Jean-Pierre Ferrier

Approximation des fonctions uniformément continues

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 3 (1964), exp. n° 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
3e année, 1963/64, n° 4

APPROXIMATION DES FONCTIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES

par Jean-Pierre FERRIER

1. Introduction.

Le problème de l'approximation des fonctions continues sur un espace compact est bien connu. Avant d'en chercher des généralisations, notons qu'il se sépare en réalité en deux sous-problèmes : le premier consiste à déterminer à quelle condition un ensemble de fonctions est dense dans l'espace des fonctions uniformément continues pour une structure associée à l'ensemble de fonctions donné ; le second consiste à comparer cette structure avec celle que l'on a pu éventuellement se donner sur l'ensemble de définition. On va voir un exemple de cette situation en traitant d'abord un cas extrêmement simple, qui correspond en réalité à l'approximation des fonctions de proximité.

PROPOSITION. - Soient X un ensemble, E un espace vectoriel réticulé (resp. une algèbre unitaire) de fonctions numériques bornées sur X ; E est dense dans l'algèbre normée des fonctions uniformément continues sur X muni de la structure initiale pour les fonctions de E.

En effet, X est précompact et son séparé complété $\hat{X}$ compact ; or, les fonctions de E se prolongent à $\hat{X}$ qui a la structure initiale pour les fonctions prolongées. Ces dernières séparent les points, et la proposition résulte immédiatement du théorème de Stone. On peut d'ailleurs raisonner directement de la façon suivante : La structure (précompacte) de X peut être définie par la relation d'éloignement correspondant aux fonctions de E (deux parties A, B sont éloignées, s'il existe une fonction de E égale à 0 sur A et à 1 sur B). Soit alors g une fonction uniformément continue sur X ; comme g est bornée, on peut supposer que g prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Soit alors f_1 une fonction de E à valeurs dans $[0, \frac{1}{3}]$, égale à 0 sur $g^{-1}([0, \frac{1}{3}])$ et à $\frac{1}{3}$ sur $g^{-1}([\frac{2}{3}, 1])$. La fonction $g_1 = g - f_1$ prend ses valeurs dans $[0, \frac{2}{3}]$.

A. Q. T.

COROLLAIRE. - Soient X un espace uniforme, E un espace vectoriel réticulé, contenant l'unité, de fonctions numériques uniformément continues et bornées sur X.

Pour que E soit dense dans l'algèbre normée des fonctions uniformément continues et bornées sur X, il faut et il suffit que, pour tout couple A, B de parties éloignées de X (c'est-à-dire telles que $A \cap V(B) = \emptyset$ pour un certain entourage V), il existe une fonction f de E égale à 0 sur A et à 1 sur B.

En effet, cette dernière condition signifie que la structure précompacte associée à X coïncide avec la structure uniforme initiale pour les fonctions de E. Or, la structure précompacte associée à X est justement définie par l'ensemble de toutes les fonctions uniformément continues et bornées sur X.

Une extension de la théorie a été l'objet de recherches récentes de F. W. ANDERSON et de J. E. FENSTAD, respectivement [1] et [3]. Pour sortir de la précompacité, J. E. FENSTAD a considéré des fonctions numériques non bornées ; mais on ne peut, par ce procédé, caractériser que les espaces uniformes plongeables dans un produit de droites numériques. On voit apparaître la nécessité d'introduire une structure supplémentaire dans l'espace E, qui sera une bornologie.

2. Préliminaires sur les bornologies saturées.

On se place dans la catégorie $(\widetilde{\mathrm{Eub}})$ des espaces uniformes bornologiques, et on conserve la terminologie introduite dans [4].

Définition. - Soit X un espace uniforme bornologique ; on dit qu'une partie A de X est quasi-bornée si, pour tout entourage U de la structure uniforme de X, il existe une partie bornée B dans X telle que A soit contenu dans $U(B)$.

On vérifie immédiatement que l'ensemble des parties quasi-bornées de X forme une bornologie compatible avec la structure uniforme de X (car l'adhérence d'une partie quasi-bornée est encore quasi-bornée). On notera ${}^{s}X$ l'espace uniforme bornologique obtenu en munissant l'ensemble sous-jacent à X de la structure uniforme de X et de la bornologie des parties quasi-bornées.

Définition. - On dit qu'un espace uniforme bornologique X est saturé si $X = {}^{s}X$.

On a défini un foncteur $s : X \rightsquigarrow {}^{s}X$ adjoint au foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces uniformes bornologiques saturés dans celle des espaces uniformes bornologiques. Par suite :

PROPOSITION. - Toute limite projective d'espaces uniformes bornologiques saturés est saturée.

Il faut remarquer que tout ensemble précompact est quasi-borné ; d'autre part, la bornologie précompacte est saturée ; c'est donc la bornologie saturée la plus fine.

PROPOSITION. - Soient X , Y deux espaces uniformes bornologiques ; si Y est saturé, il en est de même de $\widetilde{Bc}(X , Y)$.

Considérons en effet une partie quasi-bornée H de $\widetilde{Bc}(X , Y)$. H est quasi-uniformément équicontinue, car, pour tout borné A de X et tout entourage U de Y , il existe une partie quasi-uniformément équicontinue K telle que l'on ait $H \subset W(A , U)\ (K)$, d'où

$$\overset{-1}{\overbrace{H \times H}}\ \overset{3}{(U)} \supset \overset{-1}{\overbrace{K_{|A} \times K_{|A}}}\ (U) \ .$$

Montrons d'autre part que H est équibornée, et considérons pour cela un borné A de X ; pour tout entourage U de Y , il existe une partie équibornée K telle que $H \subset W(A , U)\ (K)$, d'où $H(A) \subset U\ (K(A))$, ce qui prouve que $H(A)$ est quasi-borné dans Y , donc borné puisque Y est saturé.

On s'intéressera plus particulièrement aux espaces uniformes bornologiques saturés et complets. Le foncteur $X \rightsquigarrow {}^s\hat{X}$ est adjoint du foncteur d'inclusion de cette sous-catégorie.

On dira qu'un morphisme $\varphi : X \to Y$ dans $(\widehat{Eub})$ est relativement dense si, pour tout borné B et tout entourage U dans Y , il existe un borné A de X tel que $B \subset U\ (A)$. Si φ est un monomorphisme strict pour les structures uniformes, pour que φ soit relativement dense, il faut et il suffit que ${}^s\hat{\varphi} : {}^s\hat{X} \to {}^s\hat{Y}$ soit un isomorphisme.

Etudions maintenant le cas des espaces vectoriels, qui est traité en détail dans [7]. Si E est un espace vectoriel topologique et bornologique réel, la bornologie de ${}^sE$ est compatible avec la structure vectorielle et la topologie de E (les parties quasi-bornées étant bornées dans ${}^{bt}E$). On notera encore s le foncteur ainsi défini ; s est adjoint du foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces vectoriels topologiques et bornologiques saturés dans celle des espaces vectoriels topologiques et bornologiques.

PROPOSITION. - Si E est de type convexe, ${}^sE$ l'est aussi.

PROPOSITION. - Soient E , F deux espaces vectoriels topologiques et bornologiques ; si F est saturé, $\widetilde{Lbc}(E , F)$ l'est aussi.

En effet, $\widetilde{Lbc}(E , F)$ est un sous-espace uniforme bornologique fermé de $\widetilde{Bc}(E , F)$.

En particulier, tout quasi-dual est donc saturé. En réalité, il est prouvé dans [7] que le quasi-dual est isomorphe au complété saturé du dual, énoncé qui complète le théorème de Grothendieck (cf. [5], chapitre 2, n° 14, théorème 10). Considérons alors la donnée de ce que nous appellerons un système dual bornologique, c'est-à-dire d'un couple (E, E') d'espaces vectoriels bornologiques de type convexe et d'une forme bilinéaire bibornée φ sur $E \times E'$. A une telle donnée, on associe des topologies sur E et E', à savoir sur E (resp. E') la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E' (resp. de E). Les bornés donnés sont alors absorbés par les voisinages de zéro parce qu'on a supposé que φ était bibornée, mais leur adhérence pour la topologie peut ne pas être bornée ; toutefois, on ne change pas les topologies si on remplace les bornés de départ par leurs adhérences faibles, donc par leurs adhérences pour la topologie considérée, et φ reste bibornée, parce qu'hypocontinue. On peut alors énoncer :

PROPOSITION. - Soit (E, E') un système dual bornologique. Le quasi-dual de E est isomorphe au complété saturé du quasi-complété faible de E'.

Il faut remarquer que l'on n'a pas supposé le système dual séparé ; on peut, d'ailleurs, se ramener toujours à ce cas. La proposition résulte de ce qui précède et du théorème de Mackey (cf. par exemple [7], ou [5] chapitre 2, n° 12, théorème 7).

3. Ensembles nantis et pronantis.

On appellera ensemble nanti, le couple $\underset{\sim}{X} = (X, B)$ d'un ensemble X et d'un ensemble B de fonctions numériques sur X tel que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $B(x)$ des $f(x)$, où $f \in B$, soit borné dans $\underset{\sim}{R}$.

La terminologie "ensemble nanti" est empruntée à [6], mais peut être employée ici avec un sens légèrement différent. A une donnée (X, B) est attaché l'écart fini

$$d_B(x, y) = \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| .$$

Si $\underset{\sim}{X}' = (X', B')$ est un autre ensemble nanti, on notera $\mathrm{Lip}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{X}')$ l'ensemble des applications contractantes de X dans X', pour les écarts d_B et $d_{B'}$.

On appellera ensemble pronanti le couple $\underset{\sim}{X} = (X, E)$ d'un ensemble X et d'un ensemble bornologique E de fonctions numériques sur X tel que, pour tout $x \in X$, l'application $f \rightsquigarrow f(x)$ de E dans $\underset{\sim}{R}$ soit bornée.

La donnée $\underset{\sim}{X}$ définit alors une famille d'écarts finis sur X, à savoir celle des écarts

$$d_B(x, y) = \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| ,$$

où B varie dans l'ensemble des parties bornées de E. A cette famille d'écarts, correspond sur X une structure uniforme ; on notera ${}^{u}X$, l'espace uniforme ainsi défini. Si $\underset{\sim}{X}' = (X' , E')$ est un autre ensemble pronanti, on dira qu'un ensemble H d'applications de X dans X' est équicontractant si, pour tout borné B' de E' , il existe un borné B de E tel que $H \subset \mathrm{Lip}((X , B) , (X' , B'))$; on dira qu'une application h de X dans X' est contractante si l'ensemble réduit à $\{h\}$ est équicontractant. On désignera par $\mathrm{Lip}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}')$, l'ensemble des applications contractantes de X dans X' muni de la bornologie des ensembles équicontractants. Par construction, comme ensemble bornologique :

$$\mathrm{Lip}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}') \simeq \varprojlim_{B'} \varinjlim_{B} \mathrm{Lip}((X , B) , (X' , B')) .$$

On introduit également la notion d'<u>ensemble bornologique pronanti</u> : Si X est bornologique, on impose à l'application $(f , x) \rightsquigarrow f(x)$ de $E \times X$ dans $\underset{\sim}{R}$ d'être bibornée. $\mathrm{Blp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}')$ sera l'ensemble des applications bornées contractantes de X dans X' muni de la bornologie borne supérieure, autrement dit, comme ensemble bornologique :

$$\mathrm{Blp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}') = \mathrm{Bor}(X , X') \cap \mathrm{Lip}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}') ;$$

$\widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}')$ désignera l'ensemble des applications bornées quasi-contractantes de X dans X' , autrement dit :

$$\widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}') \simeq \varprojlim_{A} \mathrm{Blp}((A , E_{|A}) , \underset{\sim}{X}') ,$$

où A varie dans les bornés de X et $E_{|A}$ obtenu en restreignant à A les fonctions de E .

Si $\underset{\sim}{X}$ est un ensemble bornologique pronanti, en remplaçant au besoin les anciens bornés par leurs adhérences, ${}^{u}X$ peut être considéré comme un espace uniforme bornologique. Par suite, on peut munir $\mathrm{Blp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}')$ et $\mathrm{Blp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{X}')$ de la structure uniforme de la convergence uniforme sur les parties bornées de X ; on obtient ainsi des espaces uniformes bornologiques.

Remarquons qu'à tout ensemble pronanti $\underset{\sim}{X} = (X , E)$, on peut associer un ensemble bornologique pronanti ; il suffit de considérer sur X la bornologie des parties A telles que, pour tout borné B de E , $B(A)$ soit borné dans $\underset{\sim}{R}$. On dira, en particulier, que $\underset{\sim}{X}$ est borné si l'ensemble bornologique X l'est.

Citons comme exemple d'ensemble bornologique pronanti tout couple $(X , \widetilde{\mathrm{Bc}}(X , \underset{\sim}{R}))$ où X est un espace uniforme. On notera encore $\underset{\sim}{X}$, l'ensemble bornologique pronanti ainsi défini.

On identifiera $\underset{\sim}{R}$ à l'ensemble bornologique nanti obtenu en munissant $\underset{\sim}{R}$ de l'ensemble des applications contractantes au sens habituel de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{R}$. Pour tout ensemble bornologique pronanti $\underset{\sim}{X} = (X , E)$, on a de façon évidente des monomorphismes :

$$E \to B\widetilde{lp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R}) \to B\widetilde{c}({}^u X , \underset{\sim}{R}) .$$

On va étudier successivement chacun d'eux.

PROPOSITION. - Si E est un cône bornologique, $B\widetilde{lp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R})$ est un espace vectoriel topologique et bornologique de type convexe quasi-complet. De plus, le monomorphisme $B\widetilde{lp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R}) \to B\widetilde{c}({}^u X , \underset{\sim}{R})$ est relativement dense, et par suite $B\widetilde{c}({}^u X , \underset{\sim}{R})$ s'identifie au complété saturé de $B\widetilde{lp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R})$.

La première partie est immédiate ; prouvons la seconde en se ramenant d'abord au cas où X est borné. Soient alors H un borné de $B\widetilde{c}({}^u X , \underset{\sim}{R})$ et $\varepsilon > 0$. La famille d'écarts (d_B) définie par $\underset{\sim}{X}$ étant stable par homothéties positives et enveloppes supérieures finies, on montre facilement qu'il existe un borné B de E tel que l'écart $\sup\limits_{h \in H} |h(x) - h(y)|$ soit majoré par $\varepsilon + d_B$; on a donc, pour toute fonction h de H ,

$$|h(x) - h(y)| \leqslant \varepsilon + \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| .$$

Il suffit alors de prouver que l'on peut écrire $h = h_1 + h_2$ avec $|h_1| \leqslant \varepsilon$ et

$$|h_2(x) - h_2(y)| < \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| ,$$

parce qu'alors l'ensemble des h_2 variera dans un borné K de $B\widetilde{lp}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R})$, et H sera contenu dans $K + U$, où $U = \{f \mid \|f\| \leqslant \varepsilon\}$. Quant à cette propriété de décomposition, on peut soit la déduire du résultat de STRASSEN sur les semi-normes, soit la prouver directement par ZORN en récurrant sur les couples d'un sous-ensemble X' de X et d'une décomposition $h'_1 + h'_2$ de la restriction de h à X' .

Pour étudier le premier monomorphisme, on aura besoin de quelques définitions nouvelles.

<u>Définition</u>. - Etant donné un cardinal $m \geqslant \aleph_0$, on dit qu'un ensemble pronanti $\underset{\sim}{X} = (X , E)$ est stable (resp. m-stable) si, pour tout borné B de E , l'ensemble des enveloppes supérieures de parties de B (resp. de parties de B de cardinal $< m$) est un ensemble borné de E , et s'il en est de même pour les enveloppes inférieures.

On dit que $\underset{\sim}{X}$ est unitaire si, pour tout borné B de E et tout ensemble fini

C de constantes, $B + C$ est un borné de E.

On dira, d'autre part, qu'un espace uniforme X est m-séparable, si pour la structure uniforme de $\mathfrak{P}(X)$ (cf. [2], chapitre II, § 1, exercice 5 (a)) l'ensemble $\mathfrak{P}_m(X)$ des parties de X de cardinal $< m$ est partout dense dans $\mathfrak{P}(X)$, ou, ce qui revient au même, si $\{X\}$ adhère à $\mathfrak{P}_m(X)$, c'est-à-dire encore : Pour tout entourage U, il existe $A \in \mathfrak{P}_m(X)$ tel que $X \subset U(A)$. On dira qu'un espace uniforme bornologique est m-séparable si tous ses bornés le sont.

PROPOSITION. - Etant donné un cardinal m majorant strictement les cardinaux des bornés de E et tel que ${}^u X$ soit m-séparable, si $\underset{\sim}{X}$ est m-stable unitaire, le monomorphisme $E \to \widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{R})$ est relativement dense.

Supposons en effet X borné ; soient alors H un borné de $\widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in \underset{\sim}{R}_+$ tel que toutes les fonctions de H soient à valeurs dans $[-a , a]$, et un borné B de E tel que

$$\sup_{h \in H} |h(x) - h(y)| \leqslant \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| .$$

Soient alors N un entier tel que $\frac{2a}{N} < \varepsilon$, et $A \subset X$ de cardinal $< m$ telle que $X \subset V(A)$ où $V = \{(x , y) \mid d_B(x , y) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. $h \in H$ diffère alors de moins de ε de la fonction

$$\inf_{n \in [-N,N] \cap \underset{\sim}{Z}} \left(\inf_{y \in h^{-1}[-N, \frac{n}{N}] \cap A} \left(\sup_{f \in B} \left(|f(x) - f(y)| + \frac{n}{N}\right)\right)\right) .$$

<u>Remarque</u>. - Dans la proposition qui précède, on peut s'affranchir de la condition: m majore strictement les cardinaux des bornés de E. Soit en effet $\underset{\sim}{X} = (X , E)$, un ensemble bornologique pronanti tel que ${}^u X$ soit m-séparable. Désignons par E_m l'ensemble E muni de la bornologie des parties bornées de cardinal $< m$, et posons $\underset{\sim}{X}_m = (X , E_m)$. Dans ces conditions, le monomorphisme $\widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X}_m , \underset{\sim}{R}) \to \widetilde{\mathrm{Blp}}(\underset{\sim}{X} , \underset{\sim}{R})$ est relativement dense.

En effet, X étant supposé borné, d'après un raisonnement déjà fait, il suffit de voir que, pour tout borné B de E et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $C \subset B$ tel que $\operatorname{card} C < m$ et que

$$\sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + \sup_{f \in C} |f(x) - f(y)| .$$

Si V est l'entourage $\{(x , y) \mid \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\}$, il existe une partie A de X de cardinal $< m$ telle que $X \subset V(A)$. Pour tout couple $(x , y) \in A \times A$, choisissons une fonction $f_{x,y}$ de B telle que

$$|f_{x,y}(x) - f_{x,y}(y)| \geq \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| - \frac{\varepsilon}{3} ,$$

et soit C l'ensemble des $f_{x,y}$ lorsque (x , y) parcourt $A \times A$. Il est immédiat que l'inégalité cherchée est vérifiée.

4. Application à l'approximation.

Supposons que $\underset{\sim}{X}$ soit m-stable, unitaire, que E soit un cône, et que ${}^{u}X$ soit m-séparable. D'après ce qui précède, le monomorphisme $E \to B\tilde{c}({}^{u}X , \underset{\sim}{R})$ est alors relativement dense, de sorte que $B\tilde{c}({}^{u}X , \underset{\sim}{R})$ s'identifie au complété saturé de E.

En particulier, les espaces de fonctions numériques bornées et quasi-uniformément continues sont donc caractérisés parmi les ensembles pronantis (X , E) par le fait que E est un espace vectoriel topologique et bornologique saturé complet stable contenant les constantes.

Etudions le cas où on suppose donnée sur X une structure uniforme, pour laquelle les ensembles bornés de fonctions de E sont quasi-uniformément équicontinus. Pour pouvoir y appliquer les résultats qui précèdent, il faut savoir déterminer quand le morphisme $X \to {}^{u}X$ est un isomorphisme dans $(E\tilde{u}b)$. Pour cela, il faut et il suffit, lorsque E est un cône, que, pour tout borné A de X et tout entourage U de A, il existe un borné B de E tel que si U_f désigne l'ensemble $\{(x , y) \mid |f(x) - f(y)| \leq 1\}$ on ait :

$$U \subset \bigcap_{f \in B} U_f .$$

Remarque. - Le cas $m = \aleph_0$ correspond à la précompacité. Un cas important semble être celui où $m = \aleph_1$, car il intervient en intégration. Il résulte en effet par exemple de ce qui a été dit que, pour tout espace vectoriel topologique et bornologique $\aleph_1$-séparable E, l'ensemble pronanti $\aleph_1$-stable unitaire engendré par $(E , Lb\tilde{c}(E , \underset{\sim}{R}))$ est relativement dense dans $(E , B\tilde{c}(E , \underset{\sim}{R}))$; autrement dit, on peut reconstruire les fonctions quasi-uniformément continues à partir de formes linéaires, en utilisant des procédés dénombrables (cf. pour cela [6]).

En fait, la donnée d'un ensemble bornologique pronanti $\underset{\sim}{X} = (X , E)$ permet de définir un plongement de X dans un espace vectoriel topologique et bornologique de type convexe. Munissons en effet l'espace $\underset{\sim}{R}^{(X)}$ des combinaisons linéaires formelles à coefficients réels d'éléments de X de la bornologie de type convexe la plus fine pour laquelle l'application $X \to \underset{\sim}{R}^{(X)}$ soit bornée, et définissons de même une bornologie de type convexe sur l'espace vectoriel $v(E)$ engendré par E dans $\underset{\sim}{R}^X$. On obtient, grâce à la dualité entre $\underset{\sim}{R}^{(X)}$ et $\underset{\sim}{R}^X$, un système dual $(\underset{\sim}{R}^{(X)}, v(E))$ qui est bornologique ; il lui correspond une structure topologique et bornologique de type convexe sur $\underset{\sim}{R}^{(X)}$, d'où un espace que l'on notera ${}^vX$. X se plonge dans ${}^vX$ comme sous-espace uniforme bornologique. De plus, les assertions qui suivent sont équivalentes :

(a) L'application canonique $\mathrm{Lb}\tilde{c}({}^vX, \underset{\sim}{R}) \to \mathrm{B}\tilde{c}({}^uX, \underset{\sim}{R})$ est un épimorphisme (resp. un isomorphisme).

(b) Pour tout espace vectoriel topologique et bornologique de type convexe F, l'application canonique $\mathrm{Lt}\tilde{c}({}^vX, F) \to \mathrm{B}\tilde{c}({}^uX, F)$ est un épimorphisme (resp. un isomorphisme).

(c) $(X, \mathrm{Lb}\tilde{c}({}^vX, \underset{\sim}{R}))$ est $\aleph_0$-stable.

Il suffit en effet de voir que (c) entraîne (a), ce qui est immédiat, car si $\mathrm{Lb}\tilde{c}({}^vX, \underset{\sim}{R})$ est $\aleph_0$-stable, il est stable, puisque faiblement complet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON (Frank W.). - Approximation in systems of real-valued continuous functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 103, 1962, p. 249-271.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, chapitre 1-2, 2e édition. - Paris, Hermann, 1951 (Act. scient. et ind., 858 = 1142 ; Bourbaki, 2).

[3] FENSTAD (Jens Erik). - On ℓ-groups of uniformly continuous functions, I : Approximation theory, Math. Z., t. 82, 1963, p. 434-444.

[4] FERRIER (Jean-Pierre). - Travaux récents de L. Nachbin sur l'approximation polynomiale pondérée, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, t. 2, 1963, n° 3, 17 p.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques. - Sao Paulo, Sociedade de Matematica de Sao Paulo, 1958.

[6] HOUZEL (Christian). - Intégration (Notes non publiées).

[7] Séminaire " Banach ", Chapitre III, Ecole Normale Supérieure, 1963 (non publié).