François Colmez

# Travaux de V. Strassen sur la partition d'une forme linéaire dominée par une fonction sous-linéaire

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 4 (1964-1965), exp. n° 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A1_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 1, 17 p. 5 et 12 novembre 1964

TRAVAUX DE V. STRASSEN ([3]) SUR LA PARTITION
D'UNE FORME LINÉAIRE DOMINÉE PAR UNE FONCTION SOUS-LINÉAIRE

par François COLMEZ

## 1. Préliminaires. Rappel sur les fonctions sous-linéaires.

Définition. - Soit $X$ un espace vectoriel réel ; on appelle **fonction sous-linéaire sur** $X$ une application $h$ de $X$ dans $\underset{\sim}{R}$ qui est :

(a) sous-additive : $h(x + y) \leqslant h(x) + h(y)$ ($x$ et $y \in X$) ;

(b) positivement homogène : $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ ($x \in X$ et $\lambda \geqslant 0$).

Remarque. - Si dans cette définition on remplace la condition (b) par :

(b') $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ pour tout $\lambda$ réel, on obtient une forme linéaire ;

ou par :

(b'') $h(\lambda x) = |\lambda|\ h(x)$ ($\lambda \in \underset{\sim}{R}$), on obtient une semi-norme ;

les semi-normes et les formes linéaires sont donc des fonctions sous-linéaires particulières. Pour les fonctions sous-linéaires comme pour les semi-normes (et avec la même démonstration), on a le théorème de Hahn-Banach :

Soient $X$ un espace vectoriel réel, et $h$ une fonction sous-linéaire sur $X$ ; si $\ell_0$ est une forme linéaire définie sur un sous-espace $X_0$ de $X$ et dominée par $h$ ($\ell_0(x) \leqslant h(x)$ , $\forall\, x \in X_0$), il existe au moins une forme linéaire $\ell$ définie sur $X$ prolongeant $\ell_0$ et dominée par $h$ .

Supposons maintenant que $X$ soit un espace vectoriel (réel) normé ; on peut parler de fonction **sous-linéaire continue** $h$ . Comme la sous-additionnée de $h$ entraîne la relation

$$|h(x + y) - h(x)| \leqslant \max(h(y) , h(- y)) \leqslant \max(|h(y)| , |h(- v)|) ,$$

la continuité de $h$ est équivalente à sa continuité à l'origine. La condition (b) montre alors que $h$ est continue si, et seulement si, elle est bornée au sens suivant :

$$\sup\{|h(x)| ; \|x\| \leqslant 1\} < + \infty .$$

Par analogie avec les formes linéaires, on appellera norme de $h$ le nombre

$$\|h\| = \sup\{|h(x)| ; \|x\| \leqslant 1\}$$

(c'est un abus de langage puisque l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions sous-linéaires continues n'est pas un espace vectoriel).

Pour tout $x \in X$, on a la relation $|h(x)| \leqslant \|h\| \cdot \|x\|$.

Enfin, soient $h_1$ et $h_2$ deux fonctions sous-linéaires sur $X$ telles que, pour tout $x$, $h_1(x) \leqslant h_2(x)$ ( $h_1$ dominée par $h_2$ ) ; si $h_2$ est continue, $h_1$ l'est aussi, et on a $\|h_1\| \leqslant \|h_2\|$. A toute fonction sous-linéaire $h$ continue sur $X$, on peut alors faire correspondre l'ensemble $\varphi(h)$ des formes linéaires dominées par $h$ ; cet ensemble est une partie de $X^*$ (dual topologique de $X$), non vide (théorème de Hahn-Banach), convexe fortement borné et faiblement compact.

## 2. Théorème fondamental.

Soient maintenant $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$ un espace de probabilité, $X$ un espace vectoriel réel normé séparable, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions sous-linéaires continues sur $X$.

Soit $\omega \to h_\omega$ une application de $\Omega$ dans $\mathcal{H}$ telle que, $\forall x \in X$, l'application $\omega \to h_\omega(x)$ de $\Omega$ dans $\underline{R}$ soit $\mathcal{L}$-mesurable (nous dirons faiblement mesurable). $X$ étant séparable,

$$\|h_\omega\| = \sup\{ |h_\omega(x)| \ ; \ \|x\| \leqslant 1\}$$

peut s'écrire

$$\sup\{h_\omega(x) \ ; \ \|x\| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x \in X_0\} \ ,$$

où $X_0$ est une partie dénombrable de $X$ dense dans $X$. L'application $\omega \to \|h_\omega\|$ de $\Omega$ dans $\underline{R}$, qui apparaît comme une borne supérieure dénombrable de fonctions mesurables est encore mesurable. Nous supposerons que

$$\int_\Omega \|h_\omega\| \ \mu(d\omega) < +\infty \quad .$$

Il en résulte immédiatement que, pour tout $x \in X$, l'application $\omega \to h_\omega(x)$ est $\mu$-intégrable, et la relation

$$h(x) = \int_\Omega h_\omega(x) \ \mu(d\omega)$$

définit une fonction sous-linéaire continue sur $X$ dont la norme $\|h\|$ est majorée par $\int_\Omega \|h_\omega\| \ \mu(d\omega)$ .

Avec les notations précédentes, nous pouvons énoncer le théorème de base :

THÉORÈME 1. - $y^*$ étant une forme linéaire continue sur $X$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $y^* \in \varphi(h)$ ( $y^*$ dominée par $h$ ) ;

(ii) il existe une application $\omega \to y^*_\omega$ de $\omega$ dans $X^*$ telle que :

$$\forall\ x \in X \begin{cases} \text{(a)} & \omega \to y^*_\omega(x) \ \underline{\text{soit}}\ \mathfrak{L}\text{-}\underline{\text{mesurable}}\ ; \\ \text{(b)} & y^*_\omega(x) \leq h_\omega(x)\ ; \\ \text{(c)} & y^*(x) = \int_\Omega y^*_\omega(x)\ \mu(d\omega)\ . \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. - Il est évident que (ii) $\Longrightarrow$ (i) .

Supposons donc que $y^* \in \varphi(h)$ , et appelons L l'espace des applications étagées $\xi$ de $\Omega$ dans X (c'est-à-dire $\xi$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} 1_{\Lambda_i}\ x_i$ , où les $\Lambda_i$ appartiennent à $\mathfrak{L}$ et forment une partition finie de $\Omega$ ) ; la fonction

$$\omega \to h_\omega(\xi(\omega))$$

est alors $\mathfrak{L}$-mesurable et $\mu$-intégrable.

Posons

$$H(\xi) = \int_\Omega h_\omega(\xi(\omega))\ \mu(d\omega)\ ;$$

H est une fonction sous-linéaire sur L .

Soit $\tilde{L}$ le sous-espace de L des applications $\tilde{\xi}$ constantes ; sur $\tilde{L}$ , définissons la forme linéaire Q par $\tilde{Q}(\tilde{\xi}) = y^*(x)$ ( x étant la valeur prise par $\tilde{\xi}$ ). Comme

$$H(\tilde{\xi}) = \int_\Omega h_\omega(x)\ \mu(d\omega) = h(x)\ ,$$

$\tilde{Q}$ est dominée par H , et, d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire Q sur L dominée par H et prolongeant $\tilde{Q}$ .

Soient $x \in X$ et $\Lambda \in \mathfrak{L}$ ; la fonction $\omega \to 1_\Lambda(\omega)\ x$ appartient à L ; posons $\mu_x(\Lambda) = Q(x\ 1_\Lambda)$ . $\mu_x(\Lambda)$ est une fonction additive définie sur $\mathfrak{L}$ et qui vérifie les relations :

$$\mu_x(\Lambda) = Q(x\ 1_\Lambda) \leq H(x\ 1_\Lambda) = \int_\Lambda h_\omega(x)\ \mu(d\omega) \leq \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leq \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega)\ ,$$

$$-\mu_x(\Lambda) = Q(-x\ 1_\Lambda) \leq H(-x\ 1_\Lambda) = \int_\Lambda h_\omega(-x)\ \mu(d\omega) \leq \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leq \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega)\ ;$$

$\mu_x$ est donc une mesure bornée complètement continue par rapport à $\mu$ . Elle admet une densité $\omega \to q_\omega(x)$ majorée par $h_\omega(x)$ pour $\mu$-presque tout $\omega$ .

La linéarité de Q entraîne que, si x et $y \in X$ et a et $b \in \underline{R}$ ,

$$q_\omega(ax + by) = a\ q_\omega(x) + b\ q_\omega(y) \qquad \text{pour } \mu\text{-presque tout } \omega\ .$$

Soit alors $X_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments d'une partie dénombrable de X partout dense dans X ; il existe une partie $\Omega_0$ de $\Omega$ de mesure-$\mu$ nulle telle que, pour tout $\omega \notin \Omega_0$ , on ait

$$q_\omega(x) \leq h_\omega(x) \qquad \text{et} \qquad q_\omega(ax + by) = a\ q_\omega(x) + b\ q_\omega(y)$$

( x et $y \in X_0$ , a et b rationnels) .

Nous allons maintenant définir l'application $\omega \to y^*_\omega$ cherchée, de la manière suivante :

($\alpha$) Si $\omega \notin \Omega_0$ , $y^*_\omega$ sera la forme linéaire continue prolongeant par continuité $q_\omega$ de $X_0$ à $X$ . Nous vérifions que :

(a) $\omega \to y^*_\omega(x)$ est une application $\mathcal{E}$-mesurable de $\Omega - \Omega_0$ dans $\underset{\sim}{R}$ : c'est vrai, par construction, si $x \in X_0$ ; sinon, soit $\{x_n\}_{n \in N}$ une suite de points de $X_0$ tendant vers $x$ ; l'application $\omega \to y^*_\omega(x)$ est la limite de la suite d'applications mesurables $\omega \to q_\omega(x_n)$ .

(b) $y^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x)$ , car c'est vrai si $x \in X_0$ , partout dense dans $X$ .

($\beta$) Si $\omega \in \Omega_0$ , nous choisirons $y^*_\omega$ dans $\varphi(h_\omega)$ de sorte que $\omega \to y^*_\omega(x)$ soit une application $\mathcal{E}$-mesurable de $\Omega_0$ dans $\underset{\sim}{R}$ . Si $\mathcal{E}$ est une tribu complète pour la probabilité $\mu$ , ce choix peut être arbitraire ; sinon, ce choix est possible, grâce à la construction de Jacob (cf. plus loin).

L'application $\omega \to y^*_\omega$ ainsi construite vérifie (a) et (b). Pour vérifier (c), il reste à montrer que

$$\int_\Omega y^*_\omega(x)\ \mu(d\omega) = \int_\Omega q_\omega(x)\ \mu(d\omega) = y^*(x)\ . .$$

Pour cela, il suffit de montrer que, si $x_n$ est une suite d'éléments de $X_0$ tendant vers $x$ , $q_\omega(x_n)$ tend $\mu$-presque partout vers $q_\omega(x)$ (puisque $q_\omega(x_n)$ a pour limite $y^*_\omega(x)$ $\mu$-presque partout).

Soit $\Lambda \in \mathcal{E}$ , nous avons

$$|\mu_{x_n}(\Lambda) - \mu_x(\Lambda)| = |\mathcal{Q}[1_\Lambda(x_n - x)]| \leqslant \int_\Lambda |h_\omega(x_n - x)|\ \mu(d\omega)$$
$$\leqslant \|x_n - x\| \int_\Lambda \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \leqslant \|x_n - x\| \int_\Omega \|h_\omega\|\ \mu(d\omega) \quad ,$$

par conséquent

$$\lim_n \sup_{\Lambda \in \mathcal{E}} |\mu_{x_n}(\Lambda) - \mu_x(\Lambda)| = 0 \quad ,$$

d'où

$$\lim_n \int_\Omega |q_\omega(x_n) - q_\omega(x)|\ \mu(d\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad q_\omega(x) = y^*_\omega(x) \quad \mu\text{-p. p.} \ .$$

<u>Construction de Jacob</u>. - Soit $X_0$ une partie dénombrable de $X$ partout dense dans $X$ ; pour $x \in X_0$ et pour $r$ rationnel, posons

$$A_{x,r} = \{y^* \ ;\ y^* \in X^* \ \text{ et } \ y^*(x) \leqslant r\} \ ;$$

en faisant varier $x$ dans $X_0$ , et $r$ dans $Q$ , on obtient une famille dénombrable de parties faiblement fermées de $X^*$ séparante (c'est-à-dire que, si $y^*_1$ et $y^*_2$ sont deux formes linéaires continues distinctes, il existe un $A_{x,r}$ contenant l'une et non l'autre). Ordonnons cette famille en une suite $\{A_n\} = \{A_{x_{\alpha_n}, r_{\beta_n}}\}$.

Considérons maintenant la suite $f_n$ d'applications de $\Omega_0$ dans l'ensemble des parties de $X^*$, définie par récurrence de la manière suivante :

$$f_1(\omega) = \varphi(h_\omega) ,$$

$$f_{n+1}(\omega) = \begin{cases} f_n(\omega) \cap A_n & \text{si cette intersection est non vide ,} \\ f_n(\omega) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Pour un $\omega$ donné, la suite $f_n(\omega)$ est une suite emboîtée de compacts non vides, dont l'intersection $f(\omega) = \bigcap_n f_n(\omega)$ est non vide ; comme d'autre part la famille $A_n$ est séparante, cette intersection ne peut comporter plus d'un point : $f(\omega)$ contient exactement un point ; soit $g(\omega) = x^*_\omega$ ce point.

L'application $\omega \longrightarrow x^*_\omega$ vérifie évidemment (b). Montrons maintenant que, pour tout $x$, l'application $\omega \longrightarrow x^*_\omega(x)$ est $\mathcal{E}$-mesurable ; il suffit, comme plus haut, de le montrer pour $x \in X_0$, et il est alors nécessaire et suffisant que, pour tout rationnel $r$, l'ensemble $\{\omega ; x^*_\omega(x) \leqslant r\}$ appartienne à $\mathcal{E}$. Nous sommes donc ramenés à montrer que, $\forall n$, $g^{-1}(A_n)$ appartient à $\mathcal{E}$. Montrons-le par récurrence.

Pour que $g(\omega)$ appartienne à $A_n$, il est nécessaire et suffisant que

$$f_n(\omega) \cap A_n \neq \emptyset .$$

Amorçons la récurrence :

Cas $n = 1$. - Si $x^* \in f_1(\omega)$, on a $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant x^*(x_{\alpha_1}) \leqslant h_\omega(x_{\alpha_1})$, et si $x^* \in A_1$, on a $x^*(x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$ ; pour qu'il existe un $x^*$ appartenant à la fois à $f_1(\omega)$ et à $A_1$, il est donc nécessaire que $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$.

Réciproquement, si $\omega$ est tel que $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$, il est possible de trouver un nombre $a$ vérifiant à la fois

$$-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant a \leqslant h_\omega(x_{\alpha_1}) \qquad \text{et} \qquad a \leqslant r_{\beta_1} .$$

Soit $\tilde{x}^*$ la forme linéaire définie sur l'espace vectoriel engendré par $x_{\alpha_1}$, prenant la valeur $a$ en $x_{\alpha_1}$ ; $\tilde{x}^*$ est dominée par $h_\omega$, et, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger à $X$ en une forme linéaire $x^*$ dominée par $h_\omega$ ; $x^*$ ainsi définie appartient à la fois à $\varphi(h_\omega) = f_1(\omega)$ et à $A_1$.

Conclusion : $g^{-1}(A_1) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}\}$ ; $g^{-1}(A_1)$ appartient bien à $\mathfrak{L}$, puisque $h_\omega$ est $\mathfrak{L}$-faiblement mesurable.

Cas $n = 2$. - Pour déterminer $g^{-1}(A_2)$, étudions séparément :

$$g^{-1}(A_2) \cap g^{-1}(A_1) \qquad \text{et} \qquad g^{-1}(A_2) \cap (\Omega_0 - g^{-1}(A_1)) \quad .$$

($\alpha$) Si $\omega \in g^{-1}(A_1)$ ($\iff -h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$), $f_2(\omega) = \varphi(h_\omega) \cap A_1$, et un raisonnement analogue au précédent montre que, pour que l'intersection $f_2(\omega) \cap A_2$ soit non vide, il est nécessaire que la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}$ ait lieu et soit compatible avec $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}$ ; elle est alors suffisante. Autrement dit:

$$g^{-1}(A_1) \cap g^{-1}(A_2) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) \leqslant r_{\beta_1}\} \cap \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \quad .$$

($\beta$) Si $\omega \in \Omega_0 - g^{-1}(A_1)$ ($\iff -h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}$), $f_2(\omega) = \varphi(h_\omega)$, et pour que $\varphi(h) \cap A_2$ soit non vide, il est nécessaire que la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}$ ait lieu et soit compatible avec la relation $-h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}$ ; elle est alors suffisante. Autrement dit :

$$g^{-1}(A_2) \cap (\Omega_0 - g^{-1}(A_1)) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_1}) > r_{\beta_1}\} \cap \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \quad ;$$

en réunissant ces deux résultats, on obtient :

$$g^{-1}(A_2) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_2}) \leqslant r_{\beta_2}\} \in \mathfrak{L} \quad .$$

Cas général. - De la même manière, en écrivant

$$g^{-1}(A_n) = \bigcup_{\{B_i\}} (g^{-1}(A_n) \cap B_1 \dots \cap B_{n-1}) \quad ,$$

où chaque $B_i$ est, soit $g^{-1}(A_i)$, soit $(\Omega_0 - g^{-1}(A_i))$, et où la réunion porte sur tous les choix possibles des $B_i$, on montre que

$$g^{-1}(A_n) = \{\omega \; ; \; -h_\omega(-x_{\alpha_n}) \leqslant r_{\beta_n}\} \in \mathfrak{L} \quad .$$

Remarque. - On peut se passer de la construction de Jacob, à condition de remplacer dans le théorème 1 la condition (b) par la condition plus faible suivante :

(b') $\qquad x^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x) \qquad$ pour $\mu$-presque tout $\omega$ .

En effet, (ii) $\Longrightarrow$ (i) reste vrai, et il suffit de choisir dans la réciproque, constante sur $\Omega_0$ .

Le théorème 1 va maintenant nous servir à démontrer la partie constructive de quelques théorèmes.

3. Théorème de Hardy, Littlewood, Polya, Blackwell, Stein, Scherman, Cartier.

Rappels et notations. - Si $(\Omega , \mathcal{F})$ et $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ sont des espaces mesurables, une probabilité de transition de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ est une application $P$ de $\mathcal{B} \times \Omega$ dans $[0 , 1]$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, $P(. , \omega)$ est une probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$, et, pour tout $E \in \mathcal{B}$, $P(E , .)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Si $\mu$ est une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{F})$, $P\mu$ est la probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ définie par

$$P\mu(E) = \int_\Omega P(E , \omega)\, \mu(d\omega) \qquad (E \in \mathcal{B}) ,$$

et $P \times \mu$ est la probabilité définie sur $(\Omega \times \mathcal{R} , \mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ par

$$P \times \mu(D \times E) = \int_D P(E , \omega)\, \mu\, d\omega \quad ;$$

la probabilité $P \times \mu$ a pour projections sur $\Omega$ et $\mathcal{R}$ respectivement $\mu$ et $P\mu$.

Si $z$ est une fonction sur $\mathcal{R}$ $\mathcal{B}$-mesurable et bornée, la relation

$$z\, P(\omega) = \int_{\mathcal{R}} z(r)\, P(dr , \omega)$$

définit une fonction sur $\Omega$ $\mathcal{F}$-mesurable et bornée.

Supposons maintenant que $\Omega$ soit une partie convexe compacte métrisable d'un e. v. t. l. c., et $\mathcal{F}$ la tribu borélienne de $\Omega$.

Soit $S$ l'ensemble des fonctions concaves continues sur $\Omega$ ; munissons l'ensemble des probabilités sur $(\Omega , \mathcal{F})$ de l'ordre suivant :
$\mu < \nu$ si et seulement si, pour toute fonction $y \in S$, l'inégalité suivante est réalisée :

$$\int_\Omega y\, d\mu \geq \int_\Omega y\, d\nu \quad ;$$

cette inégalité se conserve pour les bornes inférieures de fonctions de $S$ qui sont des fonctions concaves semi-continues supérieurement, car $\mu$ et $\nu$ sont des mesures de Radon $> 0$.

Enfin, une dilatation $P$ sur $\Omega$ est une probabilité de transition de $\Omega$ dans $\Omega$ telle que, pour toute fonction affine continue $z$ sur $\Omega$,

$$z\, P(\omega) = \int_\Omega P(d\theta , \omega)\, z(\theta) = z(\omega) \quad .$$

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 2. - Pour que $\mu < \nu$, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une dilatation $P$ sur $\Omega$ telle que $\nu = P\mu$.

<u>**Démonstration.**</u>

<u>Condition suffisante</u> (elle ne fait pas intervenir le théorème 1). - Soit $\nu = P\mu$ ; pour toute fonction $x$ continue sur $\Omega$, on a les égalités suivantes :

$$\int_\Omega x \, d\nu = \int_\Omega x(\omega) \int_\Omega P(d\omega , \theta) \, \mu(d\theta) = \int_\Omega \mu(d\theta) \int_\Omega x(\omega) \, P(d\omega , \theta) = \int xP \, d\mu \ .$$

Par conséquent, pour montrer que $\mu \prec \nu$, il suffit de montrer que $yP \leqslant y$, pour toute fonction $y$ concave continue.

Or $y = \inf\{z \ ; \ z \geqslant y \ , \ z$ affine sur $\Omega\}$, et par suite

$$y\,P(\theta) = \int_\Omega \inf_{z \geqslant y} z(\omega) \, P(d\omega , \theta) \leqslant \inf_{z \geqslant y} \int_\Omega z(\omega) \, P(d\omega , \theta) = \inf_{z \geqslant y} z(\theta) = y(\theta) \ ,$$

car, $P$ étant une dilatation, $zP = z$.

<u>Condition nécessaire</u>. - Mettons-nous en mesure d'appliquer le théorème 1. Pour cela, soit $X$ l'espace de Banach séparable des fonctions continues sur $\Omega$ muni de la norme uniforme. D'après le théoreme de Riesz, à la probabilité $\nu$ sur $\Omega$ correspond une forme linéaire $y^*$ continue sur $X$ ; soit $\mu \prec \nu$.

Pour $x \in X$ et pour $\omega \in \Omega$, posons

$$h_\omega(x) = \inf\{y(\omega) \ ; \ y \in S \ \text{ et } \ y \geqslant x\} \ .$$

Pour $x$ fixé, $h_\omega(x)$ est une fonction sur $\Omega$ concave et bornée semi-continue supérieurement, et par conséquent $\mathcal{E}$-mesurable.

Pour $\omega$ fixé, c'est une fonction sous-linéaire sur $X$ dominée par la fonction sous-linéaire $N$ définie de la manière suivante :

$$N(x) = \sup\{x(\omega) \ ; \ \omega \in \Omega\} \ .$$

(En effet, $\Omega$ étant compact, $N(x) = x(\omega_0)$ pour un certain $\omega_0$, et la fonction affine $y(\omega) = x(\omega_0)$ vérifie $h_\omega(x) \leqslant y(\omega) \leqslant N(x)$ .) Comme $N$ est une fonction sous-linéaire continue de norme $\|N\| = 1$, $\|h_\omega\| \leqslant 1$, et par suite

$$\int_\Omega \|h_\omega\| \, \mu(d\omega) \leqslant 1 \ ;$$

enfin, pour $x$ fixé, $x(\omega) \leqslant h_\omega(x)$, donc l'hypothèse $\mu \prec \nu$ entraîne

$$y^*(x) = \int_\Omega x(\omega) \, \nu(d\omega) \leqslant \int_\Omega h_\omega(x) \, \nu(d\omega) \leqslant \int h_\omega(x) \, \mu(d\omega) \ .$$

Toutes les hypothèses du théorème 1 sont réunies ; nous en déduisons l'existence d'une application $\omega \to y^*_\omega$ de $\Omega$ dans $X^*$ telle que, pour tout $x \in X$,

a) $\omega \to y^*_\omega(x)$ soit $\mathcal{E}$-mesurable ,

(b) $$y^*_\omega(x) \leqslant h_\omega(x) \quad (\leqslant Nx) \quad ,$$

(c) $$y^*(x) = \int_\Omega y^*_\omega(x)\ \mu(d\omega) \quad .$$

La relation (b), appliquée à $x \leqslant 0$ ( $x^*_\omega(x) \leqslant N(x) \leqslant 0$ ), montre que $y^*_\omega$ est une forme linéaire positive. Soit donc $P(\cdot\ ,\ \omega)$ la mesure positive associée à $y^*_\omega$ ; c'est une probabilité sur $(\Omega\ ,\ \mathcal{L})$ car, toujours d'après (b), nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} P(\Omega\ ,\ \omega) = x^*_\omega(1) \leqslant N(1) = 1 \\ \text{et} \\ -\ P(\Omega\ ,\ \omega) = x^*_\omega(-\ 1) \leqslant N(-\ 1) = -\ 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow P(\Omega\ ,\ \omega) = 1 \quad .$$

La relation (a) exprime que, pour $A \in \mathcal{L}$ , $\omega \longrightarrow P(A\ ,\ \omega)$ est mesurable, donc $P$ est une probabilité de transition, et enfin la relation (c) montre que $\nu = P\mu$ .

Si maintenant $y$ est une fonction concave continue,

$$y\ P(\omega) = \int_\Omega y(\theta)\ P(d\theta\ ,\ \omega) = y^*_\omega(y) \leqslant h_\omega(y) = y(\omega) \quad ,$$

et par suite, pour toute fonction affine continue $z$ , concave ainsi que son opposée, nous avons $zP = z$ ; $P$ est une dilatation.

4. Partition d'une probabilité sur un espace polonais dominée par une fonctionnelle sous-linéaire.

Soit $\mathcal{R}$ un espace polonais (métrisable complet et séparable). Appelons $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathcal{R}$ muni de la norme uniforme, et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathcal{R}$ .

$\nu$ étant une probabilité sur $(\mathcal{R}\ ,\ \mathcal{B})$ , et $h$ une fonction sous-linéaire sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ , nous écrirons

$$\nu \leqslant h \quad \text{si} \quad \forall\ z \in \mathcal{C}(\mathcal{R}) \qquad \int_{\mathcal{R}} z\ d\nu \leqslant h(z) \quad .$$

Comme au paragraphe précédent, appelons $N$ la fonction sous-linéaire sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ définie par

$$N(z) = \sup\{z(r)\ ,\ r \in \mathcal{R}\} \quad ;$$

$N$ est continue, et $\|N\| = 1$ . Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions sous-linéaires sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ dominées par $N$ ; toute $h \in \mathcal{H}$ est continue et de norme $\|h\| \leqslant 1$ .

Soient d'autre part un espace de probabilité $(\Omega\ ,\ \mathcal{L}\ ,\ \mu)$ , et $\omega \longrightarrow h_\omega$ une application de $\Omega$ dans $\mathcal{H}$ $\mathcal{L}$-faiblement mesurable.

Pour tout $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ , l'application $\omega \longrightarrow h_\omega(z)$ étant mesurable bornée est $\mu$-intégrable, et la relation

$$h(z) = \int_\Omega h_\omega(z)\, \mu(d\omega)$$

définit une fonction sous-linéaire appartenant à $\mathcal{H}$ .

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 3. - Etant donnée une probabilité $\nu$ sur $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$ , pour qu'il existe une probabilité de transition $P$ de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ telle que $\nu = P\mu$ et $P(\cdot, \omega) \leqslant h_\omega$ pour $\mu$-presque tout $\omega$ ; il est nécessaire et suffisant que $\nu \leqslant h$ .

Démonstration. - La nécessité est évidente.

Supposons donc $\nu \leqslant h$ . Soit $\mathfrak{U}$ une classe de fermés de $\mathcal{R}$ , contenant tous les compacts et tous les complémentaires d'une base dénombrable de la topologie de $\mathcal{R}$ , stable pour la réunion finie et l'intersection ; et soit $X$ un sous-espace fermé séparable de $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ tel que, pour tout $A \in \mathfrak{U}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ rationnel, il existe un élément $x_{A,\varepsilon}$ de $X$ à valeur dans $[0, 1]$ prenant la valeur $1$ sur $A$ et la valeur $0$ sur le complémentaire de $A_\varepsilon$ ( $A_\varepsilon$ étant le voisinage ouvert d'ordre $\varepsilon$ de $A$ ).

La restriction $h_\omega^*$ de $h_\omega$ à $X$ est encore faiblement mesurable, et

$$\|h_\omega^*\| \leqslant \|h_\omega\| \leqslant 1 \quad .$$

$\omega \to \|h_\omega^*\|$ qui est $\mathfrak{L}$-mesurable (puisque $X$ est séparable), est donc $\mu$-intégrable. En appelant $y^*$ la restriction à $X$ de la forme linéaire $z \to \int_{\mathcal{R}} z\, d\nu$ , nous avons $y^*(x) \leqslant h_\omega^*(x)$ , et toutes les conditions du théorème 1 sont remplies.

Il existe donc une application $\omega \to y_\omega^*$ de $\Omega$ dans $X^*$ telle que, $\forall\, x \in X$ ,

(a) $$\omega \to y_\omega^*(x) \quad \text{soit } \mathfrak{L}\text{-mesurable} \quad ,$$

(b) $$y^*(x) \leqslant h_\omega^X(x) \quad ,$$

(c) $$\int_{\mathcal{R}} x\, d\nu = \int_\Omega y^*(x)\, \mu(d\omega) \quad .$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement $\tilde{y}_\omega^*$ de $y_\omega^*$ à $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ vérifiant

$$\tilde{y}_\omega^*(z) \leqslant h_\omega(z) \quad ( \leqslant N(z) ) \quad .$$

Ces inégalités montrent que $\tilde{y}_\omega^*$ est une forme linéaire positive (car si $z \leqslant 0$ , $y_\omega^*(z) \leqslant 0$ ) et que $\tilde{y}_\omega^*(1) = 1$ .

$\mathcal{R}$ étant normal et à base dénombrable, il existe, d'après A. D. ALEKSANDROV [2], une fonction d'ensemble $p(\cdot, \omega)$ non négative et additive, définie sur l'algèbre engendrée par la topologie, et satisfaisant à

$$p(E , \omega) = \sup\{p(A , \omega) , \ A \text{ fermé}, \ A \subset E\} ,$$

$p(\cdot , \omega)$ étant liée à $\tilde{y}^*_\omega$ par les relations :

$$\tilde{y}^*_\omega(z) = \int_{\mathcal{R}} z(r)\, p(dr , \omega) \qquad \text{pour} \quad z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$$

et

$$p(A , \omega) = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}^*_\omega(x_{A,\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} y^*_\omega(x_{A,\frac{1}{n}}) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{L} .$$

Cette dernière relation montre que $p(A , \cdot)$ est $\mathcal{E}$-mesurable comme limite dénombrable de fonctions mesurables (pour $A \in \mathfrak{L}$ ).

Pour montrer que $p(\cdot , \omega)$ peut être prolongée à la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}$ en une probabilité, que nous noterons $P(\cdot , \omega)$ , il ne reste plus qu'à montrer sa $\sigma$-additivité (sur l'algèbre engendrée par $\mathfrak{L}$ ) puisque nous savons déjà qu'elle est positive et que $p(\mathcal{R} , \omega) = y^*_\omega(1) = 1$ .

Or, sur un espace polonais $\mathcal{R}$ , la $\sigma$-additivité d'une fonction d'ensemble $\gamma$ , positive et bornée, définie sur une algèbre contenant les fermés, est équivalente à l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$ , d'un compact $K$ , vérifiant $\gamma(K_\varepsilon) > \gamma(\mathcal{R}) - \varepsilon$ [2]. Ici, $\nu$ étant une probabilité sur $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ , il est donc possible de trouver, pour tout $\delta > 0$ et tout entier $k$ , un compact $A^{(k)}$ tel que

$$\nu(A^{(k)}) > 1 - \delta\, 2^{-2k} .$$

Comme $A^k \in \mathfrak{L}$ , on peut écrire :

$$\nu(A^{(k)}) = \int_\Omega p(A^{(k)} , \omega)\, \mu(d\omega) ,$$

d'où

$$1 - \delta\, 2^{-2k} < \int_{\{p(A^{(k)},\omega)>1-2^{-k}\}} p(A^{(k)} , \omega)\, \mu(d\omega) + \int_{\{p(A^k,\omega)\leq 1-2^{-k}\}} p(A^k , \omega)\, \mu(d\omega)$$

$$\leq \mu(\{p(A^k , \omega) > 1 - 2^{-k}\}) + (1 - 2^{-k})[1 - \mu(\{p(A^k , \omega) > 1 - 2^{-k}\})] .$$

Soit

$$1 - \delta\, 2^{-2k} < 2^{-k}\, \mu(\{p(A^k , \omega) > 1 - 2^{-k}\}) + 1 - 2^{-k} ,$$

et

$$\mu(\Omega - \{p(A^k , \omega) > 1 - 2^{-k}\}) < \delta\, 2^{-k} .$$

Si bien que l'ensemble $\Omega_0 = \bigcap_k \{p(A^{(k)} , \omega) > 1 - 2^{-k}\}$ des $\omega$ , pour lesquels $p(\cdot , \omega)$ est $\sigma$-additive sur $\mathfrak{L}$ (donc pour lesquels $P(\cdot , \omega)$ est une probabilité), vérifie l'inégalité $\mu(\Omega_0) > 1 - \delta$ , et, $\delta$ étant arbitraire, $\Omega_0$ est bien de mesure $\mu$ égale à $1$ , c'est-à-dire que $P(\cdot\,,\omega)$ est une probabilité sur $(\mathcal{R}\,,\mathcal{B})$ pour $\mu$-presque tout $\omega$ .

$P(B\,,\cdot)$ , définie sur $\Omega_0$ , est $\mathcal{E}$-mesurable pour $B\in\mathcal{B}$ , car comme $p(A\,,\cdot)$ l'était, et que $\mathcal{U}$ engendre $\mathcal{B}$ , $P(B\,,\cdot)$ est limite dénombrable de fonction mesurable.

Nous complèterons la définition de $P$ en choisissant pour $P(\cdot\,,\omega)$ une probabilité arbitraire fixe, si $\omega\notin\Omega_0$ . $P$ est une probabilité de transition de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ .

La relation $\nu(E)=\int_\Omega p(E\,,\omega)\,\mu(d\omega)=\int_\Omega P(E\,,\omega)\,\mu(d\omega)$ , valable pour tout élément de $\mathcal{E}$ , s'étend à $\mathcal{B}$ ; autrement dit, $\nu=P\mu$ . Enfin, la relation $\tilde{x}^*_\omega(z)\leqslant h_\omega(z)$ peut s'écrire $P(\cdot\,,\omega)\leqslant h_\omega$ pour tout $\omega\in\Omega_0$ , c'est-à-dire pour $\mu$-presque tout $\omega$ .

## 5. Partition d'une probabilité sur un espace polonais dominée par une capacité.

Dans le théorème précédent, il est possible de remplacer la condition $\nu\leqslant h$ , qui fait intervenir les fonctions continues bornées sur $\mathcal{R}$ , par une condition ne faisant intervenir que des parties de $\mathcal{R}$ ( $\mathcal{R}$ étant toujours un espace polonais). Pour cela, rappelons que si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathcal{R}$ , une capacité, normalisée, alternée d'ordre $2$ sur $\mathcal{O}$ , est une fonction $f$ sur $\mathcal{O}$ à valeur dans $[0\,,1]$ telle que :

(a) $$f(\emptyset)=0 \quad\text{et}\quad f(\mathcal{R})=1\ ,$$

(b) $$f(u)\leqslant f(v)\quad\text{si}\quad u\subset v\ ,$$

(c) $$f(u\cup v)+f(u\cap v)\leqslant f(u)+f(v)\ .$$

A la capacité $f$ associons la fonction définie sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ par la relation suivante:

$$h(z)=\inf_{r\in\mathcal{R}}\{z(r)\}+\int_0^\infty f(\{r\ ;\ z(r)>\inf_{r\in\mathcal{R}}\{z(r)\}+t\})\,dt\qquad(z\in\mathcal{C}(\mathcal{R}))\ .$$

Nous allons montrer que $h$ est une fonction sous-linéaire sur $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ dominée par $N$ , et que, pour toute probabilité $\nu$ sur $(\mathcal{R}\,,\mathcal{B})$ , les relations

$$\forall\, z\quad \int z\,d\nu\leqslant h(z)\qquad\text{et}\qquad \forall\, u\ \text{ouvert}\quad \nu(u)\leqslant f(u)$$

sont équivalentes.

Soit $z\in\mathcal{C}(\mathcal{R})$ , posons

$$a=\inf_{r\in\mathcal{R}}\{z(r)\}\qquad\text{et}\qquad b=\sup_{r\in\mathcal{R}}\{z(r)\}\ .$$

La fonction $g_a(t) = f(\{r \; ; \; z(r) > a + t\})$ est décroissante, vaut $1$ pour $t = 0$, et $0$ pour $t > b - a$ ; elle est donc intégrable, et

$$\int_0^\infty g_a(t)\, dt = \int_0^{b-a} g_a(t)\, dt \leqslant b - a \;;$$

il en résulte que $h(z) \leqslant N(z) = b$ .

Soit $\lambda > 0$ ,

$$h(\lambda z) = \lambda a + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; \lambda z(r) > \lambda a + t\})\, dt$$

$$= \lambda a + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; z(r) > a + \frac{t}{\lambda}\})\, dt = \lambda a + \int_0^\infty g_a(\frac{t}{\lambda})\, dt$$

$$= \lambda a + \int_0^\infty g_a(u)\, \lambda\, du = \lambda\, h(z) \quad .$$

Pour montrer la sous-additivité de $h$ , remarquons que si $c < a$ , on peut écrire

$$h(z) = c + \int_0^\infty f(\{r \; ; \; z(r) > c + t\})\, dt \quad .$$

Soient alors $z_1$ et $z_2 \in C(R)$ , et $c$ un nombre inférieur à la fois à

$$\inf_{r \in R} \{z_1(r)\} \qquad \text{et} \qquad \inf_{r \in R} \{z_2(r)\} \quad .$$

Pour $t > 0$ , posons

$$A_t = \{z_1 > c + t\} \;, \qquad B_t = \{z_2 > c + t\} \;,$$

$$C_t = \{\inf(z_1 \,,\, z_2) > c + t\} \qquad \text{et} \qquad D_t = \{\sup(z_1 \,,\, z_2) > c + t\} \;;$$

nous avons $C_t = A_t \cap B_t$ et $D_t = A_t \cup B_t$ , et par suite

$$f(C_t) + f(D_t) \leqslant f(A_t) + f(B_t) \;;$$

soit encore

$$c + \int_0^\infty f(C_t)\, dt + c + \int_0^\infty f(D_t) \leqslant c + \int_0^\infty f(A_t)\, dt + c + \int_0^\infty f(B_t)\, dt \quad .$$

c'est-à-dire

$$h(\sup(z_1 \,,\, z_2)) + h(\inf(z_1 \,,\, z_2)) \leqslant h(z_1) + h(z_2) \quad .$$

Or, d'après un théorème de G. CHOQUET ([1], théorème 54.1), cette inégalité et la positive homogénéité de $h$ entraînent que $h$ est sous-additive.

Nous avons bien montré que $h$ est une fonction sous-linéaire sur $C(R)$ dominée par $N$ .

Soit maintenant $\nu$ une probabilité sur $(R \,,\, \mathcal{B})$ .

Si $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ , on peut écrire

$$\int z \, d\nu = \inf_{r \in \mathcal{R}} z(r) + \int_0^\infty \nu(\{r \; ; \; z(r) > \inf_{r \in \mathcal{R}} z(r) + t\}) \, dt \quad ;$$

par conséquent, si, pour tout ouvert $u$ , $\nu(u) \leqslant f(u)$ , il en résulte immédiatement

$$\int z \, d\nu \leqslant h(z) \quad .$$

Réciproquement, supposons que $\forall z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ , $\int z \, d\nu \leqslant h(z)$ . Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{R}$ . $\forall \varepsilon > 0$ , il existe une fonction $z \in \mathcal{C}(\mathcal{R})$ , à valeur dans $[0 , 1]$ , nulle sur $\complement \mathcal{U}$ , et telle que $\nu(u) \leqslant \int z \, d\nu + \varepsilon$ .

Or, $\{r \; ; \; z(r) > t\} \subset u$ pour tout $t > 0$ , donc $f(\{r \; ; \; z(r) > t\}) \leqslant f(u)$ , et

$$h(z) = \int_0^1 f(\{r \; ; \; z(r) > t\}) \, dt \leqslant f(u) \quad .$$

Nous obtenons $\nu(u) - \varepsilon \leqslant f(u)$ , c'est-à-dire, $\varepsilon$ étant arbitraire, $\nu(u) \leqslant f(u)$ .

Soient maintenant $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$ un espace de probabilité, et $\omega \longrightarrow F(\cdot , \omega)$ une application de $\Omega$ dans l'ensemble des capacités normalisées alternées d'ordre 2 définies sur $\mathcal{O}$ , telle que, $\forall u \in \mathcal{O}$ , $F(u , \cdot)$ soit $\mathcal{L}$-mesurable (nous dirons que $F$ est un noyau alterné d'ordre 2 de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ ).

La relation $f(u) = \int_\Omega F(u , \omega) \, \mu(d\omega)$ définit encore une capacité normalisée alternée d'ordre 2 ; soient $h_\omega$ la fonction sous-linéaire associée à $F(\cdot , \omega)$ , et $h$ celle associée à $f$ , on a évidemment

$$h(z) = \int_\Omega h_\omega(z) \, \mu d\omega \quad .$$

Avec ces nouvelles notations, le théorème 3 peut s'énoncer :

THÉORÈME 4. - <u>Pour qu'une probabilité</u> $\nu$ <u>sur</u> $(\mathcal{R} , \mathcal{B})$ <u>vérifie</u> $\nu(u) \leqslant h(u)$ <u>pour tout ouvert</u> $u$ <u>de</u> $\mathcal{R}$ , <u>il est nécessaire et suffisant qu'il existe une probabilité de transition</u> $P$ <u>de</u> $\Omega$ <u>dans</u> $\mathcal{R}$ <u>telle que</u> $\nu = P\mu$ <u>et que, pour</u> $\mu$-<u>presque tout</u> $\omega$ ,

$$P(u , \omega) \leqslant F(u , \omega) \quad \underline{\text{pour tout ouvert}} \; u \; \underline{\text{de}} \; \mathcal{R} \quad .$$

## 6. <u>Problème de Fréchet</u>.

Soient deux espaces de probabilité, $(\mathcal{R} , \mathcal{Y} , \nu)$ et $(\Omega , \mathcal{L} , \mu)$ , et $m$ une mesure positive $\sigma$-finie sur le produit $(\mathcal{R} \times \Omega \; ; \; \mathcal{Y} \otimes \mathcal{L})$ . A quelle condition existe-t-il une probabilité $\alpha$ sur $(\mathcal{R} \times \Omega \; ; \; \mathcal{Y} \otimes \mathcal{L})$ , majorée par $m$ , et de projections $\nu$ et $\mu$ sur $\mathcal{R}$ et $\Omega$ respectivement ? Le théorème 4 va nous permettre de donner une réponse dans le cas où $\mathcal{R}$ est un espace polonais et $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$ sa tribu borélienne.

De façon plus précise, nous avons :

THÉORÈME 5. - Pour qu'il existe une probabilité $\alpha$ sur $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ majorée par $m$ et de projections $\nu$ et $\mu$ sur $\mathcal{R}$ et $\Omega$ respectivement, il est nécessaire et suffisant que, $\forall B \in \mathcal{B}$ et $\forall D \in \mathcal{C}$, on ait

$$\nu(B) + \mu(D) \leqslant 1 + m(B \times D) .$$

Condition nécessaire. - Elle est évidente : si $\alpha \leqslant m$,

$$\nu(B) + \mu(D) = \alpha(B \times \Omega) + \alpha(\mathcal{R} \times D) = \alpha(B \times D) + \alpha(B \times \complement D) + \alpha(\mathcal{R} \times D)$$
$$\leqslant \alpha(B \times D) + \alpha(\mathcal{R} \times \complement D) + \alpha(\mathcal{R} \times D) \leqslant m(B \times D) + 1 .$$

Condition suffisante. - Pour tout $B \in \mathcal{B}$, soit $M(B , .)$ un représentant de l'espérance conditionnelle de $B$ par rapport à la $\sigma$-algèbre $\mathcal{C}$ et la mesure $m$. $M(B , \omega)$ est une mesure de transition de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$, et on a

$$m(B \times D) = \int_D M(B , \omega)\, m_O\, d\omega \qquad ( B \in \mathcal{B} \text{ et } D \in \mathcal{C} ) ,$$

où $m_O$ est la mesure projection de $m$ sur $(\Omega , \mathcal{C})$ ( $m_O(D) = m(\mathcal{R} \times D)$ ). Nous pouvons sans restriction remplacer $m_O$ par sa partie $n_O$ complètement continue par rapport à $\mu$, et $m$ par $n$ définie ainsi :

$$n(B \times D) = \int_D M(B , \omega)\, n_O\, d\omega ;$$

car, pour tout $D$ sur lequel la restriction de $m_O$ est complètement continue par rapport à $\mu$, $n_O = m_O$, et l'inégalité $\nu(B) + \mu(D) \leqslant 1 + n(B \times D)$ reste vraie, tandis que, si $\mu(D) = 0$, l'inégalité $\nu(B) \leqslant 1 + n(B \times D)$ est vraie a fortiori.

Posons

$$F(u , \omega) = \min\{\frac{dn_O}{d\mu}(\omega)\, M(u , \omega) , 1\} \qquad ( u \text{ ouvert de } \mathcal{R} \text{ et } \omega \in \Omega ) ,$$

$\frac{dn_O}{d\mu}$ étant un représentant déterminé de la densité de $n_O$ par rapport à $\mu$, que nous pouvons choisir partout supérieur à $1$ puisque $\mu \leqslant n_O$. $F(u , \omega)$ est alors un noyau alterné d'ordre $2$.

Pour tout ouvert $u$ de $\mathcal{R}$, nous avons

$$\nu(u) \leqslant 1 - \mu(D) + n(u \times D) ;$$

prenons pour ensemble $D$ l'ensemble où $F(u , \omega) = \frac{dn_O}{d\mu}(\omega)\, M(u , \omega)$ (c'est-à-dire $\{\omega ; \frac{dn_O}{d\mu}(\omega)\, M(u , \omega) \leqslant 1\}$ ) ; nous obtenons

$$1 - \mu(D) = \int_{\Omega - D} d\mu ,$$

$$n(u \times D) = \int_D M(u , \omega) \frac{dn_0}{d\mu} (\omega) \mu(d\omega) ,$$

et

$$\nu(u) \leq \int_{\Omega - D} d\mu + \int_D M(u , \omega) \frac{dn_0}{d\mu} (\omega) \mu(d\omega) = \int_\Omega F(u , \omega) \mu(d\omega) .$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème 4 : il existe une probabilité de transition $P$ de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ telle que $P\mu = \nu$ et $P(. , \omega) \leq F(. , \omega)$ pour $\mu$-presque tout $\omega$.

Posons $\alpha = P \times \mu$, c'est-à-dire $\alpha(B \times D) = \int_D P(u , \omega) \mu(d\omega)$,

$$\alpha(\mathcal{R} \times D) = \int_D \mu(d\omega) = \mu(D)$$

et

$$\alpha(B \times \Omega) = \int_\Omega P(B , \omega) \mu(d\omega) = \nu(B) .$$

$\alpha$ a bien pour projections $\mu$ et $\nu$ ; montrons que $\alpha \leq n \leq m$ ; pour $u$ ouvert et $D \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\alpha(u \times D) = \int_D P(u , \omega) \mu(d\omega) \leq \int_D F(u , \omega) \mu d\omega \leq \int_D M(u , \omega) n_0 d\omega = n(u \times D) .$$

Par approximation, l'inégalité est vraie pour tous les pavés mesurables qui engendrent la $\sigma$-algèbre $\mathcal{B} \otimes \mathcal{E}$.

## 7. Existence d'une probabilité (sur le produit d'un espace métrique complet séparable et de l'espace de ses fermés non vides) dont les projections sont données.

Soit $\mathcal{R}$ un espace métrique complet séparable dont la distance est notée $d$.

Prenons pour $\Omega$ l'ensemble des fermés non vides $\omega$ de $\mathcal{R}$, et sur $\Omega$ introduisons la métrique de Hausdorff

$$\delta(\omega , \omega') = \max\{\sup_{r \in \omega} d(r , \omega') , \sup_{r' \in \omega'} d(r' , \omega)\} .$$

La partie de $\mathcal{R} \times \Omega$ : $A = \{(r , \omega) ; r \in \omega\}$ est fermée pour la topologie produit ; c'est une conséquence immédiate de la définition de la topologie de $\Omega$.

Munissons $\mathcal{R}$ et $\Omega$ de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$, et soit $\mu$ une probabilité sur $(\Omega , \mathcal{F})$. $\mathcal{O}$ étant l'ensemble des ouverts de $\mathcal{R}$, définissons F sur $\mathcal{O} \times \Omega$ par

$$F(u , \omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \cap \omega \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } u \cap \omega = \emptyset . \end{cases}$$

Pour $\omega$ fixé, $F(. , \omega)$ est une capacité normalisée alternée d'ordre 2.

Pour $u$ fixé, $F(u , .)$ est $\mathcal{E}$-mesurable ; en effet, $\{\omega ; F(u , \omega) = 1\}$ est l'ensemble des fermés de $\mathcal{R}$ qui rencontrent un ouvert de $\mathcal{R}$ ; c'est évidemment un ouvert.

Soit alors $f(u) = \int_\Omega F(u\,,\,\omega)\,\mu(d\omega)$ : $f(u)$ est une capacité normalisée alternée d'ordre 2 , que l'on peut écrire $f(u) = \mu(\{\omega\ ;\ \omega \cap u \neq \emptyset\})$ .

Avec ces notations, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 6. - <u>Si</u> $\nu$ <u>est une probabilité sur</u> $(\mathcal{R}\,,\,\mathcal{B})$ , <u>pour que</u> $\nu \leqslant f$ $(\ \nu(u) \leqslant f(u)\ ,\ \ \forall\ u \in \mathcal{O}\ )$, <u>il est nécessaire et suffisant qu'il existe une probabilité</u> $\alpha$ <u>sur</u> $(\mathcal{R} \times \Omega\,,\,\mathcal{B} \otimes \mathcal{L})$ <u>de projections</u> $\nu$ <u>et</u> $\mu$ <u>telle que</u> $\alpha(A) = 1$ .

<u>La condition est nécessaire</u>. - Si $\nu \leqslant f$ , nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4 : il existe une probabilité de transition $P$ de $\Omega$ dans $\mathcal{R}$ telle que $\nu = P\mu$ et $P(u\,,\,\omega) \leqslant F(u\,,\,\omega)$ ( $\mu$-p. p.). En particulier, $P(\mathcal{R} - \omega\,,\,\omega) \leqslant F(\mathcal{R} - \omega\,,\,\omega) = 0$ $\mu$-p. p., et par suite $P(\omega\,,\,\omega) = 1$ $\mu$-p. p. La probabilité $\alpha = P \times \mu$ sur $(\mathcal{R} \times \Omega\,,\,\mathcal{B} \otimes \mathcal{L})$ (cf. § 5) a pour projections $\nu$ et $\mu$ , et nous avons

$$\alpha(A) = \int_\Omega P(\omega\,,\,\omega)\,\mu(d\omega) = 1 \quad .$$

<u>La condition est suffisante</u>. - Cela résulte immédiatement des relations

$$\nu(u) = \alpha(u \times \Omega) = \alpha(u \times \Omega \cap A) \leqslant \alpha(\mathcal{R} \times \{\omega\ ;\ u \cap \omega \neq \emptyset\}) = f(u) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t.5, 1953-1954, p. 131-295.

[2] PROKHOROV (Ju. V.). - Convergence of Random processes and limit theorems, Theory of Prob. and its Appl., t. 1, 1956, p. 161.

[3] STRASSEN (V.). - The existence of probability measures with given marginals (à paraître).