Michel Hacque

Projectivité, injectivité et dualité

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. n° 5, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A4_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 5, 9 p. 17 décembre 1964

PROJECTIVITÉ, INJECTIVITÉ ET DUALITÉ

par Michel HACQUE

[d'après Z. SEMADENI (*)]

I. Définitions et propriétés de notions définies dans les catégories

1. Rappels de définitions classiques.

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie quelconque.

Un monomorphisme [épimorphisme] est un morphisme φ tel que $\varphi\alpha = \varphi\beta$ [$\alpha\varphi = \beta\varphi$] implique $\alpha = \beta$. Un bimorphisme est un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. Un morphisme $\varphi : A \to B$ est une équivalence ou un isomorphisme s'il existe $\psi : B \to A$ tel que $\varphi\psi = \varepsilon_B$ et $\psi\varphi = \varepsilon_A$. La catégorie $\mathcal{K}$ vérifie la propriété d'inversion si tout bimorphisme est un isomorphisme. Un morphisme $\varphi : A \to B$ est appelé une rétraction s'il existe un morphisme $\psi : B \to A$ tel que $\varphi\psi = \varepsilon_B$. Un morphisme $\psi : B \to A$ est appelé une section s'il existe un morphisme $\varphi : A \to B$ tel que $\varphi\psi = \varepsilon_B$.

Soit $\{A_t\}_{t\in T}$ un ensemble d'objets de $\mathcal{K}$. Un objet A est appelé une somme [un produit] de $\{A_t\}_{t\in T}$ s'il existe des monomorphismes $\sigma_t : A_t \to A$ [épimorphismes $\pi_t : A \to A_t$] ayant la propriété suivante : Pour tout objet B et tout ensemble de morphismes $\varphi_t : A_t \to B$ [morphismes $\varphi_t : B \to A_t$], il existe un morphisme unique $\varphi : A \to B$ [$\varphi : B \to A$] tel que $\varphi_t = \varphi\sigma_t$ [$\varphi_t = \pi_t\,\varphi$] pour tout $t \in T$. Une somme [un produit] de $\{A_t\}_{t\in T}$ est notée $\sum_{t\in T} A_t$ [$\prod_{t\in T} A_t$].

2. Singletons et cosingletons.

Définition. - Un objet S d'une catégorie $\mathcal{K}$ est appelé un singleton [cosingleton] si les deux conditions suivantes sont satisfaites

(i) Pour tout objet A , il existe au moins un [exactement un] morphisme $\alpha : S \to A$

(ii) Pour tout objet B , il existe exactement un [au moins un] morphisme $\beta : B \to S$.

(*) SEMADENI (Z.). - Projectivity, injectivity and duality, Rozprawy Mat. Inst. Mat. Polsk. Akad. Nauk, n° 35, 1963, 47 p.

Un objet nul est un objet qui est simultanément un singleton et un cosingleton.

Dans une catégorie $\mathcal{K}$, l'ensemble des morphismes de A dans B sera noté $\mathrm{Map}(A , B)$.

Propriétés des singletons et des cosingletons. - Les définitions entraînent immédiatement les propriétés suivantes :

(S_1) Si S est un singleton ou un cosingleton, alors $\mathrm{Map}(S , S)$ est formé du seul morphisme ε_S .

(S_2) Tous les singletons sont isomorphes, tous les cosingletons sont isomorphes ; si une catégorie possède un singleton et un cosingleton, ils sont isomorphes.

Soit S un singleton, et soit ν_A le seul morphisme dans $\mathrm{Map}(A , S)$. En choisissant exactement un morphisme ω_A dans chaque ensemble $\mathrm{Map}(S , A)$, soit

$$\omega_{AB} = \omega_A \, \nu_B \ : \ B \to A \ .$$

De même, si S est un cosingleton, soit ω_A le seul morphisme dans $\mathrm{Map}(S , A)$ et ν_A un morphisme de $\mathrm{Map}(A , S)$, alors, soit $\omega_{AB} = \omega_A \, \nu_B$.

Dans les deux cas, les définitions entraînent la propriété :

(S_3) Pour trois objets A , B , C , on a : $\omega_{AB} \, \omega_{BC} = \omega_{AC}$.

Il en résulte la propriété suivante :

(S_4) Si la catégorie a un singleton ou un cosingleton et si A est une somme [un produit] de $\{A_t\}_{t \in T}$, alors tout monomorphisme σ_t [épimorphisme π_t] admet des rétractions π_t [sections σ_t] telles que

$$\pi_t \, \sigma_t = \varepsilon_{A_t} \quad \text{et} \quad \pi_t \, \sigma_u = \omega_{A_t A_u} \quad \text{pour} \quad t \neq u \ .$$

En effet, soit A une somme de $\{A_t\}$. En fixant t , soit $\varphi_u : A_u \to A_t$ défini de la façon suivante : $\varphi_t = \varepsilon_{A_t}$ et $\varphi_u = \omega_{A_t A_u}$ pour $u \neq t$. Alors, il existe un morphisme unique $\varphi : A \to A_t$ tel que $\varphi_u = \varphi \sigma_u$ pour tout $u \in T$, ce qui signifie que $\pi_t = \varphi$ est la rétraction désirée.

3. Séparateurs et coséparateurs.

Définition. - On dit que $\mathrm{Map}(C , M)$ sépare C [$\mathrm{Map}(M , C)$ cosépare C] si, pour tout objet A et toute paire de morphismes $\alpha : A \to C$ et $\beta : A \to C$ [$\alpha : C \to A$ et $\beta : C \to A$], on a la propriété suivante : Si $\gamma\alpha = \gamma\beta$, pour tout $\gamma \in \mathrm{Map}(C , M)$ [si $\alpha\gamma = \beta\gamma$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Map}(M , C)$], alors $\alpha = \beta$.

Un objet M est appelé un séparateur [coséparateur] si $Map(C , M)$ sépare [$Map(M , C)$ cosépare] tout objet C .

4. Objets libres et directs.

Définition. - Un objet M est un objet de base libre [direct] si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) M est un coséparateur [séparateur].

(ii) Si M' est un rétracté de M et M' un coséparateur [séparateur], alors M' est isomorphe à M .

(iii) Si M' est un coséparateur [séparateur], alors M est un rétracté de M'.

Un tel objet est unique à un isomorphisme près, s'il existe. Il est possible de choisir un représentant F [D] appelé l'objet de base libre [l'objet de base direct].

Etant donné un cardinal m , soit F_m [D_m] une somme [un produit] de m exemplaires de F [de D]. Les objets F_m [D_m] sont déterminés uniquement par m à un isomorphisme près, s'ils existent. Un objet sera appelé libre [direct] s'il est équivalent à un certain F_m [D_m]. On dit que $\mathcal{K}$ admet des objets libres [directs] si F_m [D_m] existe pour tout cardinal m .

II. Définitions et propriétés de notions définies dans les bicatégories

1. Les bicatégories.

Définition. - Une bicatégorie est une catégorie $\mathcal{K}$ munie de deux sous-catégories $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{S}$ dont les morphismes sont respectivement appelés les injections et les surjections de la bicatégorie, ces données étant assujetties aux conditions suivantes :

(i) Les morphismes de la catégorie $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{S}$ sont exactement tous les isomorphismes.

(ii) Les injections sont des monomorphismes et les surjections sont des épimorphismes.

(iii) $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{S}$ engendrent $\mathcal{K}$ au sens suivant : Tout morphisme φ peut être écrit de façon unique, à un isomorphisme près, sous la forme $\varphi = \sigma\pi$ dans laquelle σ est une injection et π une surjection.

Notations. - Dans une bicatégorie, les injections se noteront $\alpha : A \rightarrowtail B$ les surjections se noteront $\alpha : A \twoheadrightarrow B$. Un isomorphisme sera donc noté $\alpha : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$. Enfin, une rétraction se note : soit $A \mapsto B$, soit $A \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} B$.

En général, une catégorie $\mathcal{K}$ peut être munie de plusieurs structures de bicatégorie. Il convient donc de toujours bien préciser la structure de bicatégorie envisagée.

Etant donné une rétraction $\varphi : A \to B$, soit $\psi : B \to A$, une section telle que $\varphi\psi = \varepsilon_B$. En écrivant $\varphi = \varphi_i\, \varphi_s$ et $\psi = \psi_i\, \psi_s$ où φ_i et ψ_i sont des injections et φ_s et ψ_s sont des surjections, il en résulte $\varphi_i\, \varphi_s\, \psi_i\, \psi_s = \varepsilon_B$. Une proposition de ISBELL entraîne que φ_i et ψ_s sont des isomorphismes. D'où :

(B_1) Toute rétraction $\varphi : A \to B$ est une surjection et toute section $\psi : B \to A$ est une injection.

Cette propriété entraîne immédiatement la suivante :

(B_2) Soit S un singleton ou un cosingleton dans une bicatégorie $\mathcal{K}$. Alors tout morphisme $\alpha : A \to S$ est une surjection et tout morphisme $\beta : S \to A$ est une injection.

La propriété (B_1) permet de compléter la propriété (S_4).

(B_3) Dans une bicatégorie, et sous les hypothèses de la propriété (S_4), les σ_t sont des injections et les π_t des projections.

2. Objets projectifs et injectifs dans une bicatégorie.

Définition - Dans une bicatégorie $\mathcal{K}$ un objet P [objet I] est dit projectif [injectif] si pour tout $\alpha : A \twoheadrightarrow B$ et $\beta : P \to B$ [$\alpha : B \rightarrowtail A$ et $\beta : B \to I$] il existe un morphisme $\gamma : P \to A$ [$\gamma : A \to I$] tel que $\beta = \alpha\gamma$ [$\beta = \gamma\alpha$].

Propriétés des objets projectifs et injectifs. - Les définitions et des raisonnements de style classique entraînent les propriétés suivantes :

(P_1) Soit P un objet projectif [I un objet injectif] et soit $p : P \mapsto P_1$ [$p : I \mapsto I_1$] une rétraction. Alors P_1 est projectif [I_1 est injectif].

(P_2) Si P est projectif [I est injectif] et si $\alpha : A \twoheadrightarrow P$ est une surjection [$\beta : I \rightarrowtail B$ est une injection], alors α admet une section α' [β admet une rétraction β'].

(P_3) La somme [le produit] de tout ensemble d'objets projectifs [injectifs] est un objet projectif [injectif] s'il existe.

(P_4) Soit $\mathcal{K}$ une bicatégorie qui admet un singleton ou un cosingleton. Alors si une somme [un produit] est projectif [injectif], chaque terme doit être projectif [injectif].

Cette propriété résulte de (S_4) et de (P_1).

(P_5) Les singletons sont injectifs [les cosingletons sont projectifs].

(P_6) Si une bicatégorie $\mathcal{K}$ admet au moins un objet projectif [injectif], alors tout singleton est projectif [tout cosingleton est injectif].

Cette propriété résulte de (P_1).

3. Générateurs et cogénérateurs.

Définition. - Dans une bicatégorie, un objet M est appelé un générateur (*) [cogénérateur] s'il a la propriété suivante :

Etant donné $\alpha : A \rightarrowtail B$ [$\alpha : B \twoheadrightarrow A$], si pour tout $\beta : M \to A$ [pour tout $\beta : B \to M$], il existe $\gamma : M \to A$ [$\gamma : A \to M$] tel que $\alpha\gamma = \beta$ [$\gamma\alpha = \beta$], alors α est un épimorphisme [un monomorphisme].

De façon analogue, un générateur strict [cogénérateur strict] est défini par la condition que α soit un isomorphisme.

Propriétés des générateurs et cogénérateurs.

(G_1) Tout coséparateur est un générateur [tout séparateur est un cogénérateur].

Soit M un coséparateur et soit $\alpha : C \rightarrowtail A$. Soient $\beta_1 : A \to B$ et $\beta_2 : A \to B$ tels que $\beta_1 \alpha = \beta_2 \alpha$. Alors $\beta_1 \alpha\gamma = \beta_2 \alpha\gamma$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Map}(M , C)$. Par hypothèse, l'application $\alpha' : \gamma \rightsquigarrow \alpha\gamma$ de $\mathrm{Map}(M , C)$ dans $\mathrm{Map}(M , A)$ est surjective, il en résulte $\beta_1 \delta = \beta_2 \delta$ pour tout $\delta \in \mathrm{Map}(M , A)$, donc $\beta_1 = \beta_2$, ce qui prouve que α est un épimorphisme. Ainsi M est un générateur.

(G_2) Si une bicatégorie a la propriété d'inversion, alors tout générateur [cogénérateur] est un générateur strict [cogénérateur strict].

Cette dernière propriété est évidente.

Définition. - Un objet M est appelé un séparateur strict [un coséparateur strict] si c'est un séparateur [coséparateur] et un cogénérateur strict [générateur strict].

(*) Le terme générateur utilisé par GROTHENDIECK a un sens différent (qui coïncide avec la présente définition quand la bicatégorie a la propriété d'inversion).

Autres propriétés des générateurs et des cogénérateurs.

(G_3) Soit $\mathcal{K}$ une bicatégorie ayant un générateur strict [cogénérateur strict] et telle que la somme [le produit] de tout ensemble d'exemplaires de M existe dans $\mathcal{K}$. Alors, pour tout objet B, il existe une surjection $\varphi : \Sigma(M)_t \twoheadrightarrow B$ [une injection $\varphi : B \rightarrowtail \Pi(M)_t$].

Soit $T = \mathrm{Map}(M, B)$ et $L = \sum_{\gamma\in T} (M)_\gamma$. D'après la définition d'une somme, il existe un morphisme $\varphi : L \to B$ tel que $\varphi\sigma_\gamma = \gamma$ pour chaque $\gamma \in T$, où σ_γ est un monomorphisme $\sigma_\gamma : M \to L$ correspondant à la " γ-ième coordonnée", c'est-à-dire au morphisme $\gamma : (M)_\gamma \to B$ qui est en même temps un indice et un morphisme ayant pour source le γ-ième exemplaire de M.

Soit $\varphi = \alpha\beta$ avec $\alpha : A \rightarrowtail B$ et $\beta : L \twoheadrightarrow A$. Alors, pour tout $\gamma \in \mathrm{Map}(M,B)$ il existe $\delta = \beta\sigma_\gamma \in \mathrm{Map}(M, A)$ tel que $\alpha\delta = \alpha\beta\sigma_\gamma = \varphi\sigma_\gamma = \gamma$. Comme M est un générateur strict, α est un isomorphisme, ce qui prouve que φ est une surjection.

(G_4) Si M est un coséparateur [séparateur], et s'il existe une surjection $L \twoheadrightarrow M$ [injection $M \rightarrowtail L$] alors L est aussi un coséparateur [séparateur]. Des affirmations analogues sont valables pour les coséparateurs stricts et les générateurs stricts.

Cette propriété est évidente.

III. Le théorème d'universalité.

Définition. - Un objet A est un quotient rétracté absolu [un sous-rétracté absolu] si, pour tout objet B, toute surjection $\alpha : B \twoheadrightarrow A$ a une section [toute injection $\alpha : A \rightarrowtail B$ a une rétraction].

Théoreme d'universalité. - Soit $\mathcal{K}$ une bicatégorie vérifiant les conditions suivantes :

a. Il existe un objet de base libre F [un objet de base direct D].

b. Les objets libres [directs] existent.

c. F est strict et projectif [D est strict et injectif].

Alors :

(i) Tout objet libre [direct] est projectif [injectif].

(ii) Tout objet est une image d'un objet libre [un sous-objet d'un objet direct] c'est-à-dire pour tout A il existe un cardinal m et une surjection $F_m \twoheadrightarrow A$ [une injection $A \rightarrowtail D_m$].

(iii) Un objet est projectif [injectif] si, et seulement si, il est un rétracté d'un objet libre [direct].

(iv) Un objet A est projectif [injectif] si, et seulement si, il est un quotient rétracté absolu [sous-rétracté absolu].

Ce théorème résulte immédiatement des propriétés (P_1), (P_2), (P_3) et (G_3).

Remarques. - Dans certaines bicatégories il peut arriver qu'il n'existe pas d'objet de base libre F [d'objet de base direct D]. On montre que ce phénomène peut même se produire dans une catégorie de modules à gauche de type fini sur un anneau Λ convenablement choisi.

Le théorème précédent ne peut donc pas s'appliquer. Néanmoins, les conclusions de ce théorème qui reposent uniquement sur les propriétés (P_1), (P_2), (P_3) et (G_3) subsistent lorsqu'on remplace F [resp. D] par un générateur strict G [resp. cogénérateur strict C] supposé projectif [resp. injectif] et les objets libres F_m par "les objets libres G_m relatifs à G " [resp. les objets directs D_m par "les objets directs C_m relatifs à C "].

C'est par exemple ce qui se passe pour une catégorie de modules à gauche sur un anneau avec unité Λ . En effet, Λ est alors un générateur strict projectif, et le théorème d'universalité modifié donne les résultats classiques.

IV. Exemples.

Z. SEMADENI donne de nombreux exemples pour illustrer les notions introduites et les résultats obtenus pour diverses bicatégories Nous donnons certains exemples sous la forme d'un tableau dont chaque colonne correspond à une bicatégorie caractérisée par ses objets, ses injections et ses surjections. En particulier, les groupes abéliens localement compacts donnent naissance à deux bicatégories $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ qui sont en dualité par la dualité de Pontrjagin.

Les noms entre parenthèses sont ceux des auteurs dont les travaux ont contribué à établir l'affirmation de la case correspondante.

Objets	Espaces topologiques complètement réguliers	Groupes abéliens	Groupes abéliens localement compacts (bicatégorie $\mathcal{K}_1$)
Morphismes	Applications continues	Homomorphismes	Homomorphismes continus
Isomorphismes	Homéomorphismes	Isomorphismes	Isomorphismes bicontinus
Propriété d'inversion	Non	Oui	Non
Injections	Homéomorphismes <u>dans</u>	Homomorphismes injectifs	Homomorphismes injectifs bicontinus sur un sous-groupe fermé
Surjections	Applications continues surjectives	Homomorphismes surjectifs	Homomorphismes continus sur un sous-groupe dense
Somme	Somme topologique	Somme directe	Somme directe si elle est localement compacte
Produit	Produit topologique	Produit direct	Produit direct s'il est localement compact
Objet de base libre F	Espace réduit à un point strict et projectif	$\underline{Z}$ strict et projectif	Z discret strict, <u>pas projectif</u>
Objet de base direct D	$I = [0, 1]$ (KURATOWSKI-SEMADENI) strict, <u>pas injectif</u>	$\underline{Q/Z}$ strict et injectif	T : tore compact <u>non strict</u>, injectif
Objets libres	Espaces discrets	Groupes abéliens libres	Groupes abéliens libres discrets
Objets directs	Cubes I^m m : cardinal quelconque	$\prod_{t\in m} (\underline{Q/Z})_t$	T^m compact
Objets projectifs	Espaces discrets	Groupes abéliens libres (NIELSEN-SCHREIER)	Objet nul
Objets injectifs	Espace réduit à un point	Groupes divisibles (BAER-MACLANE-KUROŠ)	$T^m \oplus R^n$, m cardinal quelconque n entier fini (HEWITT-ROSS-SEMADENI)

Objets	Groupes abéliens localement compacts (bicatégorie $\mathcal{K}_2$)	Espaces compacts	Anneaux $C(S)$ des fonctions numériques continues sur un espace compact S
Morphismes	Homomorphismes continus	Applications continues	Homomorphismes d'anneaux avec unité
Isomorphismes	Isomorphismes bicontinus	Homéomorphismes	Isomorphismes d'anneaux
Propriété d'inversion	Non	Oui	Oui
Injections	Homomorphismes injectifs continus	Homéomorphismes <u>dans</u>	Homomorphismes injectifs
Surjections	Homomorphismes surjectifs continus et ouverts (Homomorphismes quotients)	Applications continues surjectives	Homomorphismes surjectifs
Somme	Somme directe si elle est localement compacte	Compactification de Stone-Čech β de la somme topologique	$\sum_t C(S_t) = C(\prod_t S_t)$
Produit	Produit direct s'il est localement compact	Produit topologique	m-produits $\left\{ \begin{array}{l} x = (x_t)_{t \in T}, \ x_t \in X_t \\ \Vert x \Vert_m = \sup_{t \in T} \Vert x_t \Vert < +\infty \end{array} \right\}$
Objet de base libre F	$\underset{\sim}{Z}$ discret <u>non strict</u>, projectif	Espace réduit à un point strict et projectif	$C(I)$ strict et projectif
Objet de base direct D	T : tore compact strict, <u>pas injectif</u> (HEWITT et ROSS)	I strict et injectif	$\underset{\sim}{R}$ strict et injectif
Objets libres	Groupes abéliens libres discrets	Compactifiés βN_α d'ensembles **discrets** N_α de puissance α	$C(I^m)$
Objets directs	T^m compact	Cubes I^m	$m(N_\alpha) = C(\beta N_\alpha)$
Objets projectifs	$\sum_{t \in T} (\underset{\sim}{Z})_t \oplus \underset{\sim}{R}^n$ m : cardinal quelconque n : entier fini	Espaces compacts extrèmement discontinus (GLEASON-RAINWATER)	Rétractés des $C(I^m)$
Objets injectifs	Objet nul	Rétractés des I^m	$C(S)$ avec S **compact** extrèmement discontinus (NAKANO)