Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier

# Paracompacité et espaces uniformes

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 4 (1964-1965), exp. n° 3, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A2_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 3, 21 p. 19 et 26 novembre 1964

# PARACOMPACITÉ ET ESPACES UNIFORMES

par Jean-Pierre FERRIER

## Première partie

## Paracompacite dans les espaces uniformes

1. - Il peut être intéressant dans l'étude des espaces vectoriels topologiques de connaître la paracompacité éventuelle des espaces rencontrés. On sait depuis longtemps que les espaces métrisables sont paracompacts, mais on voudrait étendre le résultat à d'autres espaces comme par exemple les limites inductives strictes d'une suite d'espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables. Or, il est en général faux qu'un espace topologique qui est réunion d'une suite de sous-espaces paracompacts soit paracompact, même si les espaces de la suite sont fermés, à moins de supposer en outre que le grand espace est collectivement normal, condition déjà proche de la paracompacité. On sent donc la nécessité de définir la paracompacité dans un cadre plus strict que celui des espaces topologiques ; on choisira ici celui des espaces uniformes.

DÉFINITION 1. - On dit qu'un espace uniforme $X$ est de caractère paracompact si, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de $X$, il existe une suite $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathfrak{R}$ telle que la réunion des ensembles des $\mathfrak{S}_n$ recouvre $X$.

Il convient d'abord de préciser ce que l'on entend par famille uniformément discrète : $X$ étant un espace uniforme (resp. un espace topologique), on dira qu'une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de parties de $X$ est uniformément discrète (resp. discrète) si le morphisme canonique de la somme $\coprod_{\alpha\in A} X_\alpha$ dans $X$ est un monomorphisme strict (c'est-à-dire un isomorphisme sur un sous-espace de $X$). Dans le cas d'un espace uniforme, il revient au même de dire qu'il existe un entourage $V$ tel que

$$V(X_\alpha) \cap V(X_\beta) \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad \alpha = \beta \ .$$

PROPOSITION 1. - Tout espace uniforme de caractère paracompact a une topologie paracompacte.

On peut invoquer [2], § 4, n° 5, lemmes 5, 6 et 7, ou faire une démonstration directe à partir des résultats de [5]. Soit donc $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace uniforme de caractère paracompact $X$. On peut, par définition, trouver un recouvrement $(X_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\, \alpha\in A_n}$ plus fin que $\mathfrak{U}$, et une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entourages de $X$ telle que $V_n(X_{n,\alpha}) \cap V_n(X_{n,\beta}) \neq \emptyset$ entraîne $\alpha = \beta$. D'autre part, on peut toujours supposer que les ouverts de $\mathfrak{U}$ sont de la forme $\{x \mid \varphi(x) > 0\}$, où $\varphi$ est une fonction uniformément continue, puisque ces derniers forment une base de la topologie. Choisissons alors pour tout couple $n$, $\alpha$, une fonction uniformément continue $\varepsilon_{n,\alpha}$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 2^{-n}]$, égale à $2^{-n}$ sur $X_{n,\alpha}$, et à $0$ en dehors de $V_n(X_{n,\alpha})$, un ouvert $U_{n,\alpha}$ de $\mathfrak{U}$ contenant $X_{n,\alpha}$, et une fonction uniformément continue $\varphi_{n,\alpha}$ à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, strictement positive dans $U_{n,\alpha}$, et nulle en dehors. Comme il est immédiat que la famille $(\varepsilon_{n,\alpha}, \varphi_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha\in A_n}$ est équicontinue, subordonnée à $\mathfrak{U}$, et de somme partout strictement positive, il n'y a plus qu'à appliquer [5].

PROPOSITION 2. - Tout espace uniforme métrisable est de caractère paracompact.

Il suffit de se reporter à la démonstration du lemme 4 de [2], § 4, n° 5. Soit $X$ un espace métrique ; pour toute boule ouverte $B$ de $X$, désignons par $B^n$ la boule ouverte de même centre (éventuellement vide) dont le rayon est celui de $B$ moins $2^{-n}$. Soient alors $A$ un ensemble bien ordonné, et $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recouvrement de $X$ par les boules ouvertes. Posons

$$C_{n,\alpha} = B^n_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} B^{n+1}_\beta .$$

La famille $(C_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha\in A}$ répond à la question ; en effet, elle est plus fine que le recouvrement donné ; elle recouvre $X$, puisque si $x \in X$, il existe un plus petit $\alpha$ tel que $x \in B_\alpha$, puis un entier $n$ tel que $x \in B^n_\alpha$, donc $x \in C_{n,\alpha}$ ; enfin, $n$ étant fixé, la famille $(C_{n,\alpha})_{\alpha\in A}$ est uniformément discrète.

Il faut remarquer que, pour qu'un espace uniforme soit de caractère paracompact, il faut et il suffit que l'espace séparé associé le soit ; par suite, si une structure uniforme peut être définie par un seul écart, elle est de caractère paracompact.

Dans tout ce qui va suivre, on désignera toujours par $\tau$ le foncteur qui, à un espace uniforme $X$, associe l'espace topologique sous-jacent que l'on notera ${}^{\tau}X$ ; on désignera par $\varphi$ le foncteur adjoint de $\tau$, à savoir le foncteur qui, à un espace topologique $X$, fait correspondre l'espace uniforme ${}^{\varphi}X$ obtenu en munissant l'ensemble $X$ de la structure uniforme universelle (voir [2], § 1, exercice 5).

PROPOSITION 3. - <u>Soit $X$ un espace topologique uniformisable ; pour que $X$ soit paracompact, il faut et il suffit que $^{\varphi}X$ soit de caractère paracompact.</u>

La condition est évidemment suffisante, d'après la proposition 1. Elle est d'autre part nécessaire, car si $X$ est paracompact, tout recouvrement ouvert de $X$ est uni (cf. [2], § 4, exercice 19 (a)), donc divisible ([2], § 4, exercice 16), la structure universelle est définie par l'ensemble des voisinages de la diagonale ([2], § 4, exercice 18 (a)) et alors tout recouvrement ouvert est uniforme pour cette structure, donc moins fin qu'un recouvrement par des boules ouvertes pour un certain écart ; il suffit alors d'appliquer la proposition 2.

L'intérêt de la notion introduite réside dans le fait qu'elle est stable par sous-espaces fermés et aussi par réunions dénombrables :

PROPOSITION 4. - <u>Tout espace uniforme $X$, qui est réunion d'une suite $X_n$ de sous-espaces uniformes de caractère paracompact, est de caractère paracompact.</u>

La démonstration découle immédiatement des définitions.

Toutefois, on n'a aucun renseignement sur la stabilité par limites projectives, même filtrantes et dénombrables. On est donc amené à améliorer la situation et à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2. - <u>On dit qu'un espace uniforme $X$ est complètement paracompact si tout sous-espace de $X$ est de caractère paracompact.</u>

Il revient au même de dire que, pour toute famille ouverte $\mathfrak{R}$ de parties de $X$, il existe une suite $(\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathfrak{R}$, telle que la réunion des $\mathfrak{S}_n$ recouvre le même ensemble que $\mathfrak{R}$.

De façon évidente, tout espace uniforme métrisable est complètement paracompact, et la notion de complète paracompacité est stable par sous-espaces et réunions dénombrables de suites. De plus :

PROPOSITION 5. - <u>Soit $X$ un espace uniforme qui est limite projective d'une suite $X_n$ d'espaces uniformes complètement paracompacts ; dans ces conditions, $X$ est complètement paracompact.</u>

Soit en effet $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert d'un ouvert $Y$ de $X$. Pour tout entier $n$, désignons par $Y_n$ l'ensemble des points $y$ de $Y$ qui possèdent un voisinage contenu dans un ensemble de $\mathfrak{R}$, et qui soit image réciproque par l'application canonique $X \rightarrow X_n$ d'un ouvert de $X_n$. Par définition de la limite projective, $Y$ est réunion des $Y_n$, et par construction, $\mathfrak{R}$ induit sur chaque $Y_n$

un recouvrement moins fin qu'un recouvrement image réciproque par l'application $X \to X_n$ d'une famille ouverte de $X_n$ , laquelle est moins fine que la réunion d'une suite $(\mathcal{E}_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ de familles uniformément discrètes. En prenant les images réciproques et en faisant varier à la fois $p$ et $n$ , on obtient une suite de familles uniformément discrètes plus fines que $\mathcal{R}$ et recouvrant $Y$ .

Il faut remarquer que l'on a utilisé explicitement le fait que le système projectif était indexé par $\mathbb{N}$ , donc dénombrable et filtrant ; on ne connaît rien sur les limites projectives finies, ni même sur le produit $X \times X$ . Toutefois, on va pouvoir se passer de ces dernières :

THÉORÈME. - Soit $(\mathfrak{M})$ une sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces uniformes, stable par produits finis, et dont les objets soient complètement paracompacts ; soit alors $(\mathcal{P})$ la plus petite sous-catégorie pleine contenant $(\mathfrak{M})$ qui soit stable par structures initiales pour un ensemble dénombrable d'applications et par réunions dénombrables. Dans ces conditions, tous les objets de $(\mathcal{P})$ sont complètement paracompacts ; ils ont en particulier une topologie paracompacte.

L'opération de structure initiale pour un ensemble dénombrable d'applications se décompose en trois autres : image réciproque pour une application, limite projective de suite, et produit fini ; les deux premières ainsi que les réunions dénombrables conservent, comme on l'a vu, la complète paracompacité. Tout résulte alors de ce que, dans toute séquence (transfinie) d'opérations parmi celles citées, on peut faire sauter en arrière les produits finis pour les grouper à la première place.

Le cas le plus intéressant est celui où $(\mathfrak{M})$ est la catégorie des espaces uniformes métrisables ; on obtient de cette façon la paracompacité des espaces vectoriels topologiques localement convexes qui sont construits à partir des espaces vectoriels métrisables par des limites projectives dénombrables ou des limites inductives strictes de suites.

2. - Nous allons maintenant indiquer comment la notion de paracompacité introduite se rattache à d'autres notions qui auraient pu paraître plus naturelles.

PROPOSITION 6. - Soit $X$ un espace uniforme ; les propriétés qui suivent sont équivalentes :

(i) Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de $X$ , il existe un écart uniformément continu sur $X$ et un recouvrement ouvert pour cet écart $\mathcal{E}$ qui soit plus fin que $\mathcal{R}$ .

(ii) Pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de $X$, il existe une suite $(\mathfrak{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de familles uniformément discrètes dont la réunion recouvre $X$, et une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entourages de $X$ telle que, pour tout $n$, la famille $(V_n(A))_{A\in\mathfrak{S}_n}$ soit plus fine que $\mathfrak{R}$.

Il est clair que (ii) entraîne (i) (les $\mathfrak{S}_n$ n'ont pas besoin d'être supposées uniformément discrètes), et d'autre part le fait que (i) entraîne (ii) a été vu lors de la preuve de la proposition 2, car on pouvait remarquer que $B_\alpha$ contenait l'ensemble des points distants de moins de $2^{-n}$ de $C_{n,\alpha}$.

D'autre part, il est immédiat que les propriétés (i) et (ii) entraînent le caractère paracompact. Inversement :

PROPOSITION 7. - Soit $X$ un espace uniforme local au sens de J. R. ISBELL [3] ; dans ces conditions, les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes pour $X$ au caractère paracompact.

Rappelons qu'un espace uniforme $X$ est dit local ("locally fine", selon la terminologie de H. H. CORSON et J. R. ISBELL [3]) s'il vérifie la condition suivante: Tout recouvrement ouvert de $X$ qui induit, sur les ensembles d'un recouvrement uniforme donné, des recouvrements uniformes, est lui-même un recouvrement uniforme. Cela signifie que l'ensemble des recouvrements uniformes de $X$ est stable par produit filtré, ou encore que les recouvrements ouverts uniformes des ouverts de $X$ forment un système de familles couvrantes au sens de GROTHENDIECK [1] ou une topologie au sens de GIRAUD [4].

Pour simplifier la suite de l'exposé, on est conduit à poser la définition suivante :

DÉFINITION 2. - On dit qu'un espace uniforme $X$ est faiblement local s'il vérifie la condition suivante : Tout écart borné de $X$ qui induit sur les ensembles d'un recouvrement uniforme donné des écarts uniformément continus, est lui-même uniformément continu.

Il est clair qu'un espace uniforme local est faiblement local, mais la réciproque est inexacte ; elle est toutefois vraie pour les espaces uniformes qui possèdent certaines propriétés de finitude :

DÉFINITION 3. - On dit qu'un espace uniforme $X$ est localisable s'il possède un système fondamental de recouvrements uniformes qui soient uniformément localement finis.

Autrement dit, si pour tout entourage $V$, il existe un recouvrement $\mathfrak{R}$ de $X$ par des ensembles petits d'ordre $V$, et un autre entourage $W$ tel que tout ensemble petit d'ordre $W$ ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{R}$.

Il est facile de voir que cette propriété est stable par structures initiales quelconques, et donc par limites projectives. D'autre part, sont trivialement localisables les espaces de dimension finie et les espaces qui ont une structure universelle ("fine spaces", selon [3]).

PROPOSITION 8. - Soit $X$ un espace uniforme localisable ; pour que $X$ soit local, il suffit qu'il soit faiblement local.

Donnons-nous en effet un recouvrement uniforme $\mathfrak{R}$ de $X$, et un recouvrement $\mathfrak{S}$ qui induise sur tout ensemble de $\mathfrak{R}$ un recouvrement uniforme. On peut remplacer $\mathfrak{R}$ par un recouvrement $\mathfrak{R}'$ uniformément localement fini, c'est-à-dire tel qu'il existe un entourage $W$ tel que tout ensemble petit d'ordre $\overset{4}{W}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathfrak{R}'$, et on peut supposer que, pour tout $A \in \mathfrak{R}'$, $W(A)$ est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{R}$. Soient alors $d$ un écart borné et uniformément continu sur $X$ subordonné à $\mathfrak{R}'$ (i. e. tel que toute boule de rayon $1$ pour $d$ soit contenue dans un ensemble de $\mathfrak{R}'$). et, pour tout $A \in \mathfrak{R}'$, $d_A$ un écart borné de la structure induite sur $A$ subordonné à la restriction de $\mathfrak{S}$ à $A$. Admettons provisoirement que l'on puisse trouver un écart $d'_A$ uniformément continu sur $X$, égal à $d_A$ sur $A$, et nul en dehors de $W(A)$. Dans ces conditions, l'écart borne supérieure de $d$ et des $d'_A$ est uniformément continu, car, sur tout ensemble petit d'ordre $W$, l'ensemble des $A \in \mathfrak{R}'$ tels que $d'_A$ soit non nul est fini, et subordonné à $\mathfrak{S}$ qui est donc uniforme.

PROPOSITION 9. - Soit $f$ un morphisme d'un espace uniforme local dans un espace métrique complet $M$ ; dans ces conditions, $f$ est aussi un morphisme de $X$ dans $\varphi^{\tau}M$.

Raisonnons par l'absurde, et considérons un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de $M$ dont l'image réciproque $\mathfrak{R}'$ par $f$ ne soit pas uniforme dans $X$. On peut construire par récurrence une suite décroissante $A_n$ de parties de $M$ telle que le diamètre de $A_n$ soit inférieur à $2^{-n}$ et telle que la restriction de $\mathfrak{R}'$ à $f^{-1}(A_n)$ ne soit pas un recouvrement uniforme, en utilisant le fait que $X$ est local. Si alors $x$ est le point d'accumulation de la suite $A_n$, il existe un ensemble $A$ de $\mathfrak{R}$ contenant $x$, et $A$ contient les $A_n$ à partir d'un rang $n_0$ ; par suite, la restriction de $\mathfrak{R}'$ à $f^{-1}(A_{n_0})$ est grossière, donc uniforme, ce qui met en contradiction l'hypothèse.

COROLLAIRE 1. - Tout espace uniforme local se plonge dans un produit d'espaces du type ${}^{\varphi\tau}M$ où le séparé de $M$ est un espace métrique complet.

COROLLAIRE 2. - Tout espace uniforme local est localisable.

Soit alors $\ell$ le foncteur qui, à un espace uniforme $X$, associe l'espace uniforme ${}^{\ell}X$ ayant même ensemble sous-jacent et la structure initiale pour les applications $X \to {}^{\varphi\tau}M$ qui proviennent d'un morphisme de $X$ dans un espace métrique complet $M$. Il est clair que ${}^{\ell}X$ est localisable et a une structure plus fine que $X$, l'égalité ayant lieu lorsque $X$ est local. On peut définir par récurrence transfinie un foncteur $L$ qui est l'itéré indéfini du foncteur $\ell$. $L$ est encore défini par l'égalité :

$$\mathrm{Hom}({}^{L}X , {}^{\varphi\tau}M) = \mathrm{Hom}(X , M)$$

pour tout espace uniforme $X$ et tout espace métrique complet $M$. $L$ est évidemment idempotent et le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie pleine, engendrée par les espaces uniformes $X$ tels que ${}^{L}X = X$, commute aux limites inductives, car ${}^{L}X = X$ équivaut à

$$\mathrm{Hom}(X , {}^{\varphi\tau}M) = \mathrm{Hom}(X , M)$$

pour tout espace métrique complet $M$.

Par ailleurs, le foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces uniformes faiblement locaux commute aux limites inductives, et admet donc un coadjoint $F$ qui commute au foncteur d'inclusion de la catégorie des $X$ tels que ${}^{L}X = X$. Par suite, le foncteur composé $\lambda = F \circ L$, qui induit l'identité sur la sous-catégorie des espaces uniformes locaux, est coadjoint du foncteur d'inclusion de ladite catégorie.

On est maintenant en mesure de prouver la proposition 7 annoncée ; soit donc $X$ un espace uniforme faiblement local de caractère paracompact, et considérons un recouvrement ouvert $\mathfrak{R}$ de $X$. On sait qu'il existe une suite $X_n$ de parties de $X$ dont la réunion est $X$ telle que, sur chaque $X_n$, le recouvrement $\mathfrak{R}$ soit moins fin qu'un recouvrement uniformément discret ; on se ramène donc à prouver le lemme suivant :

LEMME. - Soit $X$ un espace uniforme faiblement local ; supposons donnés une famille uniformément discrète $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ de parties de $X$, et, pour tout $\alpha \in A$, une fonction uniformément continue à valeurs dans $[0 , 1]$ strictement positive sur $X_\alpha$. Dans ces conditions, on peut trouver un écart $d$ de $X$ tel que $f_\alpha$ soit encore strictement positive sur un $O_\alpha$ ouvert pour $d$, contenant $X_\alpha$.

Soit d'abord $d_1$ un écart borné de la structure de $X$ tel que $d(X_\alpha , X_\beta) < 1$ entraîne $\alpha = \beta$ . Admettons l'existence d'un écart $d_\alpha$ égal à l'écart

$$(x , y) \mapsto |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|$$

sur l'ensemble des $x$ tels que $d_1(x , X_\alpha) < \frac{1}{6}$ , et nul sur l'ensemble des $x$ tels que $d_1(x , X_\alpha) > \frac{1}{3}$ . Il est alors clair que l'écart $d$ borne supérieure de $d_1$ et des $d_\alpha$ convient.

3. - Il reste encore à prouver un point admis en cours de démonstration, à savoir la possibilité de prolonger un écart uniformément continu et borné sur un sous-espace, à l'espace tout entier, de façon qu'il soit nul en dehors d'un voisinage du petit espace. Pour cela, il faut faire quelques rappels sur la définition d'une structure uniforme par une famille d'écarts.

Considérons la catégorie dont les objets sont les ensembles $E$ munis d'un $R_+$-cône $H$ d'écarts bornés stable par enveloppes supérieures finies, et dans laquelle un morphisme de $(E , H)$ dans $(E' , H')$ est une application $f$ de $E$ dans $E'$ telle que, pour tout $d' \in H'$ , il existe $d \in H$ tel que $d(x , y) \leqslant 1$ entraîne $d'(f(x) , f(y)) \leqslant 1$ . Cette catégorie est fibrée et cofibrée au-dessus de la catégorie des ensembles ; on peut la scinder en décidant que la structure initiale, pour des applications $f_\iota : E \to E_\iota$ où $E_\iota$ est muni de $H_\iota$ , est définie par le cône stable par enveloppes supérieures finies engendré par les écarts $d_\iota \circ (f_\iota \times f_\iota)$, où $d_\iota$ parcourt $H_\iota$ , et la coscinder en décidant que la structure finale, pour des applications $f_\iota : E_\iota \to E$ , est définie par l'ensemble des écarts bornés $d$ sur $E$ tels que, pour tout $\iota$ , $f_\iota$ soit un morphisme lorsqu'on munit $E$ du $R_+$-cône engendré par $d$ .

On connaît un foncteur pleinement fidèle et surjectif de cette catégorie dans celle des espaces uniformes, à savoir celui qui, à $(E , H)$ , associe l'ensemble $E$ muni de la structure uniforme définie par l'ensemble d'écarts $H$ . Si pour tout objet $(E , H)$ , on désigne par $(E , \overline{H})$ l'objet final pour l'application identique de $E$ , la restriction du foncteur à la sous-catégorie pleine, engendrée par les $(E , H)$ tels que $H = \overline{H}$ , est un isomorphisme.

PROPOSITION 10. - $\overline{H}$ <u>est le plus petit ensemble d'écarts bornés</u> $K$ <u>contenant</u> $H$ <u>et tel que, si</u> $(d_\iota)_{\iota\in I}$ <u>est une famille d'éléments de</u> $K$ <u>telle que</u> $\sum_{\iota\in I} \|d_\iota\| < +\infty$ <u>et</u> $d \leqslant \sum_{\iota\in I} d_\iota$ , <u>alors</u> $d \in K$ .

En effet, il est clair que $\overline{H}$ est stable par l'opération indiquée et, d'autre part, si $d \in \overline{H}$ et si, pour simplifier, $d \leqslant 1$ , il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , un écart $d_n \in H$ tel que $d_n(x , y) \leqslant 1$ entraîne $2^n d(x , y) \leqslant 1$ . Il est alors clair que $d \leqslant \sum_{n \in \underset{\sim}{N}} 2^{1-n} \inf(2 , d_n)$ , et par suite que $\overline{H}$ est contenu dans tout ensemble $K$ .

COROLLAIRE 1. - Le foncteur $\overset{\circ}{h}$ de (Uni) dans (Ens) , qui à un espace uniforme $X$ associe l'ensemble $h(X)$ de tous les écarts bornés uniformément continus sur $X$ , est post-exact.

Il faut vérifier que, pour tout monomorphisme strict $X \to Y$ , l'application $h(Y) \to h(X)$ est surjective, autrement dit que tout écart de $h(X)$ provient d'un écart de $h(Y)$ . Supposons pour simplifier que $X$ est contenu dans $Y$ , et désignons par $K$ l'image de $h(Y)$ dans $h(X)$ . On sait que $K$ définit la structure de $X$ , de sorte que $\overline{K} = h(X)$ . Il suffit donc de voir que $K$ vérifie la propriété de stabilité de la proposition 10 ; or $K$ est évidemment stable par sommes, et on est ramené au lemme suivant :

LEMME 1. - Soient $X$ un sous-ensemble d'un ensemble $Y$ , $D$ un écart borné sur $Y$ , $d$ un écart sur $X$ majoré par $D$ ; on peut prolonger $d$ à $Y$ en un écart plus petit que $D$ .

Supposons que l'on ait $D \leqslant 1$ , et prolongeons d'abord $d$ en lui donnant la valeur 1 en dehors de $X \times X$ ; considérons l'écart $d'$ borne inférieure de $d$ et de $D$ . Rappelons, à ce propos, que l'écart borne inférieure d'une famille $(d_\iota)_{\iota \in I}$ d'écarts est l'écart qui, en $(x , y)$ , est égal à la borne inférieure des $\sum_{n=0}^{\infty} d_{\iota_n}(x_n , x_{n+1})$ où $\iota_n$ parcourt $I$ et $x_n$ est une suite, tel que $x_0 = x$ et $x_n = y$ à partir d'un certain rang. Il faut voir que $d'$ prolonge $d$ ; supposons par l'absurde que l'on ait $\sum_{n=0}^{\infty} d_{\iota_n}(x_n , x_{n+1}) < d(x , y)$ où $d_{\iota_n}$ est $d$ ou $D$ , et soit $p$ le plus petit entier tel que $x_{p+1}$ soit dans $X$ et que l'on ait

$$\sum_{n=0}^{p} d_{\iota_n}(x_n , x_{n+1}) < d(x , x_{p+1}) \quad ;$$

si $q$ est le plus grand entier $< p$ tel que $x_{q+1}$ soit dans $X$ , on a

$$\sum_{n=q+1}^{p} d_{\iota_n}(x_n , x_{n+1}) = \sum_{n=q+1}^{q} D(x_n , x_{n+1}) \geqslant D(x_{q+1} , x_{p+1}) \geqslant d(x_{q+1} , x_{p+1}) \quad ,$$

et par suite

$$\sum_{n=0}^{q} d_{\iota_n}(x_n , x_{n+1}) < d(x , x_{q+1}) \quad ,$$

et $q$ vérifie la même inégalité que $p$, ce qui est absurde car $p$ était le plus petit.

COROLLAIRE 2. - Le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot\,, [0\,,1])$ de la catégorie des espaces uniformes dans celle des ensembles est post-exact.

Ce corollaire 2 est lui-même une conséquence immédiate du corollaire 1 et du lemme suivant :

LEMME 2. - Soient $Y$ un ensemble muni d'un écart $d$, et $X$ un sous-ensemble de $Y$. Toute application $f$ de $X$ dans $[0\,,1]$ vérifiant, pour tout couple $(x\,,y)$ de $X \times X$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant d(x\,,y) \quad ,$$

se prolonge à $Y$ de façon à satisfaire la même inégalité dans $Y$.

Il suffit d'appliquer le théorème de Zorn à l'ensemble ordonné des couples $(Z\,,g)$, où $Z$ est une partie de $Y$ contenant $X$, et $g$ une application de $Z$ dans $[0\,,1]$ prolongeant $f$ et vérifiant l'inégalité de l'énoncé dans $Z$.

Il faut enfin signaler un résultat qui concerne l'algèbre bornologique $\mathrm{Bc}(X\,,\underline{R})$ des fonctions numériques bornées et uniformément continues sur l'espace uniforme $X$, dont les bornées sont les ensembles de fonctions également bornés et uniformément équicontinus :

PROPOSITION 11. - Pour qu'un ensemble $H$ de fonctions numériques sur $X$ soit borné dans $\mathrm{Bc}(X\,,\underline{R})$, il faut et il suffit que $H$ soit borné en un point et que l'écart $\sup_{f\in H} |f(x) - f(y)|$ appartienne à $h(X)$.

Il résulte de cette proposition et des résultats qui précèdent, l'anté-exactitude du foncteur $\mathrm{Bc}(\cdot\,,\underline{R})$ de la catégorie des espaces uniformes dans celle des algèbres bornologiques de type convexe.

Reprenons maintenant la situation d'un espace uniforme $Y$, d'un entourage $V$ de $Y$, d'un sous-espace $X$, et d'un écart uniformément continu et borné $d$ sur $X$ ; on sait, d'après le corollaire 1, qu'on peut prolonger $d$ à $Y$, et, d'après la fidélité du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot\,, [0\,,1])$ sur les espaces de proximité, qu'on peut trouver une fonction $f$ à valeurs dans $[0\,,1]$ égale à $1$ sur $X$ et nulle en dehors de $V(X)$. D'après la proposition 11, l'ensemble $H$ des fonctions numériques $g$ sur $Y$, nulles en un point $a$ donné et telles que $|g(x) - g(y)| \leqslant d(x\,,y)$ pour tout couple $(x\,,y)$ de $Y \times Y$, est borné dans $\mathrm{Bc}(Y\,,\underline{R})$. Il en est de même de $fH$, et l'écart $\sup_{g\in fH} |g(x) - g(y)|$ appartient à $h(Y)$. Or il est nul en dehors de $V(X)$ , et prolonge $d$ sur $X$ par la fonction

$$x \to f(d(x\ ,\ y) - d(a\ ,\ y))$$

appartient à $fH$ pour tout $y$ de $Y$ .

4. - Nous allons maintenant voir comment les résultats obtenus s'appliquent à l'étude des limites inductives d'espaces topologiques. Dans toute cette partie, on s'attachera davantage aux catégories d'ouverts qu'aux points : on considèrera donc comme séparé (resp. de Fréchet, normal, paracompact), un espace topologique $X$ tel que l'espace de Kolmogorov associé à $X$ soit séparé (resp. de Fréchet, normal, paracompact). Par ailleurs, on utilisera le terme de monomorphisme strict au lieu de celui d'homéomorphisme sur un sous-espace, celui d'épimorphisme strict au lieu de celui de quotient ; un système inductif (resp. projectif) sera dit strict si les morphismes qui le composent sont des monomorphismes (resp. épimorphismes) stricts ; un système inductif ou projectif sera dit fermé si les morphismes qui le composent le sont. On désignera enfin par $\pi$ le foncteur adjoint du foncteur d'inclusion de la catégorie des espaces uniformes précompacts dans celle des espaces uniformes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que, pour qu'un espace topologique de Fréchet $X$ soit normal, il faut et il suffit que la condition d'anté-exactitude suivante ait lieu pour le foncteur $\pi \circ \varphi$ :

Pour tout monomorphisme strict fermé $Y \to X$ , le morphisme $^{\pi\varphi}Y \to {}^{\pi\varphi}X$ est un monomorphisme strict.

(On remarquera que le foncteur $\mathrm{Hom}(.\ ,\ [0\ ,\ 1])$ , qui est post-exact dans la catégorie des espaces uniformes, est fidèle lorsqu'on le restreint à la sous-catégorie des espaces uniformes précompacts, laquelle est isomorphe à celle des espaces de proximité ; ces deux propriétés entraînent que la condition indiquée est équivalente à la suivante, en laquelle on reconnaît l'axiome $(O_V^{\prime\prime})$ de [2], § 4, n° 2 :

Pour tout monomorphisme strict fermé $Y \to X$ , l'application

$$\mathrm{Hom}(X\ ,\ [0\ ,\ 1]) \to \mathrm{Hom}(Y\ ,\ [0\ ,\ 1])$$

est surjective.)

PROPOSITION 12. - <u>Pour qu'un espace topologique de Fréchet</u> $X$ <u>soit collectivement normal, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions équivalentes qui suivent</u> :

(i) <u>Tout recouvrement uniformément discret d'une partie fermée</u> $Y$ <u>de</u> $X$ <u>est la trace sur</u> $Y$ <u>d'une famille d'ouverts disjoints de</u> $X$ .

(ii) <u>Tout recouvrement uniformément discret d'une partie fermée</u> $Y$ <u>de</u> $X$ <u>est une famille uniformément discrète de</u> ${}^{\varphi}X$ .

(iii) <u>Pour tout sous-espace fermé</u> $Y$ <u>de</u> $X$ , <u>toute famille uniformément discrète dans</u> ${}^{\varphi}Y$ <u>est uniformément discrète dans</u> ${}^{\varphi}X$ .

(iv) <u>Pour tout sous-espace fermé</u> $Y$ <u>de</u> $X$ , <u>le morphisme</u> ${}^{\varphi}Y \to {}^{\varphi}X$ <u>est un monomorphisme strict</u>.

Cette dernière assertion peut elle-même prendre les formes équivalentes qui suivent :

($iv_a$) Tout écart continu et borné sur un sous-espace fermé $Y$ de $X$ est la restriction à $Y$ d'un écart continu et borné sur $X$ .

($iv_b$) Toute famille équicontinue et également bornée de fonctions numériques sur un sous-espace fermé $Y$ de $X$ est la trace d'une famille équicontinue et également bornée de fonctions numériques sur $X$ .

($iv_c$) $X$ est normal et, pour tout recouvrement ouvert localement fini d'un sous-espace fermé $Y$ de $X$ , il existe un recouvrement ouvert localement fini de $X$ qui induise sur $Y$ un recouvrement plus fin.

Les propriétés ($iv_a$) et ($iv_b$) sont trivialement équivalentes à la propriété (iv) ; l'équivalence avec ($iv_c$) résulte de ce que la structure uniforme universelle d'un espace normal peut être définie par les recouvrements ouverts localement finis. D'autre part, il est facile de voir que l'on a (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) et que la condition (i) entraîne la normalité simple, d'où facilement (iii).

Enfin, (iii) entraîne (iv) d'après le fait que, dans un espace normal, tout recouvrement ouvert dénombrable est uniforme pour la structure uniforme universelle, et les deux lemmes faciles qui suivent :

LEMME 1. - <u>Si</u> $X$ <u>est un espace uniforme local, il existe dans</u> $X$ <u>un système fondamental de recouvrements uniformes qui soient composés d'un recouvrement uniforme dénombrable par des recouvrements uniformément discrets</u>.

LEMME 2. - <u>Si</u> $f : X \to Y$ <u>est un bimorphisme d'espaces uniformes locaux qui conserve les familles uniformément discrètes et les recouvrements uniformes dénombrables, alors</u> $f$ <u>est un isomorphisme</u>.

Le lemme 1 se prouve d'abord lorsque $X = {}^{\varphi}M$ où $M$ est un espace métrique complet : si, dans la démonstration de la proposition 2, $V_n$ désigne l'entourage $\{(x , y) \mid d(x , y) < 2^{-n}\}$ , il suffit de considérer le recouvrement $V_{n+2}(C_{n,\alpha})$ .

On est maintenant en mesure de prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 13. - Soit $(X_n)$ une suite inductive stricte fermée d'espaces topologiques. Si les $X_n$ sont de Fréchet (resp. normaux, collectivement normaux, paracompacts), alors $X = \varinjlim X_n$ est de Fréchet (resp. normal, collectivement normal, paracompact).

Le cas des espaces de Fréchet est trivial ; celui des espaces normaux et collectivement normaux se ramène, d'après la post-exactitude du foncteur $Bc(\, . \, , \underset{\sim}{R})$, au lemme suivant :

LEMME 3. - Pour tout épimorphisme strict $(X_n) \to (Y_n)$ de suites projectives strictes d'ensembles bornologiques, tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Y_{n+1} \arrow[d] \\ X_n \arrow[r] & Y_n \end{tikzcd}$$

soient cartésiens, le morphisme de $X = \varprojlim X_n$ dans $Y = \varprojlim Y_n$ est un épimorphisme strict.

Il résulte en effet de ce lemme que, pour qu'un monomorphisme strict

$$(Y_n) \to (X_n)$$

de suites inductives strictes d'espaces uniformes soit tel que le morphisme de $Y = \varinjlim Y_n$ dans $X = \varinjlim X_n$ soit un monomorphisme strict, il suffit que les carrés qui suivent soient cartésiens :

$$\begin{tikzcd} Bc(X_{n+1} , \underset{\sim}{R}) \arrow[r] \arrow[d] & Bc(Y_{n+1} , \underset{\sim}{R}) \arrow[d] \\ Bc(X_n , \underset{\sim}{R}) \arrow[r] & Bc(Y_n , \underset{\sim}{R}) \end{tikzcd} .$$

En particulier, si $(X_n)$ est une suite inductive stricte d'espaces uniformes, les morphismes $X_p \to \varinjlim X_n$ sont des monomorphismes stricts.

Si maintenant $(X_n)$ est une suite inductive stricte fermée d'espaces normaux (resp. collectivement normaux), pour tout monomorphisme strict fermé

$$Y \to X = \varinjlim X_n \quad ,$$

le morphisme de suites inductives

$$({}^{\tau\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n}) \to ({}^{\tau\varphi}X_n) \qquad (\text{resp. } ({}^{\varphi}\widehat{Y \underset{X}{\pi} X_n}) \to ({}^{\varphi}X_n) )$$

vérifie les conditions indiquées qui sont suffisantes pour que le morphisme

$$\varinjlim \ \widehat{{}^{\varphi}_{X}\ {}^{\pi}X_n} \longrightarrow \varinjlim \ {}^{\pi\varphi}X_n \qquad (\text{resp. } \varinjlim \ \widehat{{}^{\pi}_{X}\ {}^{\varphi}X_n} \longrightarrow \varinjlim \ [\text{illegible}])$$

soit un monomorphisme strict. Comme $\pi$ et $\varphi$ commutent aux limites inductives, que $\varinjlim {}^{\pi\varphi}X_n = {}^{\pi\varphi}X$ (resp. $\varinjlim {}^{\varphi}X_n = {}^{\varphi}X$ ) et comme ce morphisme se factorise alors à travers ${}^{\pi\varphi}Y$ (resp. ${}^{\varphi}Y$ ), il en résulte que le morphisme ${}^{\pi\varphi}Y \longrightarrow {}^{\pi\varphi}X$ (resp. ${}^{\varphi}Y \longrightarrow {}^{\varphi}X$ ) est un monomorphisme strict.

Enfin, si les $X_n$ sont paracompacts, les ${}^{\varphi}X_n$ constituent un système inductif strict d'espaces uniformes de caractère paracompact et ${}^{\varphi}X = \varinjlim {}^{\varphi}X_n$ est aussi de caractère paracompact ; par suite $X = {}^{\tau\varphi}X$ est paracompact. Ce dernier point se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION 14 (E. MICHAEL). - Soit $X$ un espace topologique collectivement normal ; si $X$ est réunion d'une suite $(X_n)$ de sous-espaces fermés paracompacts, il est lui-même paracompact.

En effet, ${}^{\varphi}X$ est alors réunion de la suite ${}^{\varphi}X_n$ de sous-espaces uniformes de caractère paracompact.

## Deuxième partie

## Certaines relations d'équivalence dans les espaces uniformes.

On sait que la catégorie des espaces uniformes possède des limites inductives quelconques et en particulier des quotients : la structure uniforme du quotient est définie par l'ensemble des écarts uniformément continus et saturés. Toutefois, les limites inductives ne sont en général pas intéressantes, car le foncteur topologie associée n'y commute pas. Pour cette raison, on est amené, dans le cas particulier des quotients, à faire des hypothèses restrictives sur la relation d'équivalence afin d'avoir la propriété de commutation cherchée. On posera d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 1. - Soit $X$ un espace uniforme ; on dit qu'une relation d'équivalence $R$ dans $X$ est uniformément ouverte si elle vérifie les conditions équivalentes qui suivent :

(i) Si $f$ désigne l'application canonique de $X$ sur $X/R$ , pour tout entourage $V$ de $X$ , il existe un entourage $W$ de $X/R$ tel que, pour tout $x \in X$ , on ait

$$f(V(x)) \supset W(f(x)) \quad .$$

(ii) Si $C$ désigne le graphe de $R$ dans $X \times X$, pour tout entourage $V$ de $X$, il existe un autre entourage $W$ de $X$, tel que $VC \supset CW$.

(iii) La structure de $X$ peut être définie par des écarts $d$ tels que l'on ait, pour tout couple $(x, y)$ de $X \times X$, la relation

$$d(x, f(y)) = d(f(x), y)$$

où $f(x)$ et $f(y)$ sont considérés comme des parties de $X$.

L'équivalence entre les conditions (i) et (ii) est immédiate ; d'autre part, la propriété (iii) entraîne que la fonction $(x, y) \mapsto d(f(x), f(y))$ est un écart sur $X$ puisque d'abord $d(x, f(y)) = d(f(x), y)$, ne dépendant que de la classe de $x$ et de celle de $y$, est égal à $d(f(x), f(y))$ et qu'alors

$$d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = d(f(x), y) + d(y, f(z)) \leqslant d(f(x), f(z)) .$$

Il est alors facile de voir que (iii) entraîne par exemple (i). Inversement, supposons (i), et soit $d$ un écart de la structure de $X$. On peut d'abord construire un écart $\delta$ de la structure de $X/R$ tel que $\delta(f(x), f(y)) \geqslant d(x, f(y))$ (cf. [2], § 1, n° 4), et il suffit alors de considérer l'écart sur $X$

$$(x, y) \mapsto \sup(d(x, y), \delta(f(x), f(y))) .$$

Plus généralement, on dira qu'un épimorphisme $f$ d'un espace uniforme $X$ sur un autre $Y$ est uniformément ouvert si, pour tout entourage $V$ de $X$, il existe un entourage $W$ de $Y$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait

$$f(V(x)) \supset W(f(x)) .$$

Cette relation entraîne que l'image par $f \times f$ d'un entourage de $X$ est un entourage de $Y$, et par suite que $f$ est strict (c'est-à-dire que $Y$ est un quotient de $X$).

Il est immédiat, d'après (i), qu'un épimorphisme uniformément ouvert est ouvert ; par suite, si $R$ est une relation d'équivalence uniformément ouverte dans un espace uniforme $X$, on a

$${}^{\tau}(X/R) \simeq ({}^{\tau}X)/R .$$

Comme exemple de relation d'équivalence uniformément ouverte, on peut citer la relation d'équivalence gauche définie par un sous-groupe $H$ d'un groupe topologique $G$ muni de sa structure uniforme gauche. L'intérêt des relations d'équivalence uniformément ouvertes est dû au fait qu'elles ont la plupart des propriétés des relations d'équivalence dans les groupes.

On verra en particulier (la preuve sera donnée dans un cadre plus général) que tout quotient d'un espace uniforme métrisable complet selon une relation d'équivalence uniformément ouverte est métrisable et complet. D'autre part :

PROPOSITION 1. - <u>Soient</u> $X$ <u>un espace uniforme, et</u> $R$ <u>une relation d'équivalence uniformément ouverte dans</u> $X$ ; <u>dans ces conditions, si</u> $X$ <u>vérifie les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>de la proposition 6 de la première partie, alors</u> $X/R$ <u>les vérifie</u>.

On va utiliser la forme (i). Soit donc $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de $X/R$ ; si $f$ désigne le morphisme canonique $X \to X/R$, on sait qu'il existe un écart uniformément continu $d$ dans $X$, et un recouvrement ouvert pour cet écart $\mathfrak{S}$ qui soit plus fin que $f^{-1}(\mathfrak{R})$. Mais on peut supposer que $d$ est tel que, pour tout couple $(x, y) \in X \times X$, on ait

$$d(x, f(y)) = d(f(x), y) .$$

Dans ces conditions, $R$ reste uniformément ouverte, donc ouverte, lorsqu'on munit $X$ du seul écart $d$, et le recouvrement $f(\mathfrak{S})$ est ouvert pour la topologie associée à l'écart sur $X/R$ défini par $d$. Comme $f(\mathfrak{S})$ est plus fin que $\mathfrak{R}$, la proposition est démontrée.

Il semble que l'on ne puisse obtenir aucun résultat analogue dans le cas des espaces uniformes de caractère paracompact. En effet, si $X \to Y$ est un épimorphisme uniformément ouvert, l'épimorphisme ${}^{\lambda}X \to {}^{\lambda}Y$, qui s'en déduit par localisation, ne l'est pas en général. On est donc conduit à affaiblir certaines hypothèses.

DÉFINITION 2. - Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme d'espaces uniformes ; on dit que $f$ est adapté, si, pour tout entourage $V$ de $X$ et toute partie $A$ de $X$ telle que $f(A) = Y$, la famille $f(V(x))_{x\in A}$ soit un recouvrement uniforme de $Y$.

Donnons tout-de-suite des exemples d'une telle situation ; d'abord, tout épimorphisme uniformément ouvert est évidemment adapté d'après la condition (i). D'autre part, si $f : X \to Y$ est un épimorphisme ouvert d'espaces topologiques et si $Y$ est supposé paracompact, alors le morphisme ${}^{\varphi}f : {}^{\varphi}X \to {}^{\varphi}Y$ est un épimorphisme adapté. Il faut remarquer que tout épimorphisme adapté est strict (puisque l'image d'un recouvrement uniforme de $X$ doit être un recouvrement uniforme de $Y$), mais que si $f : X \to Y$ est un épimorphisme adapté, le morphisme ${}^{\tau}f : {}^{\tau}X \to {}^{\tau}Y$ n'est en général pas ouvert ; on ne sait pas s'il est strict.

On dira qu'une relation d'équivalence $R$, dans un espace uniforme $X$, est adaptée si l'épimorphisme canonique $f : X \to X/R$ l'est.

PROPOSITION 2. - *Soient* $X$ *un espace uniforme,* $R$ *une relation d'équivalence adaptée dans* $X$ *, et* $f$ *le morphisme* $X \to X/R$ *; dans ces conditions, si* $X$ *est métrisable et complet,* $X/R$ *l'est aussi, dès qu'il est séparé.*

Il est clair que $X/R$ est métrisable, car l'image par $f \times f$ d'un entourage de $X$ est un entourage de $X/R$ . Prouvons la complétion, et considérons pour cela un filtre de Cauchy minimal de $X/R$ , soit $\mathfrak{F}$ . On va construire par récurrence, si $(V_n)$ est une suite fondamentale d'entourages de $X$ , une suite $(x_n)$ dans $X$ telle que :

(a) $x_{n+1} \in V_n(x_n)$ ,

(b) $f(V_n(x_n)) \in \mathfrak{F}$ .

Supposons $(x_n)$ construite jusqu'à l'ordre $p$ de façon que les conditions (a) et (b) soient satisfaites. Comme $\mathfrak{F}$ est minimal, il existe un entourage $W$ de $X/R$ et un ensemble $A$ de $\mathfrak{F}$ tels que $W(A)$ soit contenu dans $f(V_p(x_p))$ . Posons

$$V = V_{n+1} \cap \overset{-1}{\overline{f \times f}}(W) \qquad \text{et} \qquad B = f^{-1}(\complement f(V_p(x_p))) \cup V_p(x_p) \quad .$$

D'après l'hypothèse, $f(V(x))_{x\in B}$ est un recouvrement uniforme de $X/R$ , donc $f(V(x))_{x\in V_p(x_p)}$ en est un de $A$ . Par suite, il existe un élément de $V_p(x_p)$ , soit $x_{p+1}$ , tel que $f(V(x_{p+1}))$ appartienne à $\mathfrak{F}$ .

La suite $x_n$ étant construite, il est facile de voir d'après (a) que, si $V_{n+1}^2 \subset V_n$ , elle est de Cauchy, donc converge vers un élément $x$ ; $\mathfrak{F}$ converge alors vers $f(x)$ , d'après (b).

L'intérêt de la notion introduite réside en fait dans le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Soient* $X$ *un espace uniforme, et* $R$ *une relation d'équivalence adaptée dans* $X$ *telle que* $X/R$ *soit local ; dans ces conditions, pour tout écart uniformément continu dans* $X$ *tel que les classes suivant* $R$ *soient complètes, il en existe un plus fin* $d$ *et une partie* $A$ *de* $X$ *rencontrant toutes les classes de façon que, si* $X_d$ *(resp.* $A_d$ *) désigne l'ensemble* $X$ *(resp.* $A$ *) muni de* $d$ :

(a) *Pour tout entourage* $V$ *de* $X_d$ *, il existe un entourage* $W$ *de* $X_d/R$ *tel que, au-dessus de tout ensemble petit d'ordre* $V$ , $A$ *soit contenu dans une réunion finie d'ensembles petits d'ordre.*

(b) *Pour tout entourage* $V$ *de* $X_d$ *, il existe un entourage* $W$ *de* $X_d/R$ *tel que, pour tout* $x$ *de* $A$ *, on ait*

$$f(V(x)) \supset W(f(x)) \quad .$$

(c) *Le morphisme* $A_d/R \to X_d/R$ *est un isomorphisme, et l'image d'un recouvrement uniforme de* $A_d$ *en est un de* $X_d/R$ .

COROLLAIRE 1. - Soient $X$ un espace uniforme, et $R$ une relation d'équivalence adaptée dans $X$ ; si $X$ est localisé d'un espace métrique complet, $X/R$, s'il est séparé, possède la même propriété.

COROLLAIRE 2 (G. CHOQUET). - Soient $X$ un espace métrique complet, et $R$ une relation d'équivalence ouverte dans $X$ telle que $(^{\tau}X)/R$ soit paracompact. Dans ces conditions, $(^{\tau}X)/R$ est homéomorphe à un espace métrique complet.

Pour prouver le corollaire 1, on se ramène d'abord au cas où $X/R$ est local par le changement de base $^{\lambda}(X/R) \to X/R$, et cela grâce au lemme suivant :

LEMME 1. - Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme adapté. Pour tout morphisme $g : Y' \to Y$, le morphisme $f \prod_Y g$ du produit fibré $X \coprod_Y Y'$ dans $Y$ est un épimorphisme adapté (stabilité par changement de base).

En effet, si $V$ (resp. $W$) est un entourage de $X$ (resp. $Y'$), on a

$$\mathrm{pr}_2((V \times W)(x , y)) = W(y) \cap g^{-1}(f(V(x))) \quad .$$

$X/R$ étant local, on remarque alors, d'après le (a) du théorème, que l'image réciproque dans $A_d$ d'un ensemble précompact de $X_d/R$ est précompacte : toute suite précompacte se relève donc en une suite précompacte.

Enfin, pour prouver le corollaire 2, on remarque que le (b) du théorème entraîne que le morphisme $^{\tau}X_d/R \to {}^{\tau}(X_d/R)$ est un isomorphisme : en effet, si $O$ est un ouvert saturé de $X_d$, et $y$ un point de $f(O)$, pour tout point $x$ de $A \cap f^{-1}(y)$ et tout entourage $V$ de $X_d$ tel que $V(x) \subset O$, il existe un entourage $W$ de $X_d/R$ tel que $f(V(x))$ contienne $W(y)$, donc que $f(O)$ contienne $W(y)$ ; $f(O)$ est ouvert.

COROLLAIRE 3. - Soient $X$ un espace uniforme, et $R$ une relation d'équivalence adaptée dans $X$ ; si $X$ vérifie les conditions de paracompacité (i) et (ii) de la proposition 6 de la première partie et s'il possède un système fondamental d'écarts pour lesquels les classes suivant $R$ soient complètes, alors $X/R$ est à localisé paracompact.

Par changement de base, on se ramène d'abord au cas où $X/R$ est local. Soit alors $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de $X/R$. D'après (i), on peut trouver un écart uniformément continu $d$ dans $X$, et un recouvrement $\mathfrak{S}$ ouvert pour cet écart plus fin que $f^{-1}(\mathfrak{R})$ ; on peut toujours supposer que $d$ vérifie les hypothèses du théorème et que $\mathfrak{S}$ est de la forme $(V_x(x))_{x \in X}$, où $V_x$ est un entourage de $X_d$.

Pour tout $x \in A$, on peut alors trouver un entourage $W_x$ de $X_d/R$ tel que $f(W_x(x)) \supset W_x(f(x))$. Par suite, $\mathfrak{R}$ déjà moins fin que $f(\mathfrak{S})$, va être moins fin que $(W_x(f(x)))_{x\in A}$, donc moins fin qu'un recouvrement ouvert de $X_d/R$, lequel est métrisable.

<u>Preuve du théorème</u>. - Pour simplifier l'exposé, on préfèrera utiliser la définition d'une structure uniforme en termes de recouvrements plutôt qu'en termes d'entourages ; rappelons que, si $\mathfrak{R} = (U_i)_{i\in I}$ et $\mathfrak{S} = (V_j)_{j\in J}$ sont deux familles de parties d'un ensemble $X$, on désigne par $\mathfrak{S} \star \mathfrak{R}$ la famille $(W_i)_{i\in I}$, où $W_i$ est la réunion des $V_j$ qui rencontrent $U_i$. La famille $\mathfrak{R} \star \mathfrak{R}$ sera notée simplement $\mathfrak{R}^2$. Cela étant dit, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème ; $X/R$, étant local, possède une base de recouvrements uniformes qui soient uniformément localement finis, et on désignera par $P$ l'ensemble des recouvrements de ce type qui sont indexés dans un univers adéquat $\mathfrak{U}$. On désignera d'autre part par $\Phi$ l'ensemble des familles indexées dans $\mathfrak{U}$ de parties de $X$ dont l'image dans $X/R$ appartient à $P$, puis, si $\mathfrak{R}$ est un recouvrement uniforme de $X$, par $\Phi(\mathfrak{R})$ l'ensemble des familles $\mathfrak{S}$ de $\Phi$ qui sont plus fines que $\mathfrak{R}$ et telles que $f(\mathfrak{R} \star \mathfrak{S})$ soit uniformément moins fin que $f(\mathfrak{S})$ (i. e. il existe un recouvrement $\mathfrak{B}$ de $P$ tel que $f(\mathfrak{R} \star \mathfrak{S})$ contienne $\mathfrak{B} \star f(\mathfrak{S})$ ).

LEMME 2. - <u>Pour tout recouvrement uniforme</u> $\mathfrak{R}$ <u>de</u> $X$, <u>toute famille</u> $\mathfrak{S}$ <u>de</u> $\Phi(\mathfrak{R})$ <u>et tout recouvrement uniforme</u> $\mathfrak{R}_1$ <u>de</u> $X$, <u>il existe un recouvrement uniforme</u> $\mathfrak{R}'$ <u>plus fin que</u> $\mathfrak{R}_1$ <u>et une famille</u> $\mathfrak{S}'$ <u>de</u> $\Phi(\mathfrak{R}')$ <u>de façon que</u> :

($\alpha$) $\mathfrak{S}'$ <u>soit plus fine que</u> $\mathfrak{R}^2 \star \mathfrak{S}$,

($\beta$) <u>Pour toute classe</u> $C$, $\mathfrak{S} \cap C$ <u>soit plus fine que</u> $\mathfrak{R}^2 \star (\mathfrak{S}' \cap C)$,

($\gamma$) <u>Pour tout</u> $x$ <u>d'un ensemble de</u> $\mathfrak{R}'^3 \star \mathfrak{S}'$, $f(\mathfrak{R}^6 \star x)$ <u>contienne</u> $f(\mathfrak{R}') \star f(x)$.

Soient, en effet, $\mathfrak{R}_2$ un recouvrement uniforme de $X$ plus fin que $\mathfrak{R}$, et $\mathfrak{B}$ un recouvrement de $P$, tels que $f(\mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{S})$ appartienne à $P$ et soit moins fin que $\mathfrak{B} \star f(\mathfrak{S})$, puis $\mathfrak{R}'$ un recouvrement uniforme de $X$ plus fin que $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ et tel que $\overbrace{f(\mathfrak{R}')}^{4}$ soit plus fin que $\mathfrak{B}$. Supposons que l'on ait $\mathfrak{S} = (U_i)_{i\in I}$ et $\mathfrak{R}' = (V_j)_{j\in J}$. Alors

$$P_i = (\mathfrak{R} \star U_i) \cup \complement f^{-1}(\mathfrak{B} \star f(U_i))$$

rencontre toutes les classes, et puisque $R$ est adaptée, la famille $f(V_j)_{j\in J_i}$, où $J_i$ est l'ensemble des $j$ de $J$ tels que $V_j$ rencontre $P_i$, est un recouvrement uniforme de $X/R$ et, par suite, la famille $f(V_j)_{j\in K_i}$, où $K_i$ est l'ensemble des $j$ tels que $V_j$ rencontre $\mathfrak{R} \star U_i$, en est un de $f(U_i)$. Maintenant,

$X/R$ étant local, on peut trouver des recouvrements $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{W}'$ dans $P$ tels que tout ensemble $A$ de $\mathfrak{W}$ rencontre un nombre fini d'ensembles $f(U_i)$ et que, pour tout $i \in I$, il y ait au moins un $j \in J$ tel que $\mathfrak{W}' \star (A \cap f(U_i))$ soit contenu dans $f(V_j)$ ; on en choisit alors un, $j(A, i)$, et on désigne par $\mathfrak{S}'$ la famille $V_{j(A,i)} \cap f^{-1}(A \cap f(U_i))$ où $A$ parcourt $\mathfrak{W}$.

Il est alors clair que $\mathfrak{S}'$ appartient à $\varphi(\mathfrak{R}')$, car $f(\mathfrak{R}' \star \mathfrak{S}')$ est moins fin que $(f(V_{j(A,i)}))$, lequel est moins fin que $\mathfrak{W}' \star f(\mathfrak{S}')$. ($\alpha$) résulte de ce que $\mathfrak{S}'$ est plus fine que $f(V_{j(A,i)})$, qui est plus fine que $\mathfrak{R}' \star \mathfrak{R}_2 \star \mathfrak{S}$ ; ($\beta$) se voit de même. Prouvons enfin ($\gamma$) : si $x$ appartient à $\mathfrak{R}'^3 \star y$, où $y$ est dans un ensemble de $\mathfrak{S}'$ de la forme $V_j \cap f^{-1}(A \cap f(U_i))$, on a successivement

$$f(\mathfrak{R}'^6 \star x) \supset f(\mathfrak{R}'^3 \star \mathfrak{R}'^3 \star y) \supset f(\mathfrak{R} \star U_i) \supset \mathfrak{W} \star f(U_i) \supset \overbrace{f(\mathfrak{R}')}^{4} \star f(U_i) \supset f(\mathfrak{R}') \star f(x) .$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $(\mathfrak{S}_n)$ une suite de recouvrements uniformes de $X$ définissant une structure uniforme pour laquelle les classes soient complètes. On peut, d'après le lemme, trouver une suite $(\mathfrak{R}_n)$ de recouvrements uniformes de $X$ et une suite $(\mathfrak{S}_n)$, où $\mathfrak{S}_n$ est dans $\varphi(\mathfrak{R}_n)$ de façon que $\mathfrak{R}_{n+1}^6$ soit plus fin que $\mathfrak{R}_n \cap \mathfrak{S}_n$ et que l'on ait les conditions qui suivent :

($\alpha$) $\mathfrak{S}_{n+1}$ est plus fine que $\mathfrak{R}_n^2 \star \mathfrak{S}_n$,

($\beta$) Pour toute classe $C$, $\mathfrak{S}_n \cap C$ est plus fine que $\mathfrak{R}_n^2 \star (\mathfrak{S}_{n+1} \cap C)$,

($\gamma$) Pour tout élément $x$ d'un ensemble de $\mathfrak{R}_{n+1}^3 \star \mathfrak{S}_{n+1}$, $f(\mathfrak{R}_n^6 \star x)$ contient $f(\mathfrak{S}_{n+1}) \star f(x)$.

Il résulte de ($\alpha$) que la suite $\mathfrak{R}_n^3 \star \mathfrak{S}_n$ est décroissante ; désignons par $A_n$ la réunion des ensembles de $\mathfrak{R}_n^3 \star \mathfrak{S}_n$, et par $A$ l'intersection des $A_n$. Soit d'autre part $d$ un écart définissant la même structure uniforme que les $(\mathfrak{R}_n)$.

Il résulte de ($\gamma$) que les $f(\mathfrak{S}_n)$ sont un système fondamental de recouvrements uniformes de $X_d/R$, et les points (a) et (b) du théorème en découlent. Il reste à prouver la partie (c), et en même temps le fait que $A$ rencontre toutes les classes. On voit d'abord que, pour tout point $x_0$ d'un ensemble de $\mathfrak{S}_n$, il existe un point $x$ de $A$ équivalent à $x_0$ et proche de ce dernier d'ordre $\mathfrak{R}_n^3$. En effet, on peut, d'après ($\beta$), construire par récurrence à partir de $x_0$ une suite $(x_p)$, où $x_p$ appartient à un ensemble de $\mathfrak{S}_{n+p}$, et à la classe de $x_0$ de façon que $x_{p+1}$ soit proche de $x_p$ d'ordre $\mathfrak{R}_{n+p}^2$ ; la suite $(x_p)$ est alors de Cauchy dans la classe de $x_0$, et a donc une limite $x$ qui vérifie les conditions annoncées.

Autrement dit, pour toute classe $C$ , $\mathfrak{S}_n \cap C$ est plus fine que $\mathfrak{U}_n^3 \star (A \cap C)$ . En particulier, $A$ rencontre toutes les classes. Enfin, l'image de tout recouvrement uniforme $\mathfrak{U}$ de $A_d$ est un recouvrement uniforme de $X_d/R$ . En effet, $\mathfrak{U}$ est la trace d'un recouvrement uniforme $\mathfrak{U}'$ de $X_d$ , et il existe un entier $n$ tel que $\mathfrak{U}_n^4$ soit plus fin que $\mathfrak{U}'$ ; alors $f(\mathfrak{U})$ est moins fin que $f(\mathfrak{S}_n)$ .

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (Michael). - Grothendieck topologies. Notes on a Seminar, Spring 1962. - Cambridge, Harvard University, Department of Mathematics, 1962 (multigr.)

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale. Chapitre 9, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] GINSBURG (S.) and ISBELL (J. R.). - Some operators on uniform spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 93, 1959, p. 145-168.

[4] GIRAUD (Jean). - Analysis situs, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[5] MOKOBODZKI (Gabriel). - Nouvelle méthode pour démontrer la paracompacité des espaces métrisables, Ann. Inst. Fourier, t. 14, 1964, p. 539-542.