{1+x^2}\, dx \leqslant \int \frac{V_a(z)+2}{1+x^2}\, dx \leqslant \int V_a(z)\, dx + 2\pi \ .$$

Or, par FUBINI, $\int V_a(z)\, dx = \pi \int_{-a}^{a} d\mu(x) \leqslant \pi$, de sorte que le premier terme est majoré par 3π . Par ailleurs

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{i}\, U_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\right) = |U_a(z)|^{1/2} \frac{x^2 - y^2 + 1 + 2xy}{2[(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2 y^2]} ,$$

et un calcul simple montre qu'il existe deux constantes strictement positives y_0 et K telles que, pour tout $y \in \left]0\, , y_0\right[$, on ait :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{i}\; U_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\right) \geq \frac{K|U_a(z)|^{1/2}}{1+x^2} .$$

Donc, si $y \in]0 , y_0[$:

$$\int \frac{|U_a(z)|^{1/2}}{1+x^2}\, dx \leq \frac{1}{K}\left|\int \frac{U_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\, dx\right| \leq \frac{1}{K}\left|\int \frac{H_a^{1/2}(z) - U_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\right| + \frac{1}{K}\left|\int \frac{H_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\, dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{K}\int \frac{|H_a^{1/2}(z) - U_a^{1/2}(z)|}{1+x^2}\, dx + \frac{1}{K}\left|\int \frac{H_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\, dx\right| \leq 3\pi + \frac{1}{K}\left|\int \frac{H_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\, dx\right| .$$

Or, par les résidus, il vient :

$$\int \frac{H_a^{1/2}(z)}{1+z^2}\, dx = \pi\, H_a(i)^{1/2}$$

et comme :

$$|H_a(i)| = \left|\int_{-a}^{a} \frac{d\mu(u)}{u-i}\right| \leq \int_{-a}^{a} d\mu(u) \leq 1 ,$$

le second terme est majoré par $3\pi + \frac{1}{K}$.

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. - <u>Avec les notations du lemme 2</u> :

$$\int \frac{\log^+ |H(z)|}{1+x^2}\, dx \leq M \quad \text{pour} \quad y \in]0 , y_0[.$$

En effet, clairement : $\log^+ x \leq \sqrt{x}$.

LEMME 3 (POLLARD). - <u>Si</u> H <u>est une fonction analytique non nulle dans le demi-plan</u> $\operatorname{Im} z > 0$, <u>bornée inférieurement dans tout demi-plan</u> $\operatorname{Im} z \geq \eta > 0$, <u>alors la fonction</u> $y \longmapsto \int \frac{\log |H(z)|}{1+x^2}\, dx$ <u>est bornée au voisinage de zéro dans l'intervalle</u> $]0 , \to[$.

Pour tout $\eta > 0$, soit H_η la fonction analytique $z \longmapsto H(z + i\eta)$ définie dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > -\eta$ et soit K_η la composée de la transformation conforme $z \longmapsto i\,\frac{1-z}{1+z}$ et de H_η . On est ramené à prouver que l'application $\eta \longmapsto \int_0^{2\pi} \log |K_\eta(e^{i\theta})|\, d\theta$ est bornée inférieurement dans un voisinage de zéro. K_η est analytique et bornée dans le disque $|z| \leq 1$ sauf au point -1 , et l'ensemble des zéros de K_η sur le cercle $|z| = 1$ est dénombrable.

Supposons d'abord $H(i) \neq 0$. Alors, comme $K_\eta(0) = H(i(1+\eta))$, il existe un voisinage V de zéro pour η dans lequel $|K_\eta(0)| \geq \left|\frac{H(i)}{2}\right|$. D'après le théorème de Jensen, pour tout $r \in [0\,,1[$ et tout $\eta \in V$:

$$\int_0^{2\pi} \log |K_\eta(re^{i\theta})|\, d\theta > 2\pi \log |K_\eta(0)| > 2\pi \log \left|\frac{H(i)}{2}\right| .$$

Il suffit alors de passer à la limite pour r tendant vers 1, ce qui est possible puisque K_η est bornée dans le disque $|z| \leq 1$ et que

$$\lim_{r\to 1} \log |K_\eta(re^{i\theta})| = \log (K_\eta(e^{i\theta}))$$

sauf peut-être sur un ensemble dénombrable.

Enfin si $H(i) = 0$, on écrit $H(z) = (z-i)^p\, H_1(z)$ où $H_1(i) \neq 0$ et le même raisonnement marche.

COROLLAIRE 2. - <u>Avec les notations du lemme 1, la fonction</u>

$$y \longmapsto \int \frac{|\log |H(z)||}{1+x^2}\, dx$$

<u>est bornée au voisinage de zéro, pour toute mesure bornée</u> μ.

Cela résulte du corollaire 1, du lemme 3 et de l'égalité

$$|\log x| = 2 \log^+ x - \log x \quad ;$$

H vérifie bien les hypothèses du lemme 3 : en effet, l'espace vectoriel fermé engendré par les fonctions $t \longmapsto \frac{1}{z-t}$ (où $\operatorname{Im} z \neq 0$) est une algèbre autoadjointe qui sépare les points de $\underset{\sim}{R}$, donc est dense dans $\mathcal{C}_0(\underset{\sim}{R})$; par suite, si H était nulle, μ le serait aussi.

Terminons enfin la démonstration du théorème : on a $H(z) = \int \frac{u^n}{z^n} \frac{d\mu(u)}{u-z}$, puisque $\frac{1}{u-z} = -\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} - \dots - \frac{u^{n-1}}{z^n} + \frac{u^n}{z^n(u-z)}$ et que $\int u^m\, d\mu(u) = 0$ pour tout m. Par suite

$$p(z)\, H(z) = \int p(u)\, \frac{d\mu(u)}{u-z} \quad \text{pour tout} \quad p \in \underset{\sim}{R}[\xi] .$$

Si $\pi(p) \leq 1$, $\|p(u)\, d\mu(u)\| \leq \pi(p)\, \pi(\mu) \leq \pi(\mu)$, de sorte qu'on peut appliquer le corollaire 1, où $d\mu(u)$ est remplacée par $p(u)\, d\mu(u)$, pour majorer le premier terme ; enfin le corollaire 2 permet de majorer le second.

3. - Nous allons voir maintenant comment on peut retrouver un certain nombre de critères suffisants pour qu'une semi-norme finie croissante sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ soit fondamentale.

PROPOSITION 1 (Critère de Paley-Wiener). - Pour qu'une norme croissante π sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ soit fondamentale, il suffit que, si l'on pose $\pi(x^n) = A_n$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \log\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{A_{2n}}\right) \frac{dx}{1+x^2}$$

soit divergente.

Si l'intégrale $\int_0^\infty \log\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{A_{2n}}\right) \frac{dx}{1+x^2}$ diverge, il en est de même de $\int_1^\infty \log^+\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{2^n A_{2n}}\right) \frac{dx}{1+x^2}$, comme on le voit en changeant x en $\frac{x}{\sqrt{2}}$, et alors, par FATOU :

$$\sup_{m\in N} \int_0^\infty \log^+\left(\sum_{n=0}^m \frac{x^{2n}}{2^n A_{2n}}\right) \frac{dx}{1+x^2} = +\infty .$$

Or, comme $\pi\left(\frac{x^{2n}}{A_{2n}}\right) = 1$, $\pi\left(\sum_{n=0}^m \frac{x^{2n}}{2^n A_{2n}}\right) \leqslant 1$, et tout résulte du théorème 1.

Remarque. - Si la suite $A_n^{1/n}$ est croissante, il suffit que l'intégrale $\int_0^\infty \log\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{A_n^2}\right) \frac{dx}{1+x^2}$ soit divergente.

PROPOSITION 2 (Critère de Carleman-Denjoy). - Avec les notations précédentes, il suffit encore que la suite $A_n^{1/n}$ soit croissante et la série $A_n^{-1/n}$ divergente.

En effet, s'il en est ainsi, posant $a_n = A_n^{1/n}$, on sait que la série $n\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ est divergente. Or

$$\int \log\left(\sum \frac{x^{2n}}{A_n^2}\right) \frac{dx}{1+x^2} \geqslant \sum_{n=0}^\infty \int_{ea_n}^{ea_{n+1}} 2n. \frac{\log\left(\frac{x_n}{a_n}\right)}{1+x^2}\, dx \geqslant \sum_{n=0}^\infty \frac{n}{e}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) .$$

Ce dernier résultat se déduisait d'habitude des théorèmes de quasianalyticité, En revanche, l'étude précédente permet de retrouver ces derniers en les généralisant. On voit s'introduire naturellement la transformation de Fourier, qui joue un rôle important dans certaines approches du problème de Berstein. Rappelons qu'une fonction indéfiniment dérivable est dite quasianalytique si elle est nulle ou s'il n'existe aucun point en lequel elle soit nulle avec toutes ses dérivées ; un ensemble de fonctions est dit quasianalytique s'il ne contient que des fonctions quasianalytiques. Dans les mémoires classiques (R. CARLEMAN [3], S. MANDELBROJT [5]), on étudie la quasianalyticité des sous-ensembles de $\mathcal{C}^\infty(\underset{\approx}{R})$ définis par des inégalités du type : $\|f^{(n)}\| \leqslant A_n$, $n \in N$. En réalité, au lieu de considérer seulement les dérivées, on peut aussi s'intéresser à tous les opérateurs différentiels polynomiaux. Si l'on désigne par D_p l'opérateur différentiel défini par le polynôme p, au lieu de se donner une suite (A_n) , on se donnera une semi-norme π sur les polynômes, et on étudiera la quasianalyticité de l'ensemble des f de $\mathcal{C}^\infty(\underset{\approx}{R})$ telles que : $\|D_p(f)\| \leqslant \pi(p)$, $p \in \underset{\approx}{R}[X]$. Le cas classique correspond à la semi-norme $\sum a_n X^n \longmapsto \sum a_n A_n$.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> π <u>une semi-norme finie fondamentale sur</u> $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$; <u>l'ensemble des</u> $f \in \mathcal{C}^\infty(\underset{\approx}{R})$ <u>telles que</u> $\|D_{p(1+X^2)}(f)\|_2 \leqslant \pi(p)$ <u>pour tout polynôme</u> p , <u>est quasianalytique</u>.

Supposons qu'il existe une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(\underset{\approx}{R})$ telle que $\|D_{p(1+X^2)}(f)\|_2 \leqslant \pi(p)$ et $D_p(f)(0) = 0$ pour tout polynôme p . Puisque π est finie, f appartient à $\mathcal{D}\mathcal{L}^2$ et par conséquent, pour toute fonction g de $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$, le produit par g de la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f , appartient à $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2$. En outre, d'après PLANCHEREL : $\|D_p(f)\|_2 = \|p\hat{f}\|_2$. De l'hypothèse $\|p(1 + \xi^2)\hat{f}\| \leqslant \pi(p)$ pour tout polynôme p , il résulte, puisque π est fondamentale et $\mathcal{L}^2$ complet, que $\|g(1 + \xi^2)\hat{f}\| \leqslant \pi(g)$ pour toute fonction g de $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$. Par suite la forme linéaire sur $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$: $g \longmapsto \int g(x)\,\hat{f}(x)\,dx$ est continue pour π puisque, par l'inégalité de Schwarz :

$$\|g\hat{f}\|_1 \leqslant \|g(1 + \xi^2)\hat{f}\|_2 . \left\|\frac{1}{1 + \xi^2}\right\|_2 \leqslant \pi(g) . \left\|\frac{1}{1 + \xi^2}\right\|_2 .$$

Comme $D_p(f)(0) = 0$, il vient : $\int p(x)\,\hat{f}(x)\,dx = 0$ pour tout polynôme p , puis par continuité $\int g(x)\,\hat{f}(x)\,dx = 0$ pour toute fonction g de $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$, d'où $\hat{f} = 0$ et enfin $f = 0$.

COROLLAIRE 3 (CARLEMAN-DENJOY). - <u>Soit</u> A_n <u>une suite de nombres strictement positifs telle que la suite</u> $A_n^{1/n}$ <u>soit croissante, et la série</u> $A_n^{-1/n}$ <u>divergente</u> ; <u>dans ces conditions, la classe définie par les inégalités</u> $\|f^{(n)}\|_2 \leqslant A_n$ <u>dans</u> $\mathcal{C}^\infty(\underset{\approx}{R})$ <u>est quasianalytique</u>.

En effet, il résulte de la proposition 2 et du théorème de Plancherel que la semi-norme sur $\mathcal{C}_p(\underset{\approx}{R})$: $g \longmapsto \|g(1 + \xi^2)\hat{f}\|_2$ est fondamentale ; elle est en effet croissante, et le seul effet de $1 + \xi^2$ est de produire un décalage dans les

A_n . On applique alors la proposition précédente.

Remarque. - Les conditions classiques font apparaître la norme $\mathcal{L}^\infty$ au lieu de la norme $\mathcal{L}^2$; il est en effet facile de passer des unes aux autres (voir PALEY-WIENER [6]). Pour se ramener à l'intervalle $]-1, 1[$, on peut utiliser un lemme de N. LEVINSON disant que, si $f \in \mathcal{C}^\infty]-1, 1[$ vérifie la condition de Carleman-Denjoy et s'annule pour les valeurs négatives de la variable, il en est de même de la fonction $t \longrightarrow e^{-t} f(1 - e^{-t})$.

Nous avons vu comment on pouvait interpréter le problème de Bernstein avec la semi-norme $f \longmapsto \|fw\|$. Toutefois, pour définir sur $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ une topologie compatible avec la structure d'algèbre, on est amené à considérer l'ensemble des semi-normes $f \longmapsto \|f|w|^\lambda\|$ où λ parcourt l'intervalle $]0, \to[$, ce qui correspond à chercher les poids w tels que, pour tout $\lambda \in]0, \to[$, $|w|^\lambda$ soit un poids fondamental.

Si l'on cherche maintenant à généraliser le problème, pour retrouver le cas de $\underset{\sim}{R}^n$ par exemple, on est amené, comme L. NACHBIN [7], à remplacer $\underset{\sim}{R}$ par un espace topologique localement compact X , et $\underset{\sim}{R}[\xi]$ par une algèbre $\mathfrak{A}$ de fonctions numériques continues sur X , à se donner, au lieu d'un seul poids, une partie W de l'algèbre $\mathcal{C}_0(X)$ des fonctions numériques continues sur X tendant vers zéro à l'infini telle que $\mathfrak{A}W \subset \mathcal{C}_0(X)$, et à étudier la totalité de $\mathfrak{A}W$ dans $\mathcal{C}_0(X)$. En fait, le cas où $\mathfrak{A}$ est réduite à $\underset{\sim}{F}_2$ montre que ce problème englobe l'étude de tous les sous-espaces fermés de $\mathcal{C}_0(X)$; on est donc amené à le formuler dans le cas général de façon différente (voir [6] ou [7]). Cette autre formulation coïncide avec la précédente lorsque $\mathfrak{A}$ sépare les points de X , mais, dans ce cas, les résultats de L. NACHBIN concernent en réalité le problème beaucoup plus fort de la densité de $\mathfrak{A}w$ dans $\mathcal{C}_0(X)$ pour tout $w \in W$, ou celui, équivalent à ce dernier lorsque les fonctions w ne s'annulent pas, de la densité de $\mathfrak{A}$ dans l'algèbre $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(X)$ des fonctions continues sur X majorées par une fonction de $\mathfrak{A}$, pour la famille de semi-normes $f \longmapsto \|fw\|$ où w parcourt W . Là encore, si l'on veut définir une topologie compatible avec la structure d'algèbre, il faut supposer par exemple que, pour toute fonction w de W , il en existe une autre w' telle que $w'^2 \leqslant |w|$.

On voit donc que la généralisation de nature topologique manque son but, et on préfèrerait aborder le problème par un quantificateur existentiel et non universel devant w . Cela suggère l'idée que la vraie généralisation est de nature bornologique. Par ailleurs, on aimerait s'abstraire davantage : d'une part, on peut remplacer la notion d'adhérence par celle de complété, d'autre part, considérer une algèbre $\mathfrak{A}$ non nécessairement réalisée comme une algèbre de fonctions ; on sait, en effet, que le problème posé est facile lorsque les fonctions de $\mathfrak{A}$ sont bornées, et une méthode de démonstration de L. NACHBIN consiste à prouver que l'adhérence de $\mathfrak{A}$ est aussi celle d'une algèbre de fonctions bornées. On est conduit à poser la définition suivante.

DÉFINITION 1. - Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre à bornés ; on dira que $\mathfrak{A}$ est spectrale s'il existe une partie G de $\mathfrak{A}$ telle que la sous-algèbre engendrée par G soit dense dans $\mathfrak{A}$ au sens de MACKEY, et dont tous les éléments sont réguliers.

Pour la définition d'une algèbre à bornés, on renvoie à L. WAELBROECK [12] et pour les définitions générales sur les bornologies, à [10]. On rappelle qu'un élément a de $\mathfrak{A}$ est dit régulier si $(a - z)^{-1}$ est défini et borné au voisinage du point à l'infini de $\underset{\sim}{C}$ (voir [12] ou [13]). On peut énoncer :

THÉORÈME 2. - Soient $\mathfrak{A}$ une algèbre à bornés réelle unitaire complète (cf. [12]) et G une partie de $\mathfrak{A}$ telle que la sous-algèbre engendrée par G soit dense au sens de MACKEY dans $\mathfrak{A}$, et vérifiant la condition :

(i) Soient p_α, q_α deux familles de $\underset{\sim}{R}[\xi]$ telles que $|p_\alpha| \leqslant |q_\alpha|$, et x un élément de G ; alors, si la famille $q_\alpha(x)$ est bornée, la famille $p_\alpha(x)$ l'est aussi.

Pour que $\mathfrak{A}$ soit spectrale, il suffit que G vérifie en outre au moins l'une des conditions qui suivent :

(ii) Pour tout élément x de G, il existe un disque borné B tel que $\|x^n\|_B$ soit fini pour tout entier n, la suite $\|x^n\|_B^{1/n}$ croissante et la série $\|x^n\|_B^{-1/n}$ divergente.

(ii') Pour tout élément x de G, il existe une suite A_n de nombres strictement positifs telle que la suite $A_n^{1/n}$ soit croissante, la série $A_n^{-1/n}$ divergente et la famille $\frac{x^n}{A_n}$ bornée.

(iii) Pour tout élément x de G, il existe une suite (p_n) dans $\underset{\sim}{R}[\xi]$, qui soit bornée sur tout compact, et telle que la suite des degrés des p_n tende vers l'infini, que la suite $(p_n(x))$ soit bornée dans $\mathfrak{A}$ et que

$$\sup_{n\in N} \int \frac{\log^+ p_n(t)}{1 + t^2}\, dt = + \infty \quad .$$

Rappelons que la notation $\| \|_B$ désigne la jauge du disque B ; dans la condition (ii), il est admis que $\|x^n\|^{-1/n}$ puisse être égal à $+\infty$, ce qui rend la série trivialement divergente ; enfin les conditions (ii) et (ii') sont équivalentes, comme le lecteur s'en convaincra aisément.

<u>Preuve du cas (ii)</u>. - Soient $x \in G$, et A_n une suite de nombres strictement positifs telle que la suite $A_n^{1/n}$ soit croissante et la série $A_n^{-1/n}$ divergente, et que la suite $\frac{x^n}{A_n}$ soit bornée. On a aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{-1/2n} = \infty \quad ,$$

et on peut toujours supposer, quitte à remplacer A_n par n^n, que la suite $A_n^{1/n}$ tend vers l'infini ; on peut alors considérer sur $\underset{\sim}{R}$ la fonction

$$t \longmapsto f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}} \quad .$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n A_{2n})^{-1/2n} = \infty \quad ,$$

la fonction $w = \frac{1}{f}$ est un poids fondamental sur $\underset{\sim}{R}$. Par suite, pour toute fonction k de $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$, il existe une suite p_n de polynômes telle que la suite $\|(k - p_n)w\|$ tende vers zéro, d'où une suite λ_n de nombres strictement positifs tendant vers zéro, telle que

$$|\lambda_n^{-1}(p_n - p_{n+m})| \leqslant f \quad .$$

Prouvons que la suite $p_n(x)$ est une suite de Cauchy-Mackey dans $\mathfrak{A}$; il suffit pour cela de voir que la famille $\lambda_n^{-1}(p_n(x) - p_{n+m}(x))$ est bornée, donc que l'ensemble des $p(x)$ où p est un polynôme tel que $|p| \leqslant f$, l'est. Or, si $|p| \leqslant f$, il existe un entier m tel que l'on ait :

$$|p| \leqslant 2 \sum_{n=0}^{m} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}} \quad ;$$

en effet, si q est le degré de p, la fonction

$$t \longmapsto \left| p(t).(\sum_{n=0}^{q+1} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}})^{-1} \right|$$

tend vers zéro à l'infini et il existe un intervalle compact I pour t en dehors duquel elle est majorée par 1.

D'autre part, puisque la série $\frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}}$ est normalement convergente dans I, il il existe un entier r tel que

$$\left|f(t) - \sum_{n=0}^{r} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}}\right| \leqslant \frac{1}{A_0} \text{ pour tout } t \text{ de } I .$$

Il suffit alors de prendre $m = \sup(q , r)$. Par suite, comme la suite $\sum_{n=0}^{m} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}}$ est bornée, il en est de même de l'ensemble B des $p(x)$ où p est un polynôme tel que $|p| \leqslant f$, d'après la condition (i). La suite de Cauchy-Mackey $p_n(x)$ converge vers un élément de A que nous noterons $k(x)$; il faut voir pour justifier cette notation que $k(x)$ ne dépend que de k et de x et non du choix des suites A_n et p_n . Il est facile de vérifier que $k(x)$ ne dépend pas de la suite p_n , car si p'_n est une autre suite de polynômes telle que $\|(k - p'_n)w\|$ tende vers zéro, il existe une suite décroissante λ_n de nombres strictement positifs tendant vers zéro telle que $|\lambda_n^{-1}(p_n - p'_n)| \leqslant f$; il s'ensuit que $\lambda_n^{-1}(p_n(x) - p'_n(x))$ appartient à B et, si D est un disque borné complétant contenant B , il vient :

$$p_{n+m}(x) - p'_{n+m}(x) \in \lambda_n D \quad ,$$

d'où :

$$\lim_{m\to\infty} p_{n+m}(x) - \lim_{m\to\infty} p'_{n+m}(x) \in \lambda_n D$$

et comme $\bigcap_n \lambda_n D = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \lim_{n\to\infty} p'_n(x) \quad .$$

Enfin, $k(x)$ ne dépend pas de la suite A_n , car l'ensemble des suites A_n de nombres strictement positifs telles que $A_n^{1/n}$ soit croissante, $A_n^{-1/n}$ divergente et $\frac{x^n}{A_n}$ bornée, est filtrant décroissant, et si A_n , A'_n sont deux telles suites avec $A'_n \leqslant A_n$, toute suite p_n approchant k pour le poids $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n A_{2n}})^{-1}$ approche aussi k pour le poids $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n A'_{2n}})^{-1}$. Il résulte de cette unicité que l'application $k \longrightarrow k(x)$ de $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ dans $\mathfrak{A}$ est un homomorphisme d'algèbre qui induit sur $\underset{\sim}{R}[\xi]$ l'homomorphisme canonique de $\underset{\sim}{R}[\xi]$ sur $\underset{\sim}{R}[x]$; le seul point non évident est le caractère multiplicatif : Soient k , ℓ deux fonctions de $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$, p_n une suite de polynômes approchant k , q_n une suite de polynômes approchant ℓ pour un même poids f^{-1} ; on a

$$|k\ell - p_n q_n| = |(k - p_n)\ell + (\ell - q_n)p_n|$$

$$< (|k - p_n| + |\ell - q_n|)(|k| + |\ell| + f) = O[(|k - p_n| + |\ell - q_n|)f]$$

de sorte que $p_n q_n$ sera une suite de Cauchy-Mackey pour le borné $\{p(x) \mid p \in \underset{\sim}{R}[\xi]$ et $|p| \leqslant f^2\}$. Enfin, si l'on munit $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ de la bornologie engendrée par les ensembles $\{p(x) \mid p \in \underset{\sim}{R}[\xi]$ et $|p| \leqslant f^n\}$, il est facile de voir que l'homomorphisme défini plus haut est borné. Par suite, si pour un nombre réel a, $k - a$ est inversible dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ et si ℓ est son inverse, on a :

$$\ell(x)(k(x) - a) = (\ell(k - a))(x) = 1$$

ce qui prouve que $k(x) - a$ est inversible dans $\mathcal{A}$. En particulier si k est bornée, pour tout $a > \|k\|$, $k(x) - a$ est inversible et $(k(x) - a)^{-1}$ borné au voisinage de l'infini, ce qui prouve que $k(x)$ est un élément régulier. Pour achever la démonstration, il nous reste à prouver que l'on peut approcher x par de tels éléments. Il est clair qu'il existe une suite k_n dans $\mathcal{C}_p(\underset{\sim}{R})$ formée de fonctions bornées, et une suite λ_n de nombres strictement positifs tendant vers zéro telle que $|x - k_n| \leqslant \lambda_n f$; pour tout n, il existe maintenant une suite $(p_{n,m})_{m\in N}$ de polynômes, et une suite $(\lambda_{n,m})_{m\in N}$ de nombres strictement positifs tendant vers zéro, telles que $|k_n - p_{n,m}| \leqslant \lambda_{n,m} f$, d'où

$$|x - p_{n,m}| \leqslant (\lambda_n + \lambda_{n,m})f \quad .$$

Il en résulte

$$k_n(x) - p_{n,m}(x) \in \lambda_{n,m} D \qquad \text{et} \qquad x - p_{n,m}(x) \in (\lambda_n + \lambda_{n,m})D \quad ,$$

d'où $x - k_n(x) \in (\lambda_n + 2\lambda_{n,m})D$ et, si on fait tendre m vers l'infini

$$x - k_n(x) \in \lambda_n D \quad ,$$

ce qui montre que x est limite au sens de MACKEY de la suite $k_n(x)$.

Preuve du cas (iii). - Soient x un élément de G et (p_n) une suite de polynômes, bornée sur tout compact et telle que la suite des degrés soit non bornée, que la suite $(p_n(x))$ soit bornée dans $\mathcal{A}$, et que

$$\int \frac{\log^+ p_n(t)}{1 + t^2}\, dt \geqslant \pi n \log 2 \quad .$$

La construction précédente peut être reconduite avec

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (p_n(t))^2 \quad .$$

Scholie. - Les conditions (i) et (iii) du théorème expriment tout simplement que la suite x^n ne tend pas très vite vers l'infini lorsque x appartient à G ; elles généralisent le cas où $\|x^n\| \leqslant a^n$, qui correspond aux éléments bornés, ou, si l'on préfère, aux algèbres de Banach. Quant à la condition (i), elle est réalisée, dans le cas commutatif, par les algèbres de fonctions qui ne font pas intervenir les dérivées (fonctions continues ou dans $\mathcal{L}^p$) ; dans le cas non commutatif, il faut qu'il y ait suffisamment d'éléments semi-simples. On voit que le théorème permet d'étudier des sommes pondérées (continues ou mesurables) de C^*-algèbres, ce qui est une façon d'étendre le problème de Bernstein aux algèbres d'opérateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKHIESER (N. I.). - Theory of approximation. Translated by C. J. Hyman. - New York, F. Ungar publishing Company, 1956.

[2] ANDERSON (F. W.). - Approximation in systems of real valued continuous functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 103, 1962, p. 249-271.

[3] CARLEMAN (T.). - Les fonctions quasi-analytiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1926 (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions).

[4] FERRIER (Jean-Pierre). - Travaux récents de L. Nachbin sur l'approximation polynomiale pondérée, Séminaire Choquet : Introduction à l'Analyse, 2e année, 1963, n° 3, 17 p.

[5] MANDELBROJT (Szolem). - Séries adhérentes, régularisation des suites, applications. - Paris, Gauthier-Villars, 1952 (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions).

[6] NACHBIN (Leopoldo). - Elements of approximation theory, University of Rochester, 1964.

[7] NACHBIN (Leopoldo). - Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions : Real and self-adjoint complex cases, Annals of Math., t. 81, 1965, p. 289-302.

[8] PALEY (Raymond) and WIENER (Norbert). - Fourier transforms in the complex domain. - Providence, American mathematical Society, 1934 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 19).

[9] POLLARD (Harry). - The Bernstein approximation problem, Proc. Amer. math. Soc., t. 6, 1955, p. 402-411.

[10] Séminaire BANACH, Ecole Normale Supérieure, 1963 (non publié).

[11] TITCHMARSH (E. C.). - Introduction to the theory of Fourier integrals (2nd edition).

[12] WAELBROECK (Lucien). - Etude spectrale des algèbres complètes, Acad. royale Belg., Cl. Sc., Mém. Série 2, t. 31, 1960, n° 7, 142 p.

[13] WAELBROECK (Lucien). - Théorie des algèbres de Banach et des algèbres localement convexes. - Montréal, Université de Montréal, 1962 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 2).