Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Haïm Brezis

Points fixes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 4 (1964-1965), exp. nº 11, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1964-1965__4__A10_0>

Séminaire CHOQUET,
Initiation à l'Analyse,
4e année, 1964/65, n° 11, 23 p. 6, 13 et 20 mai 1965

POINTS FIXES

par Haïm BREZIS

Introduction. - La première partie de cet exposé est consacrée à des théorèmes de points fixes obtenus par EDELSTEIN dans [7] et [8], qui généralisent la méthode des approximations successives pour des applications de type lipschitzien.

Dans la deuxième partie, on démontrera à l'aide du degré topologique (développé par LERAY dans [10]) quelques théorèmes de point fixe et de vecteur propre pour des applications complètement continues.

Enfin, dans la troisième partie, on trouvera des théorèmes de point fixe commun à une famille d'applications.

I. Généralisation de la méthode des approximations successives.

Définitions. - Soient E un espace métrique, et f une application de E dans E.

On dit que f est lipschitzienne (resp. ε-lipschitzienne) de rapport k si

$$x , y \in E \quad (\text{resp. } d(x , y) < \varepsilon) \implies d(f(x) , f(y)) \leqslant kd(x , y) .$$

On dit que f est localement lipschitzienne de rapport k si, $\forall x \in E$, $\exists V$ voisinage de x tel que

$$y , z \in V \implies d(f(y) , f(z)) \leqslant kd(y , z) .$$

Si $k < 1$, f est dite respectivement, contractante, ε-contractante, localement contractante.

Si $k = 1$, f est dite respectivement, nonexpansive, ε-nonexpansive, localement nonexpansive.

On dit que f est contractive (resp. ε-contractive) si

$$x \neq y \quad (\text{resp. } 0 < d(x , y) < \varepsilon) \implies d(f(x) , f(y)) < d(x , y) .$$

On dit que f est localement contractive si $\forall x \in E$, $\exists V$ voisinage de x tel que

$$y , z \in V \text{ et } y \neq z \implies d(f(y) , f(z)) < d(y , z) .$$

I.1. Applications contractantes.

On utilisera le théorème classique d'approximations successives sous une forme un peu plus générale :

LEMME 1. - *Soit* (E , d) *un espace métrique complet, et soit* f *une application continue de* E *dans* E . *S'il existe une métrique* δ *et* $0 \leqslant k < 1$, *tels que*

$$\forall\ x , y \in E \qquad d(x , y) \leqslant \delta(x , y) \quad \text{et} \quad \delta(f(x) , f(y)) \leqslant k\delta(x , y) \ ,$$

alors f *a un point fixe unique* a . *De plus,*

$$a = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) \qquad \text{pour tout } x_0 \in E \ .$$

En effet, si x_0 est un point quelconque de E , la suite $x_n = f^n(x_0)$ est de Cauchy pour δ , donc aussi pour d . Comme E est complet pour d , x_n converge vers a , et on a $f(a) = a$ puisque f est continue.

PROPOSITION 2. - *Soit* E *un espace métrique complet* ε*-enchaînable (c'est-à-dire qu'on peut joindre deux points de* E *par une* ε*-chaîne). Toute application* f , ε*-contractante de* E *dans* E , *a un point fixe unique* a . *De plus,*

$$a = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) \qquad \text{pour tout } x_0 \in E \ .$$

Notons $C(x , y)$ l'ensemble des ε-chaînes joignant x à y , et posons

$$\delta(x , y) = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1} , x_i) \ ; \ (x_i) \in C(x , y)\} \ .$$

Il est évident que δ est une métrique sur E et que

$$\forall\ x , y \in E \qquad d(x , y) \leqslant \delta(x , y) \ .$$

Si (x_i) , $0 \leqslant i \leqslant n$, est une ε-chaîne joignant x à y , on a

$$\forall\ i \qquad d(f(x_{i-1}) , f(x_i)) \leqslant kd(x_{i-1} , x_i) \ ,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} d(f(x_{i-1}) , f(x_i)) \leqslant k \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1} , x_i) \ .$$

Mais les $f(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n$, constituent une ε-chaîne joignant $f(x)$ à $f(y)$. Donc,

$$\delta(x , y) \leqslant k \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1} , x_i) \ ,$$

et comme cette inégalité est vérifiée pour toute ε-chaîne joignant x à y, on en déduit que

$$\delta(f(x)\ ,\ f(y)) \leqslant k\delta(x\ ,\ y)\ .$$

La proposition résulte alors du lemme 1.

PROPOSITION 3. - Soit E un espace métrique complet, connexe par arcs rectifiables (c'est-à-dire qu'on peut joindre deux points de E par un arc rectifiable). Toute application f localement contractante de E dans E a un point fixe unique a. De plus,

$$a = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) \qquad \text{pour tout } x_0 \in E\ .$$

Notons $C(x\ ,\ y)$ l'ensemble des arcs rectifiables joignant x à y, et $V(L)$ la longueur d'un arc rectifiable L.

Posons

$$\delta(x\ ,\ y) = \inf\{V(L)\ ;\ L \in C(x\ ,\ y)\}\ .$$

Il est évident que δ est une métrique sur E et que

$$\forall\ x\ ,\ y \in E \qquad d(x\ ,\ y) \leqslant \delta(x\ ,\ y)\ .$$

Montrons que

$$L \in C(x\ ,\ y) \implies f(L) \in C(f(x)\ ,\ f(y))$$

et que

$$V(f(L)) \leqslant kV(L)\ .$$

Supposons L défini par une application continue φ de $[0\ ,\ 1]$ dans E. Comme L est compact et f localement contractante, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a\ ,b \in L$ et

$$d(a\ ,\ b) < \varepsilon \implies d(f(a)\ ,\ f(b)) \leqslant kd(a\ ,\ b)\ .$$

Mais, φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $s\ ,\ t \in [0\ ,\ 1]$, et

$$|s - t| < \alpha \implies d(\varphi(s)\ ,\ \varphi(t)) < \varepsilon \implies d(f\varphi(s)\ ,\ f\varphi(t)) \leqslant kd(\varphi(s)\ ,\ \varphi(t))\ .$$

Ce qui montre que, pour toute partie finie σ de $[0\ ,\ 1]$, $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n = 1$, dont le module vérifie $\mu(\sigma) < \alpha$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} d(f\varphi(t_{i-1})\ ,\ f\varphi(t_i)) \leqslant k \sum_{i=1}^{n} d(\varphi(t_{i-1})\ ,\ \varphi(t_i)) \leqslant kV(L)\ .$$

On en déduit que $f(L)$ est un arc rectifiable joignant $f(x)$ à $f(y)$, et que $V(f(L)) \leqslant kV(L)$. Par suite,

$$\delta(f(x)\ ,\ f(y)) \leqslant V(f(L)) \leqslant kV(L)\quad .$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $L \in C(x\ ,\ y)$, on a

$$\delta(f(x)\ ,\ f(y)) \leqslant k\delta(x\ ,\ y)\quad .$$

La proposition résulte alors du lemme 1.

I.2. Applications contractives.

Notons $E(f)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites $f^n(x)$, où $x \in E$.

On dit que $a \in E$ est périodique pour f s'il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p(a) = a$.

PROPOSITION 4. - *Soient* E *un espace métrique, et* f *une application contractive de* E *dans* E *. L'ensemble des points fixes de* f *est identique à* $E(f)$ *et contient au plus un élément.*

COROLLAIRE 5. - *Soit* E *un espace métrique compact. Toute application contractive* f *de* E *dans* E *a un point fixe unique* a *. De plus,*

$$a = \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) \qquad \text{pour tout}\quad x_0 \in E\quad .$$

PROPOSITION 6. - *Soient* E *un espace métrique, et* f *une application* ε*-contractive de* E *dans* E *. L'ensemble des points périodiques de* f *est identique à* $E(f)$ *et discret.*

PROPOSITION 7. - *Soient* E *un espace métrique compact, et* f *une application localement contractive de* E *dans* E *. L'ensemble des points périodiques de* f *est non vide, fini, et identique à* $E(f)$.

Démontrons d'abord le lemme suivant, et puis la proposition 6.

LEMME 8. - *Soit* E *un espace métrique, et soit* f *une application nonexpansive (resp.* ε*-nonexpansive) de* E *dans* E *. Tout* $a \in E(f)$ *est valeur d'adhérence de la suite* $f^n(a)$ *et la restriction de* f *à l'ensemble* $\{f^n(a)\ ;\ n \geqslant 0\}$ *est une isométrie (resp.* ε*-isométrie).*

Comme $a \in E(f)$, il existe $x \in E$, tel que a soit valeur d'adhérence de la suite $f^n(x)$. Pour tout α avec $0 < \alpha < \varepsilon$, il existe un entier $m > 0$ tel que $d(a\ ,\ f^m(x)) < \alpha$ et $\forall\ N$ entier > 0 , $\exists\ p \geqslant m + N$ tel que $d(a\ ,\ f^p(x)) < \alpha$.

D'où :

$$d(f^{p-m}(a)\ ,\ f^p(x)) \leqslant d(a\ ,\ f^m(x)) < \alpha \qquad \text{et} \qquad d(a\ ,\ f^{p-m}(a)) < 2\alpha\ .$$

Ce qui montre que a est valeur d'adhérence de la suite $f^n(a)$. Soient $b = f^k(a)$ et $c = f^\ell(a)$ deux éléments de la suite $f^n(a)$.

D'après ce qui précède,

$$a = \lim_{i\to+\infty} f^{n_i}(a)\ .$$

D'où

$$b = \lim_{i\to+\infty} f^{n_i}(b) \qquad \text{et} \qquad c = \lim_{i\to+\infty} f^{n_i}(c)\ .$$

Si f est nonexpansive, on a

$$d(f^{n_i}(b)\ ,\ f^{n_i}(c)) \leqslant d(f(b)\ ,\ f(c)) \leqslant d(b\ ,\ c)\ .$$

En passant à la limite, on en déduit

$$d(f(b)\ ,\ f(c)) = d(b\ ,\ c)\ .$$

De même, si f est ε-nonexpansive,

$$d(b\ ,\ c) < \varepsilon \implies d(f(b)\ ,\ f(c)) = d(b\ ,\ c)\ .$$

Démonstration de la proposition 6. - Il résulte du lemme 8 que, si $a \in E(f)$, a est valeur d'adhérence de la suite $f^n(a)$. Donc il existe un entier $p > 0$ tel que $d(a\ ,\ f^p(a)) < \varepsilon$.

Si $f^p(a) \neq a$, on a

$$d(f(a)\ ,\ f^{p+1}(a)) < d(a\ ,\ f^p(a))\ .$$

Comme la restriction de f à $\{f^n(a)\ ;\ n \geqslant 0\}$ est une ε-isométrie, on est conduit à une contradiction. D'où $f^p(a) = a$.

Enfin, si a et b sont des points périodiques distincts de f, il existe un entier $p > 0$, tel que $f^p(a) = a$ et $f^p(b) = b$; on a donc nécessairement $d(a\ ,\ b) \geqslant \varepsilon$.

Démonstration de la proposition 4. - Il est évident que f a au plus un point fixe, et que tout point fixe de f appartient à $E(f)$. Inversement, si $a \in E(f)$, il existe, d'après la proposition 6, un entier $p > 0$ tel que $f^p(a) = a$. L'application $g = f^p$ est aussi contractive et vérifie $g(a) = a$, $gf(a) = fg(a) = f(a)$. Comme a est l'unique point fixe de g, on a $f(a) = a$.

Démonstration du corollaire 5. - Comme E est compact, $E(f)$ n'est pas vide, et, d'après la proposition 4, f a un point fixe unique a. Pour tout $x_0 \in E$, la suite $f^n(x_0)$ admet a pour seule valeur d'adhérence, et donc converge vers a .

Démonstration de la proposition 7. - Comme E est compact et f localement contractive, f est ε-contractive pour un certain $\varepsilon > 0$. La proposition 7 résulte alors simplement de la proposition 6.

I.3. Applications nonexpansives.

On dit qu'une norme est strictement convexe si

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \implies \|x\|y = \|y\|x \text{ .}$$

Soient E un espace vectoriel, et f une application de E dans E . On note

$$C(x) = c\Big(\bigcup_{n\geq 0} f^n(x)\Big) \quad ,$$

et $L(x)$ l'espace affine engendré par $C(x)$.

PROPOSITION 9. - Soit E un espace vectoriel muni d'une norme strictement convexe. Soient A un convexe fermé de E , et f une application nonexpansive de A dans A . S'il existe $x \in A(f)$ tel que $L(x)$ soit de dimension finie, f a un point fixe.

PROPOSITION 10. - Soit E un Banach réflexif muni d'une norme strictement convexe. Soient A un convexe fermé de E , et f une application nonexpansive de A dans A . S'il existe $x \in A(f)$ tel que $C(x)$ soit borné, f a un point fixe.

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME 11. - Soit E un espace vectoriel muni d'une norme strictement convexe. Soient A un convexe fermé, et f une application nonexpansive de A dans A . Si la restriction de f à un sous-ensemble B de A est une isométrie de B dans B , alors f est une application affine de $\overline{c(B)}$ dans $\overline{c(B)}$.

Soient x_1 , $x_2 \in B$; λ , $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, et $y = \lambda x_1 + \mu x_2$. Comme f est nonexpansive, on a

$$\|f(y) - f(x_1)\| \leq \mu\|x_2 - x_1\| \qquad \text{et} \qquad \|f(y) - f(x_2)\| \leq \lambda\|x_2 - x_1\| \quad .$$

D'où

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \|f(y) - f(x_1)\| + \|f(y) - f(x_2)\| \leq \|x_2 - x_1\| \quad ,$$

ce qui exige :

$$\|f(y) - f(x_1)\| = \mu\|f(x_2) - f(x_1)\| \qquad \text{et} \qquad \|f(y) - f(x_2)\| = \lambda\|f(x_2) - f(x_1)\| \ .$$

La norme étant strictement convexe,

$$f(y) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \ .$$

En raisonnant par récurrence, et en passant à la limite, on voit que f est affine de $\overline{c(B)}$ dans $\overline{c(B)}$.

LEMME 12. - <u>Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soient A un convexe de E , L l'espace affine engendré par A , et f une application affine de A dans F . Pour que f se prolonge en une application affine continue de L dans F , il faut et il suffit que f soit lipschitzienne.</u>

<u>En particulier, une application affine lipschitzienne de A dans A est faiblement continue.</u>

Il est facile de montrer que f se prolonge algébriquement de façon unique en une application affine g de L dans F . Supposons f lipschitzienne de rapport k , et montrons que g est continue. Soient $x , y \in L$,

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \qquad \text{et} \qquad y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \ ,$$

avec $x_1 , x_2 , y_1 , y_2 \in A$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1$; $\alpha_1 , \beta_1 \geqslant 1$; $\alpha_2 , \beta_2 \leqslant 0$.
Posons $\gamma = \alpha_1 - \beta_2 = \beta_1 - \alpha_2 > 0$ et $\alpha = \frac{\alpha_1}{\gamma}$, $\beta = \frac{\beta_1}{\gamma}$.

On a $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 1$,

$$x - y = \gamma[\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_2 - (\beta y_1 + (1 - \beta)x_2)]$$

et

$$g(x) - g(y) = \gamma[f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)y_2) - f(\beta y_1 + (1 - \beta)x_2)] \ .$$

D'où

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant k\|x - y\| \ .$$

<u>Démonstration de la proposition</u> 9. - Comme $x \in A(f)$, il résulte des lemmes 8 et 11 que la restriction de f à $\overline{C(x)}$ est une application affine nonexpansive de $\overline{C(x)}$ dans $\overline{C(x)}$. D'après le lemme 12, f se prolonge en une application g affine continue de $L(x)$ dans $L(x)$.

Posons

$$t_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f^i(x) \qquad \text{et} \qquad h(z) = g(z) - z \qquad \forall\, z \in L(x) \ .$$

On a :

$$h(t_n) = f(t_n) - t_n = \frac{1}{n}(f^{n+1}(x) - f(x)) \quad .$$

D'après le lemme 8, x est valeur d'adhérence de la suite $f^n(x)$; on a donc

$$0 \in \overline{h(L(x))} = h(L(x)) \quad .$$

Par suite, g a un point fixe y dans $L(x)$. L'inégalité $\|y - f^n(x)\| \leqslant \|y - x\|$, vérifiée pour tout n , montre que $\overline{C(x)}$ est borné, donc compact. Il existe alors une suite extraite de la suite t_n qui converge vers un point fixe de f .

Démonstration de la proposition 10. - Comme $x \in A(f)$, la restriction de f à $\overline{C(x)}$, qui est faiblement compact, est affine nonexpansive, donc faiblement continue. Et, d'après le théorème de Hukuhara [11], f a un point fixe.

II. Points fixes et vecteurs propres pour des applications complètement continues.

II.1. Applications et déplacements complètement continus.

Soit E un espace localement convexe (e. l. c.) séparé.

On dit qu'une application f d'un espace topologique X dans E est complètement continue (c. c.) si f est continue et $\overline{f(X)}$ compact.

Soit $X \subset E$; on dit qu'une application F de X dans E est un déplacement complètement continu (d. c. c.) si l'application f définie par $f(x) = x - F(x)$, $x \in X$, est c. c.

PROPOSITION 13. - Soit $X \subset F$ fermé, et soit F un d. c. c. de X dans E . Alors $F(X)$ est fermé ; de plus, si $K \subset E$ est compact, $F^{-1}(K)$ est aussi compact.

En effet, si $y \in \overline{F(X)}$, on a

$$y = \lim_{\mathfrak{U}} F(x_i) = \lim_{\mathfrak{U}} x_i - f(x_i) \quad ,$$

où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de points de X et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur I . Comme f est c. c., $f(x_i)$ converge vers z suivant $\mathfrak{U}$, et par suite

$$\lim_{\mathfrak{U}} x_i = y + z \in X \quad .$$

D'où

$$y = F(y + z) \in F(X) \quad .$$

Si $K \subset E$ est compact, $F^{-1}(K)$ est fermé. De plus, $F^{-1}(K) \subset f(X) + K$, puisque

$$x \in F^{-1}(K) \implies F(x) = x - f(x) \in K \implies x \in f(X) + K ,$$

ce qui montre que $F^{-1}(K)$ est compact.

PROPOSITION 14 (Théorème d'approximation). - Soient X un espace topologique, et f une application c. c. de X dans E.

Pour tout voisinage V de 0, il existe une famille finie a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de points de $f(X)$ et une application continue f_V de X dans $c(\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$ tels que, $\forall x \in X$, $f(x) - f_V(x) \in V$.

En effet, soit W un voisinage de 0, ouvert, convexe, symétrique, contenu dans V, et soit p sa jauge. Si

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_i + W ,$$

l'application f_V définie par

$$f_V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(x)\, a_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i(x)} \qquad \text{où} \quad q_i(x) = \max\{1 - p(f(x) - a_i) , 0\}$$

satisfait aux conditions de la proposition.

REMARQUE 15. - Si $X \subset E$ est symétrique par rapport à 0 et si f est impaire (c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$), on peut approcher f par des applications impaires du type précédent. Il suffit de poser $a_{-i} = -a_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et

$$f_V(x) = \frac{\sum_{i=-n}^{+n} q_i(x)\, a_i}{\sum_{i=-n}^{+n} q_i(x)} .$$

II.2. Le degré topologique.

Nous énonçons ici les principales propriétés du degré dont on trouvera les démonstrations dans [12].

Soient E un e. l. c. séparé, U un ouvert de E, U^* sa frontière, et soit F un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E. Pour tout $a \notin F(U^*)$, on peut définir un entier relatif $d(F, U, a)$ appelé <u>degré</u> de F sur U au point a et qui vérifie les propriétés suivantes :

(D_1) <u>Si</u> F <u>est l'application identique, on a</u> :

$$d(F, U, a) = 1 \quad \text{pour} \quad a \in U \qquad \text{et} \qquad d(F, U, a) = 0 \quad \text{pour} \quad a \notin U .$$

(D_2) <u>Si</u> $d(F, U, a) \neq 0$, <u>il existe</u> $x \in U$ <u>tel que</u> $F(x) = a$.

(D_3) <u>Soit</u> $h(t, x)$ <u>une application c. c. de</u> $[0, 1] \times \overline{U}$ <u>dans</u> E, <u>et soit</u> $a(t)$ <u>une application continue de</u> $[0, 1]$ <u>dans</u> E. <u>On pose</u> $H_t(x) = x - h(t, x)$. <u>Si</u> $\forall\, t \in [0, 1]$, $a(t) \notin H_t(U^*)$, <u>alors</u> $d(H_t, U, a(t))$ <u>reste constant quand</u> $t \in [0, 1]$.

(D_4) <u>Soient</u> $K = \{x \in U \,;\, F(x) = a\}$ <u>et</u> U_0 <u>un ouvert tel que</u> $K \subset U_0 \subset U$. <u>Alors</u>

$$d(F, U, a) = d(F, U_0, a) .$$

(D_5) <u>Soient</u> E' <u>un sous-espace vectoriel de</u> E, F <u>un d. c. c. de</u> $\overline{U}$ <u>dans</u> E', $a \in E'$ <u>et</u> $a \notin F(U^*)$. <u>On note</u> $U' = U \cap E'$ <u>et</u> F' <u>la restriction de</u> F <u>à</u> $\overline{U} \cap E'$. <u>Alors,</u>

$$d(F, U, a) = d(F', U', a) .$$

COROLLAIRE 16. - F <u>et</u> U <u>étant fixés, l'application</u> $a \to d(F, U, a)$ <u>est constante dans tout ouvert connexe disjoint de</u> $F(U^*)$.

C'est une conséquence évidente de (D_3).

COROLLAIRE 17. - <u>Soient</u> F <u>et</u> G <u>deux d. c. c. de</u> $\overline{U}$ <u>dans</u> E <u>et soit</u> V <u>un voisinage convexe de</u> 0 <u>tels que,</u> $\forall\, x \in U^*$, $F(x) - G(x) \in V$, <u>et que</u> $a + V \cap F(U^*) = \emptyset$. <u>Alors,</u>

$$d(F, U, a) = d(G, U, a) .$$

En effet, soit $h(t, x) = tf(x) + (1 - t)\, g(x)$; $h(t, x)$ est une application c. c. de $[0, 1] \times \overline{U}$ dans E. On pose

$$H_t(x) = x - h(t, x) = t\, F(x) + (1 - t)\, G(x) .$$

Il est évident que, $\forall\, t \in [0, 1]$, $a \notin H_t(U^*)$, et par suite

$$d(F, U, a) = d(G, U, a) .$$

REMARQUE 18. - Il résulte en particulier du corollaire 17 que $d(F, U, a)$ dépend uniquement des valeurs prises par F sur U^* et du point a.

II.3. Indice d'un point fixe.

Soient E un e. l. c. séparé, U un ouvert de E, et f une application c. c. de $\overline{U}$ dans E. Si $z \in U$ est un point fixe isolé de f, il existe un voisinage ouvert V de z contenu dans U tel que $\overline{V}$ ne contienne aucun autre point fixe de f. On pose alors $i(z) = d(F, V, 0)$; et d'après (D_4), $i(z)$ est indépendant du choix de V et définit l'indice du point z.

On dit qu'un point fixe $z \in U$ de f est essentiel si, $\forall V$ voisinage de z, $\exists W$ voisinage de 0 dans E tel que toute application c. c. g de $\overline{U}$ dans E vérifiant $f(x) - g(x) \in W$, $\forall x \in \overline{U}$, a un point fixe dans V.

PROPOSITION 19. - Tout point fixe de f dans U, isolé, dont l'indice n'est pas nul, est essentiel.

Si V est un voisinage de z contenu dans U tel que $\overline{V}$ ne contienne aucun autre point fixe, il existe un voisinage convexe W de 0 tel que $W \cap F(V^*) = \emptyset$. Et, pour toute application c. c. g de $\overline{U}$ dans E, telle que $f(x) - g(x) \in W$, $\forall x \in \overline{U}$, on a, d'après le corollaire 17,

$$i(z) = d(F, V, 0) = d(G, V, 0) \neq 0 .$$

Donc g a un point fixe dans V.

II.4. Quelques théorèmes généraux de points fixes.

Soit E un e. l. c. séparé.

THÉORÈME 20. - Soient U un ouvert de E, et f une application c. c. de $\overline{U}$ dans E. S'il existe $a \in U$ tel que, $\forall x \in U^*$ et $\forall \alpha > 1$,

$$f(x) \neq \alpha x + (1 - \alpha)a ,$$

alors f a un point fixe dans $\overline{U}$.

En effet, soit $h(t, x) = t(f(x) - a)$; $h(t, x)$ est une application c. c. de $[0, 1] \times \overline{U}$ dans E. On pose $H_t(x) = x - h(t, x)$.

Ou bien, $\forall t \in [0, 1]$, $a \notin H_t(U^*)$. Il en résulte, d'après (D_1) et (D_3), que

$$d(H_1, U, a) = d(H_0, U, a) = 1 .$$

Donc il existe $z \in U$ tel que $H_1(z) = z - f(z) + a = a$.

Sinon, il existe $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $z \in U^*$ tels que $a = H_t(z) = z - t(f(z) - a)$. D'où $t \neq 0$ et $f(z) = \frac{z + (1 - t)a}{t}$; ce qui exige $t = 1$.

COROLLAIRE 21. - Soient A un convexe fermé de E, et f une application c.c. de A dans E telle que $f(A^*) \subset A$. Alors f a un point fixe dans A.

En effet, si $\mathring{A} = \emptyset$, $A^* = A$ et $f(A) \subset A$. Comme $\overline{f(A)}$ est compact, il résulte du théorème de Hukuhara [11] que f a un point fixe.

Sinon, comme A est convexe, $\forall\, a \in \mathring{A}$, $\forall\, x \in A^*$, et $\forall\, \alpha > 1$,

$$f(x) \neq \alpha x + (1 - \alpha) a \quad ,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 20.

COROLLAIRE 22. - Soient U un voisinage ouvert de 0, et f une application c. c. de $\overline{U}$ dans E. Si f n'a pas de point fixe dans $\overline{U}$, il existe $z \in U^*$ et $\lambda > 1$ tels que $f(z) = \lambda z$.

C'est une conséquence évidente du théorème 20.

COROLLAIRE 23. - Soient E un espace vectoriel normé, U un voisinage ouvert de 0, et f une application c. c. de $\overline{U}$ dans E telle que, $\forall\, x \in U^*$,

$$\|f(x) - x\|^2 \geq \|f(x)\|^2 - \|x\|^2 \quad .$$

Alors f a un point fixe dans $\overline{U}$.

Il suffit d'appliquer le théorème 20 avec $a = 0$. Notons que, dans un espace préhilbertien, cette condition équivaut à, $\forall\, x \in U^*$,

$$(f(x)|x) \leq (x|x) \quad .$$

Remarque. - Une application c. c. f d'un convexe quelconque A dans lui-même n'a en général pas de point fixe, comme le montre l'exemple suivant : $A =]0, +\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

THÉORÈME 24. - Soient U un voisinage ouvert convexe symétrique de 0, et F un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E tel que, $\forall\, x \in U^*$ et $\forall\, 0 \leq \alpha \leq 1$,

$$F(x) \neq \alpha\, F(-x) \quad .$$

Alors $d(F, U, 0) \neq 0$.

En particulier, une application c. c. f de $\overline{U}$ dans E telle que, $\forall\, x \in U^*$, $f(-x) = -f(x)$ a un point fixe dans $\overline{U}$.

Démontrons d'abord les trois lemmes suivants :

LEMME 25 (BORSUK). - Soient E un espace de dimension finie une boule ouverte de centre 0, et F un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E tel que $0 \notin F(U^*)$ et que,

$$\forall\ x \in \overline{U} \qquad F(-x) = -F(x) \quad .$$

Alors $d(F\ ,\ U\ ,\ 0) \neq 0$.

On en trouvera une démonstration dans [9], p. 94.

LEMME 26. - *Soient* E *un espace de dimension finie,* U *un voisinage ouvert, convexe, symétrique de* 0 , *et* F *un d. c. c. de* $\overline{U}$ *dans* E *tel que* $0 \notin F(U^*)$ *et que,*

$$\forall\ x \in U^* \qquad F(-x) = -F(x) \quad .$$

Alors $d(F\ ,\ U\ ,\ 0) \neq 0$.

En effet, soient $f(x) = x - F(x)$ et $p(x)$ la jauge de U . On considère l'application g de $\overline{U}$ dans E définie par

$$\begin{cases} g(x) = p(x)\ f\left(\dfrac{x}{p(x)}\right) & \text{pour } p(x) \neq 0 \ , \\ g(x) = 0 & \text{pour } p(x) = 0 \ . \end{cases}$$

Il est évident que $G(x) = x - g(x)$ est un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E qui vérifie de plus :

$$G(x) = 0 \iff x = 0 \quad ;$$

$\forall\ x \in \overline{U}$, $G(-x) = -G(x)$, et, $\forall\ x \in U^*$, $G(x) = F(x)$.

Soit alors V une boule ouverte de centre 0 contenue dans U . La restriction de G à $\overline{V}$ est un d. c. c. de $\overline{V}$ dans E qui vérifie $0 \notin G(V^*)$ et, $\forall\ x \in \overline{V}$, $G(-x) = -G(x)$. Il résulte du lemme 25 que $d(G\ ,\ V\ ,\ 0) \neq 0$. Or, d'après (D_4) et la remarque 18, on a

$$d(F\ ,\ U\ ,\ 0) = d(G\ ,\ U\ ,\ 0) = d(G\ ,\ V\ ,\ 0) \neq 0 \quad .$$

LEMME 27. - *Conclusion identique à celle du lemme* 26, *en supposant seulement que* E *est un e. l. c. séparé.*

Soit V un voisinage convexe de 0 tel que $V \cap F(U^*) = \emptyset$. On sait, d'après la remarque 15, qu'il existe un sous-espace L de E de dimension finie, et une application c. c. f_V de $\overline{U}$ dans L telle que $\forall\ x \in \overline{U}$, $f(x) - f_V(x) \in V$, et que $\forall\ x \in U^*$, $f_V(-x) = -f_V(x)$.

Il résulte du corollaire 17 que le d. c. c. F_V associé vérifie

$$d(F\ ,\ U\ ,\ 0) = d(F_V\ ,\ U\ ,\ 0) \quad .$$

En appliquant (D_5) et le lemme 26 :

$$d(F_V\ ,\ U\ ,\ 0) = d(F_V\ ,\ U \cap L\ ,\ 0) \neq 0 \quad .$$

Démonstration du théorème 24. - Pour $t \in [0, 1]$, posons

$$H_t(x) = \frac{F(x) - t\,F(-x)}{1 + t} .$$

Il est évident que $0 \notin H_t(U^*)$ et que $h(t, x) = x - H_t(x)$ est une application c. c. de $[0, 1] \times \overline{U}$ dans E. D'autre part,

$$H_1(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2}$$

satisfait aux conditions du lemme 27.

D'où

$$d(F, U, 0) = d(H_0, U, 0) = d(H_1, U, 0) \neq 0 .$$

II.5. L'invariance du domaine et l'alternative de Fredholm dans un e. l. c. séparé.

THÉORÈME 28 (Invariance du domaine). - Soient E un e. l. c. séparé, U un ouvert de E, et F un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E.
Si F est injectif, F est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $F(\overline{U})$, et de plus $F(U)$ est ouvert dans E.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME 29. - Soient E un e. l. c. séparé, U un voisinage ouvert, convexe, symétrique de 0, et F un d. c. c. de $\overline{U}$ dans E.
Si F est injectif,

$$d(F, U, F(0)) \neq 0 .$$

En effet, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in \overline{U}$, on pose

$$H_t(x) = F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(\frac{-tx}{1+t}\right) .$$

Il est évident que $\forall\, t \in [0, 1]$, $0 \notin H_t(U^*)$ et que $h(t, x) = x - H_t(x)$ est une application c. c. de $[0, 1] \times \overline{U}$ dans E. D'autre part, $H_1(x) = F(\frac{x}{2}) - F(-\frac{x}{2})$ satisfait aux conditions du lemme 27.

D'où

$$d(F, U, F(0)) = d(F(x) - F(0), U, 0) = d(H_1, U, 0) \neq 0 .$$

Démonstration du théorème 28. - On sait, d'après la proposition 13, que F est une application fermée. Montrons que $F(U)$ est ouvert. Soient $a \in U$ et $b = F(a)$. Soit V un voisinage de a, ouvert, convexe, symétrique par rapport à a, contenu dans U. D'après le lemme 29, $d(F, V, b) \neq 0$, et comme $b \notin F(V^*)$, il existe un voisinage convexe W de b tel que $W \cap F(V^*) = \emptyset$. Il résulte du corollaire 16 que $\forall\, b' \in W$,

$$d(F, V, b') = d(F, V, b) \neq 0 ,$$

et donc

$$b' \in F(V) \subset F(U) .$$

Ce qui montre que $F(U)$ est ouvert.

THÉORÈME 30 (Alternative de Fredholm). - Soient E un e. l. c. séparé, et F une application linéaire injective de E dans E. S'il existe un ouvert U de E tel que la restriction de F à U soit un d. c. c., alors F est un isomorphisme de E dans E.

Ce théorème est une conséquence évidente du théorème 28.

Application à la détermination de points fixes essentiels :

THÉORÈME 31. - Soit E un espace vectoriel normé ; soient U un ouvert de E, et f une application c. c. de U dans E. Soit z un point fixe de f. On suppose que la différentielle $f'(z)$ existe, et n'admet pas 1 pour valeur propre.

Alors z est un point fixe isolé, d'indice non nul, donc essentiel.

Il est toujours possible de se ramener au cas où $z = 0$. Posons $\ell = f'(0)$. On voit facilement que la différentielle d'une application c. c. est un opérateur compact.

Par hypothèse, $L(x) = x - \ell(x)$ est une application linéaire injective, et sa restriction à tout ouvert borné de E est un d. c. c. D'après le théorème 30, L est un isomorphisme de E sur E ; donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall\, x \in E$, $\varepsilon\|x\| \leqslant \|x - \ell(x)\|$. Mais comme $\ell = f'(0)$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|x\| \leqslant \alpha \implies \|f(x) - \ell(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - \ell(x)\| .$$

Soit $V = \{x \in E ; \|x\| < \alpha\}$. 0 est le seul point fixe de f dans $\overline{V}$, puisque $x = f(x)$ entraîne $x = \ell(x)$, ce qui exige $x = 0$. D'après le corollaire 17 et le théorème 24,

$$i(0) = d(F, V, 0) = d(L, V, 0) \neq 0 .$$

II.6. Vecteurs propres.

THÉORÈME 32 (BIRKHOFF et KELLOG). - Soient E un espace vectoriel normé de dimension infinie, U une boule ouverte de centre 0, et f une application c. c.

de U^* dans E, telle que $0 \notin \overline{f(U^*)}$. Il existe alors $z \in U^*$ et $\rho > 0$ tels que $f(z) = \rho z$.

Pour démontrer ce théorème, nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME 33. – *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie, et soit S une sphère de E. Soient X un espace métrique, et $Y \subset X$ fermé. Toute application continue de Y dans S se prolonge en une application continue de X dans S.*

On en trouvera une démonstration dans [6].

Démonstration du théorème 32. – D'après le lemme 33, il existe une rétraction $r(x)$ de $\overline{U}$ dans U^* (qui prolonge l'application identique sur U^*).

Donc $g(x) = f(r(x))$ est une application c. c. de $\overline{U}$ dans E telle que : $0 \notin \overline{g(U)}$.

Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que $\overline{U} \cap \alpha\, \overline{g(U)} = \emptyset$. L'application $h(x) = \alpha\, g(x)$ est c. c. de $\overline{U}$ dans E, et n'a pas de point fixe dans $\overline{U}$.

D'après le corollaire 22, il existe $z \in U^*$ et $\lambda > 1$ tels que

$$h(z) = \alpha\, g(z) = \alpha\, f(z) = \lambda z .$$

Remarque. – Le théorème 32 est inexact dans un espace de dimension finie : il suffit de considérer $f(x) = -x$.

THÉORÈME 34. – *Soient E un e. l. c. séparé, K un compact de E tel que $0 \notin c(K)$, et C le cône convexe de sommet 0, engendré par K. Soit U un voisinage ouvert de 0 tel que $U \cap C$ soit borné, et soit f une application continue de $U^* \cap C$ dans K. Il existe alors $z \in U^* \cap C$ et $\rho > 0$ tels que $f(z) = \rho z$.*

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la démonstration :

LEMME 35. – *Soient E un e. l. c. séparé, et A un convexe de E. Soient X un espace métrique, et $Y \subset X$ fermé. Toute application continue de Y dans A se prolonge en une application continue de X dans A.*

On en trouvera une démonstration dans [6].

LEMME 36. – *Hypothèses et conclusion identiques à celles du théorème 34, mais en supposant de plus que E est normé et K convexe.*

En effet, $U^* \cap C$ est fermé dans $\overline{U}$, et donc, d'après le lemme 35, f se prolonge en une application continue g de $\overline{U}$ dans K. Comme $U \cap C$ est borné, il existe $\alpha > 0$ tel que $\overline{U} \cap C \cap \alpha K = \emptyset$. L'application $h(x) = \alpha\, g(x)$ est c. c. de $\overline{U}$ dans αK, et n'a pas de point fixe dans $\overline{U}$. D'après le corollaire 22, il existe $z \in U^*$ et $\lambda > 1$ tels que $h(z) = \lambda z$. Et comme $g(z) \in K$, $z \in U^* \cap C$ et $g(z) = f(z)$.

Démonstration du théorème 34. -- Soit V un voisinage de 0. D'après la proposition 14, il existe $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ et une application continue f_V de $U^* \cap C$ dans $c(\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$ tels que, $\forall\, x \in U^* \cap C$, $f(x) - f_V(x) \in V$. Par hypothèse, $0 \notin c(\bigcup_{i=1}^{n} a_i)$. Soit C_V le cône convexe engendré par les a_i. C_V est contenu dans un sous-espace de dimension finie de E. Donc la restriction de f_V à $U^* \cap C_V$ vérifie les conditions du lemme 36. Il existe alors $z_V \in U^* \cap C$ et $\rho_V > 0$ tels que $f_V(z_V) = \rho_V z_V$. D'où $f(z_V) - \rho_V z_V \in V$. Soit W un voisinage ouvert convexe symétrique de 0, contenu dans U, et soit p sa jauge. Si $V \subset W$, $p(f(z_V) - \rho_V z_V) < 1$, d'où l'on déduit

$$\rho_V < \frac{1 + p(f(z_V))}{p(z_V)} \quad .$$

Ce qui montre que ρ_V reste borné puisque $p(z_V) \geqslant 1$.

Soit alors $\mathcal{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de 0. On a

$$\lim_{\mathcal{U}} f(z_V) = y \in K \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathcal{U}} \rho_V = \rho > 0 \quad .$$

D'où

$$\lim_{\mathcal{U}} z_V = z = \frac{y}{\rho} \in U^* \cap C \quad .$$

Et comme f est continue, $f(z) = \rho z$.

On peut déduire, du théorème 34, le corollaire suivant qui généralise certains théorèmes connus de vecteur propre (en particulier ceux de [9] et [13]).

COROLLAIRE 37. - <u>Soient</u> E <u>un e. l. c. séparé,</u> C <u>un cône convexe saillant de sommet</u> 0, <u>et</u> K <u>un sous-ensemble compact de</u> C <u>avec</u> $0 \notin K$. <u>Soit</u> U <u>un voisinage ouvert de</u> 0 <u>tel que</u> $U \cap C$ <u>soit borné, et soit</u> f <u>une application continue de</u> $U^* \cap C$ <u>dans</u> K. <u>Il existe alors</u> $z \in U^* \cap C$ <u>et</u> $\rho > 0$ <u>tels que</u> $f(z) = \rho z$.

En effet, les hypothèses : C saillant et $0 \notin K$, entraînent que $0 \notin c(K)$.

Remarque sur le théorème 34. - Soit C' le cône (non convexe) engendré par K. On voit aisément que le théorème 34 tombe en défaut si f est définie et continue seulement sur $U^* \cap C'$.

III. Points fixes communs à une famille d'applications.

III.1. Points fixes communs à une famille d'applications nonexpansives.

Soient E un espace vectoriel normé, et K un convexe compact de E.

THÉORÈME 38 (BRODSKIJ et MILMAN). - Il existe un point fixe commun à toutes les isométries de K dans K.

THÉORÈME 39 (De MAAR). - Soit $\mathfrak{F}$ une famille d'applications nonexpansives de K dans K qui commutent deux à deux. Il existe un point fixe commun à toutes les applications de $\mathfrak{F}$.

Démontrons d'abord les deux lemmes suivants :

LEMME 40. - Soit $\rho = \operatorname{diam} K$. Si $\rho > 0$, il existe $u \in K$ tel que

$$\sup_{x \in K} \|x - u\| < \rho \quad .$$

Soient x_1, $x_2 \in K$ tels que $\|x_1 - x_2\| = \rho$. Considérons la famille des parties A de K qui contiennent x_1, x_2 et telles que

$$x , y \in A \quad \text{et} \quad x \neq y \implies \|x - y\| = \rho \quad .$$

Il est évident qu'elle admet un élément maximal $\{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\}$. Posons

$$u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad .$$

On vérifie facilement que $\sup_{x \in K} \|x - u\| < \rho$.

LEMME 41. - Soient $F \subset K$ fermé, et $\mu = \operatorname{diam} F > 0$. Il existe $0 < \varepsilon < \mu$ tel que

$$F(\varepsilon) = \bigcap_{x \in F} B(x , \mu - \varepsilon) \cap K \neq \emptyset \quad .$$

où $B(x , \mu - \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon $\mu - \varepsilon$. De plus, $F(\varepsilon)$ est un convexe compact et $F(\varepsilon) \subset K$, $F(\varepsilon) \neq K$.

En effet, soit $K_0 = \overline{c(F)}$. Il est évident que diam K_0 = diam $F = \mu$. D'après le lemme 40, il existe $u \in K_0$ tel que

$$\mu' = \sup_{x \in K_0} \|x - u\|$$

vérifie $\mu' < \mu$. Posons $\varepsilon = \mu - \mu' > 0$. On voit aisément que $u \in F(\varepsilon)$. Enfin, il existe $x , y \in F$ tels que $\|x - y\| = \mu$; d'où $x , y \notin F(\varepsilon)$.

Démonstration du théorème 38. - Soit $\mathfrak{F}$ la famille des isométries de K dans K , et soit

$$\mathcal{A} = \{X \subset K \ ; \ X \neq \emptyset \text{ , convexe, compact tel que } f(X) \subset X \ , \ \forall f \in \mathfrak{F}\} \ .$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est non vide, inductif vers le bas, et, d'après le lemme de Zorn, admet un élément minimal X_0 . Comme f est une isométrie, $f(X_0) = X_0$. Si diam $X_0 > 0$, on applique le lemme 41 à $K = F = X_0$, et on vérifie que $X_0(\varepsilon) \in \mathcal{A}$. Ce qui est absurde, puisque $X_0(\varepsilon) \subset X_0$, $X_0(\varepsilon) \neq X_0$. Donc X_0 **est réduit à un point.**

Démonstration du théorème 39. - Soit X_0 un élément minimal de $\mathcal{A}$, et soit

$$\mathcal{B} = \{Y \subset X_0 \ ; \ Y \neq \emptyset \text{ , compact, et tel que } f(Y) \subset Y \ , \ \forall f \in \mathfrak{F}\} \ .$$

Il est évident que $\mathcal{B}$ est non vide, inductif vers le bas, et, d'après le lemme de Zorn, admet un élément minimal Y_0 . Il résulte de la minimalité de Y_0 que : $f(Y_0) = Y_0$, $\forall f \in \mathfrak{F}$. Si diam $Y_0 > 0$, on applique le lemme 41 à $K = X_0$, et $F = Y_0$, et on vérifie que $Y_0(\varepsilon) \in \mathcal{A}$. Ce qui est absurde puisque $Y_0(\varepsilon) \subset X_0$, $Y_0(\varepsilon) \neq Y_0$. Donc Y_0 est réduit à un point.

III.2. Points fixes communs à une famille d'applications affines et moyennes invariantes.

THÉORÈME 42 (MARKOFF-KAKUTANI). - Soient E un e. v. t. séparé, K un convexe compact non vide de E , Γ un semi-groupe commutatif d'applications affines continues de K dans K . Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$, $\forall u \in \Gamma$.

On trouvera une démonstration dans [2], p. 114.

THÉORÈME 43 (KAKUTANI). - Soient E un e. l. c. séparé, K un convexe compact de E , et Γ un groupe équicontinu d'applications affines de K dans K . Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$, $\forall u \in \Gamma$.

Il est intéressant de relier ces résultats à l'existence d'une moyenne invariante, en suivant une méthode développée par DAY [4].

Dans la suite, E désigne un e. l. c. séparé, et K un convexe compact de E.

Soient Γ un espace topologique, B l'espace des fonctions numériques continues et bornées sur Γ, et B' son dual topologique, muni de la topologie faible. On désigne par $M(\Gamma)$ l'ensemble des moyennes sur Γ, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires μ positives sur B telles que $\mu(1) = 1$. Il est évident que $M(\Gamma)$ est un convexe compact.

PROPOSITION 44. - L'ensemble des moyennes discrètes est partout dense dans $M(\Gamma)$.

En effet, soit B_0 l'espace des fonctions numériques bornées sur Γ. Toute moyenne $\mu \in M(\Gamma)$ se prolonge en une forme linéaire positive sur B_0, puisque $B_0 = B + (B_0)_+$. On vérifie alors que μ est limite de moyennes discrètes de la forme $\sum \mu(1_{X_i})\, \varepsilon_{x_i}$, où X_i est une partition finie de Γ et $x_i \in X_i$.

PROPOSITION 45. - Toute application continue f de Γ dans K se prolonge de façon unique en une application affine continue $\hat{f}$ de $M(\Gamma)$ dans K telle que $\hat{f}(\varepsilon_x) = f(x)$, $\forall\, x \in \Gamma$.

On munit E de la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$, et on le plonge dans son complété E'^*. L'application $\hat{f}$ de $M(\Gamma)$ dans E'^* définie par

$$\hat{f}(\mu)\, \varphi = \mu(\varphi \circ f) \qquad \forall\, \mu \in M(\Gamma), \quad \forall\, \varphi \in E'$$

est le prolongement cherché.

Soit Γ un semi-groupe topologique (c'est-à-dire que l'application

$$(x, y) \to x.y$$

est continue). Pour tout $s \in \Gamma$ et $f \in B$, soit ${}_sf$ la fonction $x \to f(sx)$. Pour tout $\mu \in M(\Gamma)$, l'application $f \in B \to \mu({}_sf)$ est encore une moyenne que l'on note ${}_s\mu$. On dit que $\mu \in M(\Gamma)$ est invariante à gauche si ${}_s\mu = \mu$, $\forall\, s \in \Gamma$.

Exemples. - Tout semi-groupe topologique commutatif possède une moyenne invariante à gauche (voir [2], p. 115) ; il en est de même pour tout groupe compact (c'est la mesure de Haar).

PROPOSITION 46. - Soit Γ un semi-groupe topologique d'applications affines continues de K dans K. On suppose que Γ admet une moyenne invariante à gauche et qu'il existe $a \in K$ tel que l'application $u \in \Gamma \to u(a) \in K$ soit continue. Alors il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$, $\forall\, u \in \Gamma$.

En effet, l'application $u \to f(u) = u(a)$ se prolonge, d'après la proposition 45, en une application affine continue $\hat{f}$ de $M(\Gamma)$ dans K. On a alors :

$$\hat{f}({}_s\mu) = s(\hat{f}(\mu)) \qquad \forall\, s \in \Gamma \quad \text{et} \quad \forall\, \mu \in M(\Gamma) \ .$$

Cette relation est évidente lorsque μ est une moyenne discrète, et, par continuité, on la vérifie pour toute moyenne. On en déduit que, si μ est une moyenne invariante à gauche, $x = \hat{f}(\mu)$ est un point fixe commun à tous les $s \in \Gamma$.

Démonstration du théorème 43. - L'ensemble Σ des applications continues de K dans K , muni de la topologie de la convergence uniforme sur K , constitue un semi-groupe topologique. D'autre part, $\Gamma \subset \Sigma$ est un groupe relativement compact, d'après le théorème d'Ascoli. Il est alors évident que $\overline{\Gamma}$ est un groupe compact, et, d'après la proposition 46, il existe $x \in K$ tel que $u(x) = x$, $\forall\, u \in \Gamma$.

Remarque. - Le théorème 43 devient inexact si l'on suppose seulement que Γ est un semi-groupe. Il suffit de considérer $K = [0\ ,\ 1]$ et Γ le semi-groupe équicontinu engendré par les applications $f(x) = \frac{1}{2}x$ et $g(x) = 1 - x$. On en déduit, en particulier, qu'il n'existe pas, en général, de mesure invariante sur un semi-groupe compact.

III.3. Points fixes communs à une famille de fonctions holomorphes.

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}$.

THÉORÈME 47 (SHIELDS). - Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications continues de Δ dans Δ , holomorphes dans $\mathring{\Delta}$ et qui commutent deux à deux. Alors il existe $z \in \Delta$ tel que $f(z) = z$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$.

Le lemme suivant sera utile dans la démonstration.

LEMME 48 (DENJOY et WOLFF). - Soit f une fonction holomorphe de $\mathring{\Delta}$ dans $\mathring{\Delta}$. Si f n'est pas homographique, il existe $\alpha \in \Delta$ tel que, $\forall\, z \in \mathring{\Delta}$,

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(z) = \alpha \ .$$

On en trouvera une démonstration dans [5], [14] et [15].

Démonstration du théorème 47. - D'après le principe du maximum, on peut toujours se ramener au cas où $f(\mathring{\Delta}) \subset \mathring{\Delta}$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$. Si f n'est pas homographique, on a

$$\forall\, g \in \mathcal{F} \qquad g(\alpha) = g(\lim_{n\to+\infty} f^n(z)) = \lim_{n\to+\infty} f^n(g(z)) = \alpha \ .$$

Si f est homographique, et n'est pas l'application identique, on peut poser :

$$f(z) = \alpha\,\frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \qquad \text{où } |\alpha| = 1 \ \text{ et } \ |a| < 1 \ .$$

Il en résulte que f a, ou bien un point fixe unique dans Δ , qui est alors un point fixe commun à la famille $\mathfrak{F}$, ou bien deux points fixes dans Δ^* . Dans ce dernier cas, on considère la fonction homographique p qui applique Δ sur le $\frac{1}{2}$ plan $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, et les points fixes sur 0 et ∞ . On en déduit que

$$g(z) = p\ f\ p^{-1}(z) = kz \qquad \text{avec} \quad k > 0 \ , \quad k \neq 1 \quad .$$

Ce qui montre que les itérées de f convergent vers l'un des points fixes de f .

Remarque. - On ne sait pas si deux applications continues de $[0\ ,\ 1]$ dans lui-même qui commutent ont en général un point fixe commun. Sur cette question, on pourra consulter [3] et [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAXTER (Glen). - On fixed points of the composite of commuting functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 851-855.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Livre 5 : Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[3] COHEN (Haskell). - On fixed points of commuting functions, Proc. Amer. math. Soc., t. 15, 1964, p. 293-296.

[4] DAY (Mahlon M.). - Fixed-point theorems for compact convex sets, Illinois J. of Math., t. 5, 1961, p. 585-590.

[5] DENJOY (Arnaud). - Sur l'itération des fonctions analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 182, 1926, p. 255-257.

[6] DUGUNDJI (J.). - An extension of Tietze's theorem, Pacific J. of Math., t. 1, 1951, p. 353-367.

[7] EDELSTEIN (Michael). - On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London math. Soc., t. 37, 1962, p. 74-79.

[8] EDELSTEIN (Michael). - On nonexpansive mappings of Banach spaces, Proc. Cambridge phil. Soc., t. 60, 1964, p. 439-447.

[9] KRASNOSEL'SKIJ (M. A.). - Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. - New York, Pergamon Press, 1964 (International Series of Monographs on pure and applied Mathematics, 45).

[10] LERAY (Jean). - La théorie des points fixes et ses applications en analyse, Proceedings of the International congress of mathematicians [1950, Cambridge], p. 202-208. - Providence, American mathematical Society, 1952.

[11] MAYER (Claude). - Points invariants dans les espaces localement convexes, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, t. 4, 1964/65, n° 10, 11 p.

[12] NAGUMO (Mitio). - A theory of degree of mappings based on infinitesimal analysis ; Degree of mapping in convex linear topological spaces, Amer. J. of Math., t. 73, 1951, p. 485-511.

[13] SCHAEFFER (H. H.). - On nonlinear positive operators, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 847-860.

[14] WOLFF (Julius). - Sur l'itération des fonctions holomorphes dans une région et dont les valeurs appartiennent à cette région, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 182, 1926, p. 42-43.

[15] WOLFF (Julius). - Sur l'itération des fonctions bornées, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 182, 1926, p. 200-201.