Christian Léger

Filtres lents et espaces hypercomplets

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 9, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A8_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 9, 8 p. 18 mars 1965

FILTRES LENTS ET ESPACES HYPERCOMPLETS

par Christian LÉGER

On définit une classe d'espaces uniformes (dits hypercomplets) qui contient les espaces complets métrisables, les espaces compacts. On démontre qu'un espace hypercomplet a certaines des propriétés classiques des espaces uniformes complets métrisables.

1. Certaines classes de filtres dans les espaces uniformes.

(a) Procédé de construction. - Soit E un espace uniforme. Sur $\mathfrak{F}(E)$, ensemble des filtres de E, il y a une structure uniforme naturelle ; une base d'entourages est constituée par les $\tilde{V}$ (V, entourage de E),

$$\tilde{V} = \{(\Phi\Psi) \in \mathfrak{F}(E)^2 ;\ X \in \Phi \implies VX \in \Psi ,\ Y \in \Psi \implies V^{-1} Y \in \Phi\} .$$

Cette structure est assez fine : deux filtres ne sont pas séparés si, et seulement si, ils ont le même régularisé (le régularisé de Φ, $\mathrm{reg}(\Phi)$, a pour base $\{VX ;\ X \in \Phi ,\ V$ entourage de $E\}$; Φ est régulier si $\Phi = \mathrm{reg}(\Phi)$).

Dans le paragraphe suivant, on trouve trois sous-ensembles spéciaux de $\mathfrak{F}(E)$: dans chaque cas, on part d'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{F}(E)$, et on étudie $\overline{\mathcal{C}}$. (On fait les identifications naturelles qui conduisent à écrire $E \subset \mathfrak{P}(E)\setminus\{\emptyset\} \subset \mathfrak{F}(E)$.)

(b) $\mathcal{C}_1 = \{$points de $E\} \implies \overline{\mathcal{C}_1} = \{$filtres de Cauchy de $E\}$,

$\mathcal{C}_2 = \{$parties finies non vides de $E\}$
ou
$\mathcal{C}_2 = \{$parties précompactes non vides de $E\}$

$\implies \overline{\mathcal{C}_2} = \{$filtres précompacts de $E\}$,

avec la définition suivante :

DÉFINITION. - Un filtre Φ de E est précompact s'il vérifie l'une des conditions (équivalentes) :

(α) Tout ultrafiltre plus fin que Φ est de Cauchy ;
(β) $\forall V$ entourage, $\exists F$ finie $\subset E$ avec $V(F) \in \Phi$;
(γ) $\forall V$ entourage, $\exists K$ précompact $\subset E$ avec $V(K) \in \Phi$.

$\mathcal{C}_3 = \{$parties non vides de $E\} \implies \overline{\mathcal{C}_3} = \{$filtres lents de $E\}$

avec la définition suivante :

DÉFINITION 1. - Un filtre Φ de E est lent si, pour tout entourage V, il existe $Y \in \Phi$ tel que

$$X \in \Phi \implies V(X) \supset Y \quad \text{(ou encore si } \forall V, \bigcap_{X \in \Phi} V(X) \in \Phi \text{)} .$$

(c) On montre que dans de "bons" espaces les filtres obtenus ont des points adhérents, et même qu'ils ont un "bon type de convergence".

DÉFINITION 2. - Un filtre Φ de E converge vers une partie A de E si :

(α) $\forall V$ entourage, $V(A) \in \Phi$;

(β) $\forall V$ entourage, $\forall X \in \Phi$, $V(X) \supset A$;

ou encore si :

$$A \neq \emptyset \text{ et } \Phi \text{ et } A \text{ sont non séparés dans } \mathfrak{F}(E) .$$

Remarques :

Φ converge vers $\{x\} \iff \Phi$ converge vers x.

Si Φ converge vers A, alors (Φ converge vers B) $\iff \overline{B} = \overline{A}$.

Si Φ converge vers une partie, alors Φ a un point adhérent, et même :

PROPOSITION 1. - Soit Φ un filtre de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(α) Φ converge vers une partie ;

(β) Φ converge vers son adhérence ;

(γ) $\forall A \subset E$, si Φ a une trace sur A, alors, dans tout voisinage uniforme de A, Φ a un point adhérent.

Dans un espace uniforme, un filtre qui converge vers un point (resp. une partie précompacte, une partie) est un filtre de Cauchy (resp. un filtre précompact, un filtre lent). Inversement, dans un espace uniforme séparé complet, un filtre de Cauchy (resp. un filtre précompact) converge vers un point (resp. un compact). Par contre, il existe des espaces uniformes séparés complets ayant un filtre lent sans point adhérent (voir exemples plus bas). Toutefois :

PROPOSITION 2. - Un espace uniforme complet écartisable est hypercomplet, en définissant "hypercomplet" comme suit :

DÉFINITION 3. - Un espace uniforme E est hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible) si tout filtre lent de E converge vers son adhérence (resp. a un point adhérent).

Démonstration de la proposition 2. - Soit Φ un filtre lent de E , espace uniforme complet écartisable. (Question : Φ converge-t-il vers son adhérence ?)

On peut supposer Φ régulier (car Φ et reg Φ sont non séparés dans $\mathfrak{F}(E)$).

Soient $A \subset E$, avec $\sup(A , \Phi)$ existe, et U un entourage de E .(Question : Φ a-t-il un point adhérent dans UA ?)

Soit d un écart définissant la structure uniforme de E avec

$$d(xy) \leqslant 1 \implies (xy) \in U \ ;$$

pour $n \geqslant 1$,

$$V_n = \{ (xy) \in E^2 \ ; \ d(xy) \leqslant \frac{1}{2^n} \} \ ,$$

$$X_n = \bigcap_{X \in \Phi} V_n X \ .$$

(α) $\{X_n\}$ est une base de Φ :

- Φ étant lent, $\forall n$, $X_n \in \Phi$;
- Φ étant régulier, $\forall X \in \Phi$, $\exists Y \in \Phi$, $\exists n$ avec $X \supset V_n Y$, d'où

$$X \supset X_n \ .$$

(β) Soit $x_1 \in A \cap X_1$ (on a supposé $\sup(A\Phi)$ existe). On définit par récurrence $x_{n+1} \in V_n x_n \cap X_{n+1}$ (si $x_n \in X_n$, alors $x_n \in V_n X_{n+1}$).

(γ) (x_n) est une suite de Cauchy (car $d(x_n x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^n}$), donc converge vers un point $x \in E$. On a $x \in UA$ (car $x_1 \in A$, $d(x_n x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2^n}$, et d'après le choix de d), et x est adhérent à Φ (car $x_n \in X_n$, $\{X_n\}$ étant une base de Φ).

2. Exemples de filtres lents.

(a) Un filtre de Cauchy, et même un filtre précompact, est lent. En particulier, dans un espace précompact tout filtre est lent ; la réciproque est vraie. Plus généralement, soit c un cardinal infini ; si E est un espace uniforme c-séparable ($\forall V$ entourage, $\exists F \subset E$ avec $\operatorname{Card} F \nleqslant c$ et $VF = E$), alors tout filtre de E , stable par intersection de cardinaux strictement inférieurs à c , est lent ; la réciproque est vraie, si c n'est pas somme d'une famille de cardinaux strictement inférieurs à c , le cardinal de la famille étant strictement inférieur à c .

(b) PROPOSITION. - Le quotient d'un groupe abélien topologique hypercomplet au sens faible par un sous-groupe est hypercomplet au sens faible. (en particulier, est complet).

Preuve. - Soit $p : G \to H$ le quotient de G par un sous-groupe. Soit Φ un filtre lent de H, $p^{-1}\Phi$ est lent ; en effet, si U est un voisinage de 0 de G, on a

$$\bigcap_{Y \in p^{-1}\Phi} (U + Y) = \bigcap_{X \in \Phi} (U + p^{-1}X) \supset p^{-1}[\bigcap_{X \in \Phi} (pU + X)] \in p^{-1}\Phi .$$

Donc, si G est hypercomplet au sens faible, $p^{-1}\Phi$ a un point adhérent ; enfin, $\Phi = pp^{-1}\Phi$ a un point adhérent.

(c) PROPOSITION. - Soient G et H des groupes abéliens topologiques, $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes continu. On suppose G hypercomplet, H séparé, et que $\forall U$ voisinage de 0 de G, $\overline{fU}$ est un voisinage de 0 de H.
Alors, f est ouverte (théorème des homomorphismes).

Preuve. - Soient U_0, V_0 des voisinages de 0 de G ; on montre même que

$$f(U_0 + V_0) \supset \overline{fU_0} .$$

Soit $y_0 \in \overline{fU_0}$. $\forall W$ voisinage de 0 de H, on a

$$(y_0 + W) \cap fU_0 \neq \emptyset \qquad \text{ou} \qquad f^{-1}(y_0 + W) \cap U_0 \neq \emptyset .$$

Soit Φ le filtre de G engendré par les $A_W = f^{-1}(y_0 + W)$.
(α) Φ a une trace sur U_0 (on vient de le voir) ;
(β) Φ est lent, en effet :
Soit U un voisinage de 0 de G ; on vérifie que $\forall W$ voisinage de 0 de H,

$$U + A_W \supset A_{\overline{fU}} .$$

Soit $x \in A_{\overline{fU}}$; on a $fx \in y_0 + \overline{fU}$, d'où $\forall W$

$$fx \in y_0 + W + fU ,$$

d'où $\forall W$

$$x \in f^{-1}(y_0 + W) + U = U + A_W .$$

Donc, si G est hypercomplet, Φ converge vers son adhérence (d'après (β)) ; en particulier (d'après (α)), Φ a un point adhérent x_0 avec $x_0 \in U_0 + V_0$.

Enfin, x_0 adhérent à Φ, H séparé, entraînent $fx_0 = y_0$, d'où

$$y_0 \in f(U_0 + V_0) .$$

(d) PROPOSITION. - Soient X un espace topologique, E un espace uniforme, $\Gamma : X \to E$ multivoque s. c. i. avec $\forall\, x \in X$, Γx est fermé non vide. On suppose $\mathcal{C}_u(XE)$ hypercomplet au sens faible. Alors, dans les deux cas suivants, Γ a une sélection continue :

(α) Tout recouvrement ouvert de X admet une partition ouverte plus fine (par exemple, X compact totalement discontinu).

(β) X paracompact, E e. l. c., $\forall\, x \in X$, Γx est convexe.

On vérifie que, V décrivant le filtre des entourages de E, les

$$S_V = \{\varphi : X \to E ;\ \varphi \text{ continue},\ \forall\, x \in X,\ \varphi x \in V\Gamma x\}$$

décrivent une base d'un filtre lent de $\mathcal{C}_u(XE)$, dont les points adhérents sont les sélections continues de Γ.

3. Stabilité des filtres lents d'espaces uniformes.

(a) Φ lent $\Longleftrightarrow$ reg Φ lent.

(b) Si $E \subset F$, Φ filtre de E, alors

$$\Phi \text{ lent dans } E \Longleftrightarrow \Phi \text{ lent dans } F .$$

(c) L'image uniformément continue d'un filtre lent est un filtre lent.

(d) Soit $p : E \to F$ vérifiant : p est surjective, et $\forall\, U$ entourage de E, $\exists\, V$ entourage de F tel que

$$\forall\, y \in F,\ p^{-1}(Vy) \subset Up^{-1}\cdot y ;$$

alors,

$$\Phi \text{ lent dans } F \Longrightarrow p^{-1}\Phi \text{ lent dans } E .$$

(e) Une borne inférieure (infinie) de filtres lents est un filtre lent.

Remarque. - La borne supérieure, quand elle existe, de deux filtres lents n'est pas en général un filtre lent ; soient $A \subset \mathbb{R}$, $A = \{n + \frac{1}{n} ;\ n = 2, 3, \ldots\}$, Φ (resp. Ψ) le filtre des voisinages uniformes dans $\mathbb{R}$ de A (resp. $\mathbb{N}$) ; Φ et Ψ sont des filtres lents, mais

$$\sup(\Psi\Phi) \text{ qui existe n'est pas lent ,}$$

$$\sup(\mathbb{N}\Phi) \text{ qui existe n'est pas lent .}$$

4. Stabilité des filtres qui convergent vers leurs adhérences.

On peut, dans le paragraphe 3, remplacer "filtre lent" par "filtre convergeant vers son adhérence".

5. Stabilité des espaces hypercomplets.

(a) Un sous-espace fermé d'un espace hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible) est hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible).

(b) Un quotient d'espace hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible) est hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible), où on adopte la définition suivante :

DÉFINITION. - Si E et F sont des espaces uniformes, $p : E \to F$ est un quotient si :

(α) p est surjective.

(β) p est uniformément continue.

(γ) $\forall$ U entourage de E, $\exists$ V entourage de F tel que, $\forall\, y \in F$,

$$p^{-1} Vy \subset Up^{-1} y .$$

(c) Une somme dénombrable de Banach (dans la catégorie des espaces localement convexes) peut avoir un quotient non complet (donc, ne pas être hypercomplète au sens faible) ; voir [2], page 266, ex. 5.

(d) Le produit de deux espaces uniformes hypercomplets peut ne pas être hypercomplet au sens faible (on donne un exemple au paragraphe 7).

PROPOSITION. - $\underset{\sim}{R}^I$ est hypercomplet (resp. hypercomplet au sens faible) si, et seulement si, I est fini ou dénombrable.

Premièrement, si I est fini ou dénombrable, $\underset{\sim}{R}^I$ est complet, métrisable, donc hypercomplet.

Deuxièmement, si $\underset{\sim}{R}^I$ est hypercomplet au sens faible, tout filtre de $\underset{\sim}{R}^I$ stable par intersection dénombrable étant lent (car $\underset{\sim}{R}^I$ est $\aleph$-1-séparable), a un point adhérent ; autrement dit, $\underset{\sim}{R}^I$ est un espace de Lindelöf, donc est paracompact ([1], § 4, ex. 23 c) ; enfin, I est fini ou dénombrable ([1], § 4, ex. 10).

COROLLAIRE. - Un produit non dénombrable d'e. v. t. séparés distincts de $\{0\}$ n'est pas hypercomplet au sens faible.

6. Espaces presque écartisables.

On signale une classe assez riche d'espaces hypercomplets, qui a de bonnes propriétés de stabilité.

DÉFINITION 4. - Un écart d sur un espace uniforme E est propre si :
(α) d est uniformément continu ;
(β) Tout ultrafiltre de E de Cauchy pour d est déjà de Cauchy dans E.
Un espace uniforme est presque écartisable s'il a un écart propre.

PROPOSITION 2'. - La classe des espaces uniformes complets presque écartisables,
(α) est contenue dans celle des espaces hypercomplets,
(β) contient les espaces métriques complets, les espaces uniformément localement compacts (i. e. ayant un entourage V tel que, pour tout point x, Vx soit relativement compact), en particulier les compacts, les groupes abéliens localement compacts,
(γ) est stable par : sous-espace fermé, produit dénombrable, et quotient.

7. Liaison avec la notion de paracompacité.

PROPOSITION 3. - La structure uniforme universelle d'un espace paracompact est hypercomplète.

Soit E un espace paracompact muni de sa structure uniforme universelle $\mathfrak{U}_0$.

(a) Tout filtre Φ de E, tel que $\forall V$ entourage

$$\bigcap_{X\in\Phi} VX \neq \emptyset ,$$

a un point adhérent.

En effet, tout recouvrement ouvert de E est **uni** ([1], § 4, ex. 19 a), donc divisible ([1], § 4, ex. 16 a) ; ainsi, tout voisinage de la diagonale dans $E \times E$ est entourage pour $\mathfrak{U}_0$. Soit Φ un filtre de E sans point adhérent ; on trouve qu'il existe $V \in \mathfrak{U}_0$ tel que

$$\bigcap_{X\in\Phi} VX = \emptyset ,$$

en écrivant que le recouvrement ouvert de E, formé par les $\complement \overline{X}$ $(X \in \Phi)$, est uni.

(b) Un espace uniforme vérifiant la condition (a) est hypercomplet.

Soient Φ un filtre lent de E, $A \subset E$ avec $\sup(A , \Phi)$ existe, U un entourage. (Question : Φ a-t-il un point adhérent dans $\overline{UA}$?).

Soit $\Psi = \sup(UA , \Phi)$.

$$\forall V \text{ entourage}, \quad \bigcap_{X \in \Phi} V(UA \cap X) \neq \emptyset ;$$

il suffit de le montrer pour $V \subset U^{-1}$; or,

$$V \subset U^{-1} \implies V(UA \cap X) \supset A \cap VX ;$$

l'inégalité en résulte, puisque Φ est lent et $\sup(A , \Phi)$ existe. Ainsi Ψ a un point adhérent, ou encore Φ a un point adhérent dans $\overline{UA}$.

On a déjà remarqué dans un cas particulier que :

PROPOSITION 4. - Un espace uniforme séparé hypercomplet au sens faible $\aleph$-1-séparable a une topologie paracompacte (voir 5 (d)).

D'autre part, on peut montrer qu'un espace uniforme complet presque écartisable séparé a une topologie paracompacte.

Enfin, soit E un espace paracompact ayant une suite partout dense, tel que E^2 ne soit pas paracompact ([1], § 5, ex. 16). E muni de sa structure uniforme universelle est hypercomplet (prop. 3), mais le produit uniforme E^2 n'est pas hypercomplet (prop. 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie génerale, Chap. 9, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Espaces vectoriels topologiques. - Sao Paulo, Sociedade de Matematica, 1958.