Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

PHILIPPE COURRÈGE

Mesures sur les espaces vectoriels topologiques faibles et mesures de Radon ; compactifié affine

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 2 (1963), exp. n° 5, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1963__2__A4_0>

MESURES SUR LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES FAIBLES ET MESURES DE RADON ; COMPACTIFIÉ AFFINE,

par Philippe COURRÈGE

Introduction. - Etant donnés deux espaces vectoriels E et F en dualité, le présent exposé a trois objectifs :

- D'une part, étudier les relations entre les "mesures d'ensembles cylindriques" sur E introduites par GEL'FAND et VILENKIN (cf. [5], et n° 3.4 ci-dessous), et les formes linéaires positives (appelées intégrales affines) sur l'espace vectoriel réticulé $b(E)$ des fonctions affines par morceaux, continues, bornées sur E (n° 2.1 et n° 2.3) ; les relations obtenues sont exprimées par le théorème 3.1 (n° 3.5).

- D'autre part, introduire un procédé de compactification (§ 1) fournissant le compactifié affine $\hat{E}$ de E (n° 4.1) et permettant d'identifier les intégrales affines sur E aux mesures de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace compact $\hat{E}$ (n° 4.1, théorème 4.1).

- Enfin, utiliser le compactifié $\hat{E}$ de E pour étudier le support affine des mesures cylindriques, support introduit de façon identique et posant des problèmes analogues à celui des mesures coniques de Choquet (§ 5).

L'exposé est divisé en paragraphes, et chaque paragraphe en numéros à deux indices dont le premier rappelle le paragraphe.

Ce travail a été fait en collaboration avec MM. G. CHOQUET et J.-M. BONY .

§ 1. L'espace compact rendant continues à l'infini les fonctions d'un espace vectoriel de fonctions numériques bornées (1).

Etant donné un espace vectoriel réticulé A , de fonctions numériques bornées sur un ensemble E , le problème est de plonger E dans un espace compact K de telle sorte que les fonctions de A se prolongent en des fonctions de $C(K)$.

Ce problème est résolu par le théorème suivant :

---

(1) Les résultats de ce paragraphe ne seront utilisés qu'aux § 4 et § 5, et sont indépendants du reste de l'exposé ; à ce propos, on pourra consulter l'article de BAUER [1].

1.1 THÉORÈME 1.1. - Soient E un ensemble, et A un espace vectoriel de fonctions numériques bornées sur E, séparant les points de E et contenant la fonction 1.

Il existe un espace compact K, et un seul, à un isomorphisme près, ayant les propriétés suivantes :

(a) $E \subset K$, et E est dense dans K ;

(b) Toute fonction $f \in A$ se prolonge (d'une seule manière d'après (a)) en une fonction $\hat{f} \in C(K)$;

(c) Les fonctions $\hat{f}$, $f \in A$, séparent les points de K.

DÉFINITION 1.1. - Nous désignerons par $\hat{E}(A)$, ou seulement $\hat{E}$, un espace compact K ayant les propriétés (a), (b), (c) du théorème 1.1 ; $\hat{E}(A)$ sera appelé : l'espace compact rendant continues à l'infini les fonctions de A.

Cette terminologie est empruntée au cas où E est un espace vectoriel, et A l'espace des fonctions affines par morceaux sur E (cf. nº 2.1 et nº 4.3).

Remarquons que la propriété (c) entraîne que la topologie de K est la moins fine des topologies sur K rendant continues les fonctions $\hat{f}$ $(f \in A)$.

Soit $P(A)$ l'ensemble des formes linéaires positives de masse totale égale à 1 sur l'espace ordonné A. Puisque A contient les constantes, tout élément de $P(A)$ est une forme linéaire continue sur l'espace normé A (pour la norme uniforme) ; $P(A)$ est donc un sous-ensemble de la boule unité de l'espace normé A', et, pour la topologie faible $\sigma(A', A)$, $P(A)$ est fermé, donc compact comme la boule unité de A'. L'application $x \to \varepsilon_x$ (où ε_x est la mesure ponctuelle en $x \in E$) est une injection de E dans $P(A)$, puisque A sépare les points de E ; plongeons E dans $P(A)$ au moyen de cette injection, et soit $\hat{E}$ l'adhérence de E dans $P(A)$; $\hat{E}$ est un espace compact qui répond à la question. En effet, pour tout $f \in A$, posons

$$\hat{f}(\mu) = \mu(f) \qquad \text{pour tout } \mu \in P(A) ;$$

$\hat{f}$ prolonge f $(\hat{f}(\varepsilon_x) = f(x)\ , \ \forall\, x \in E)$ et $\hat{f} \in C(P(A))$ par définition de la topologie faible ; enfin les $\hat{f}$ séparent les points de $P(A)$, donc ceux de $\hat{E}$.

Soit maintenant K un autre espace compact ayant les propriétés (a), (b), (c), et, pour tout $y \in K$ et $f \in A$, soit

$$\mu_y(f) = \varepsilon_y(\hat{f}) = \hat{f}(y) .$$

On vérifie que l'application $y \to \mu_y$ est un homéomorphisme de K sur $\hat{E}$ laissant E invariant, d'où l'unicité.

1.2 Cas où A est réticulé.

LEMME 1.1. - Si A est réticulé, l'ensemble $\hat{A}$ des $\hat{f}$, où f décrit A, est aussi réticulé et (théorème de Stone) partout dense dans $C(\hat{E})$.

Si μ est une forme linéaire positive sur A, μ induit sur $\hat{A}$ une forme linéaire positive ν ; puisque $\hat{A}$ contient les constantes, ν est continue pour la norme uniforme ; donc, puisque $\hat{A}$ est dense dans $C(\hat{E})$, ν se prolonge en une mesure de Radon $\hat{\mu}$ sur $\hat{E}$; enfin, $\hat{\mu}$ est positive, car $\hat{A}$ étant réticulé, $\hat{A}^+$ est dense dans $C^+(\hat{E})$.

D'où :

THÉORÈME 1.2. - Soient E un ensemble, et A un espace vectoriel réticulé de fonctions numériques bornées sur E, séparant les points de E et contenant les fonctions constantes.

Pour toute mesure de Radon positive ν sur l'espace compact $\hat{E}$ (définition 1.1, n° 1.1), et tout $f \in A$, posons

$$\overline{\nu}(f) = \nu(\hat{f}) ,$$

où $\hat{f}$ est le prolongement de f à $\hat{E}$ (propriété (b), théorème 1.1) ; $\nu \to \overline{\nu}$ est alors un isomorphisme (pour les structures de cônes ordonnés) du cône $\mathfrak{M}^+(\hat{E})$ des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur $\hat{E}$ sur le cône des formes linéaires positives sur A.

Si μ est une forme linéaire positive sur A, on désignera par $\hat{\mu}$ la mesure de Radon positive sur $\hat{E}$, définie par

$$\hat{\mu}(\hat{f}) = \mu(f) , \qquad \forall f \in A$$

(ou encore $\overline{\hat{\mu}} = \mu$).

1.3 PROPOSITION 1.1. - Soient E_1, E_2 deux ensembles, A_1, A_2 des espaces vectoriels réticulés de fonctions numériques bornées sur E_1 et E_2 respectivement, contenant les constantes et séparant les points, et Φ une application de E_1 dans E_2 telle que

$$f \in A_2 \Longrightarrow f \circ \Phi \in A_1 .$$

Alors :

(1) Φ se prolonge d'une seule manière en une application $\hat{\Phi}$ de $\hat{E}_1(A_1)$ dans $\hat{E}_2(A_2)$; et on a

$$\widehat{f \circ \Phi} = \hat{f} \circ \hat{\Phi} \qquad \text{pour tout } f \in A_2 .$$

En outre, si Φ est surjective, il en est de même de $\hat{\Phi}$.

(2) Si θ_1 est une forme linéaire positive sur A_1 , et si $\theta_2 = \Phi(\theta_1)$ $[\theta_2(f) = \theta_1(f \circ \Phi) \; , \; \forall f \in A_2]$,

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\Phi}(\hat{\theta}_1) \; .$$

(3) Propriété de transitivité standard.

La structure uniforme de l'espace compact $\hat{E}_i(A_i)$ $(i = 1 \; , \; 2)$ est la moins fine de celles qui rendent uniformément continues les fonctions $\hat{g}$ où $g \in A_i$; soit alors $f \in A_2$;

$$\hat{f} \circ \Phi = f \circ \Phi \in A_1 \; ,$$

donc $\hat{f} \circ \Phi$ est uniformément continue lorsque E_1 est muni de la structure uniforme induite par celle de $\hat{E}_1(A_1)$; ceci étant vrai pour tout $f \in A_2$, Φ est uniformément continue de E_1 dans $\hat{E}_2(A_2)$, d'où le prolongement (le caractère réticulé de A_1 et A_2 n'intervient pas ici), et la relation $\widehat{f \circ \Phi} = \hat{f} \circ \hat{\Phi}$. Si Φ est surjective, $E_2 = \hat{\Phi}(E_1)$ est dense dans l'espace compact $\hat{\Phi}(\hat{E}_1)$, donc

$$\hat{E}_2 = \hat{\Phi}(\hat{E}_1) \; .$$

Enfin, (2) réclame une simple vérification, compte tenu du lemme 1.1 , ainsi que la propriété de transitivité

$$\widehat{\Phi \circ \Psi} = \hat{\Phi} \circ \hat{\Psi} \; .$$

§ 2. Intégrales affines sur un espace localement convexe séparé.

Dans ce paragraphe, on introduit d'abord l'espace réticulé $b(E)$ des fonctions affines par morceaux, bornées (n° 2.1), puis les intégrales affines qui sont des formes linéaires positives sur $b(E)$ (n° 2.3).

2.1 Les fonctions affines par morceaux.

DÉFINITION 2.1. - Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé (en abrégé ELC). Nous désignerons [2] par $a(E)$ (resp. $h(E)$) le sous-espace vectoriel réticulé de l'espace $C(E)$ des fonctions continues sur E engendré par l'ensemble des formes affines (resp. linéaires) continues sur E , et par $b(E)$ le sous-espace réticulé de $a(E)$ formé des fonctions bornées de $a(E)$. Les éléments de $a(E)$ (resp. $h(E)$) seront appelés fonctions affines (resp. linéaires)

---

[2] Conformément aux notations de G. CHOQUET dans son cours de Topologie et théorie des fonctions, de l'hiver 1962/63.

par morceaux.

Cette terminologie est justifiée par la propriété (β) ci-dessous des éléments de $a(E)$:

PROPOSITION 2.1. - Si $f \in C(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(α) $f \in a(E)$;

(β) Il existe un ensemble fini $\{a_1 , \dots , a_n\}$ de formes affines continues sur E tel que :

$$\forall\, x \in E \ , \ \exists\, i \ , \ f(x) = a_i(x) \ ;$$

(γ) Il existe deux suites finies $a_1 , \dots , a_m$, $b_1 , \dots , b_n$ de formes affines continues sur E telles que

$$f = \sup_{1 \leq i \leq m} (a_i) - \sup_{1 \leq j \leq n} (b_j) \ .$$

En effet, d'abord l'ensemble des f ayant la propriété (β) est un espace réticulé et contient les formes affines ; donc (α) $\Longrightarrow$ (β) ; ensuite (γ) $\Longrightarrow$ (α). Il reste à montrer que (β) $\Longrightarrow$ (γ) . Pour cela, si f a la propriété (β), posons

$$h = \sum_{i,j} \sup(a_i , a_j) \qquad \text{et} \qquad g = f + h$$

(où les a_i sont les formes affines intervenant dans (β)). On a $f = g - h$, et on vérifie que g et h sont des fonctions convexes, affines par morceaux. On conclut en utilisant le fait que toute fonction convexe continue est enveloppe supérieure des formes affines qui lui sont inférieures.

Des équivalences analogues ont lieu pour $h(E)$ (en remplaçant les formes affines par des formes linéaires).

2.2 Nous utiliserons aussi les propriétés suivantes des fonctions affines par morceaux :

(a) Si $f \in b(E)$, $\lim_{\alpha \to +\infty} f(\alpha x)$ existe pour tout $x \in E$; autrement dit, une fonction affine par morceaux, bornée, a des limites à l'infini sur toute droite de E. En effet, la propriété (β) (proposition 2.1) implique que, pour α assez grand, $f(\alpha x) = \text{Cte}$.

(b) Si $f \in a(E)$, $\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} f(\alpha x)$ existe pour tout $x \in E$.

(c) Si E_1 et E_2 sont des ELC , et Λ une application linéaire continue de E_1 dans E_2 , alors, pour tout $f \in b(E_2)$, $f \circ \Lambda \in b(E_1)$.

(d) $a(E) = b(E) \oplus h(E)$. En effet, il suffit de remarquer, en utilisant la propriété (γ) ci-dessus que, pour tout $x \in E$,

$$\inf_{1\leq i\leq n} (\alpha_i) < \sup_{1\leq i\leq n} (\alpha_i + \ell_i(x)) - \sup_{1\leq i\leq n} (\ell_i(x)) \leq \sup_{1\leq i\leq n} \alpha_i ,$$

où les ℓ_i sont des formes linéaires continues sur E, et les α_i des nombres réels.

2.3 Intégrales affines sur un ELC. Exemples.

DÉFINITION 2.2. - Si E est un ELC, on appelle intégrale affine sur E toute forme linéaire positive sur l'espace vectoriel réticulé $b(E)$ des fonctions affines par morceaux, bornées sur E (cf. n° 2.1).

Soient E_1 et E_2 deux ELC, Φ une application linéaire continue de E_1 dans E_2, et θ_1 une intégrale affine sur E_1. Si, pour tout $f \in b(E_2)$, on pose

$$\theta_2(f) = \theta_1(f \circ \Phi)$$

($f \circ \Phi \in b(E_1)$ d'après la propriété (c), n° 2.2), on définit une intégrale affine θ_2 sur E_2 appelée image de θ_1 par Φ et notée $\Phi(\theta_1)$.

EXEMPLE 1 : Cas où E est de dimension finie ; intégrale affine associée à une mesure de Radon. - Si E est de dimension finie, sa topologie d'ELC est localement compacte. Soit μ une mesure de Radon positive et bornée sur E, et, pour tout $f \in b(E)$, $\overline{\mu}(f) = \int f\, d\mu$. D'une part, $\overline{\mu}$ est une intégrale affine sur E que nous appellerons intégrale affine associée à la mesure de Radon μ sur E. D'autre part, l'application $\mu \to \overline{\mu}$ est une injective : en effet, les fonctions affines par morceaux à support compact forment, sur chaque compact K de E, un espace vectoriel réticulé contenant les constantes et séparant les points de K, donc, en vertu du théorème de Stone, sont denses dans $\mathcal{K}(E)$ pour la convergence uniforme. L'application injective $\mu \to \overline{\mu}$ permet donc d'identifier les mesures de Radon positives et bornées à un sous-ensemble (qui est un cône convexe) de l'ensemble des intégrales affines sur E. Ce sous-ensemble n'est jamais identique à l'ensemble des intégrales affines, ainsi que le montre l'exemple 2 ci-dessous.

On a, en outre, la caractérisation suivante des intégrales affines associées à des mesures de Radon sur E :

LEMME 2.1. - Pour qu'une intégrale affine θ, sur l'espace de dimension finie E, soit associée à une mesure de Radon sur E, il faut et il suffit que, pour toute suite (f_n) de fonctions de $b(E)$ décroissant vers zéro simplement,

$$\inf_n \theta(f_n) = 0$$

(autrement dit, que θ soit une intégrale de Daniell).

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. En effet, d'une part, d'après ce qui a été vu ci-dessus, la restriction de θ à l'espace des fonctions de $b(E)$ à support compact définit une mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée ν sur E. D'autre part, soient $f \in b(E)$, $f \geqslant 0$, (k_n) une suite croissante de fonctions de $b(E)$ à support compact telle que

$$\sup_n k_n = \|f\|_\infty \qquad \text{et} \qquad h_n = \inf(k_n, f) .$$

(h_n) est une suite croissante de fonctions de $b(E)$ à support compact, et $f = \sup_n h_n$; donc :

$$\begin{aligned} \theta(f) = \theta(\sup_n h_n) &= \theta(f - \inf_n (f - h_n)) \\ &= \theta(f) - \inf_n \theta(f - h_n) \quad \text{d'après l'hypothèse} \\ &= \sup_n \theta(h_n) \\ &= \sup_n \nu(h_n) \quad \text{par définition de } \nu \\ &= \nu(\sup_n h_n) = \nu(f) . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

EXEMPLE 2 : Une intégrale affine "portée par l'infini". - Soient E un ELC et x un élément $\neq 0$ de E. Pour chaque $f \in b(E)$, posons

$$\theta(f) = \lim_{\alpha \to +\infty} f(\alpha x)$$

(cette limite existe, cf. 2.2, propriété (a)). θ est une intégrale affine sur E ; θ est non nulle, puisque $\theta(1) = 1$; et cependant, dans le cas où E est de dimension finie,

$$\theta(f) = 0 \qquad \text{pour tout } f \in b(E) \cap \mathcal{K}(E) ;$$

autrement dit, θ n'est pas associée à une mesure de Radon sur E.

On voit bien, de par sa définition, que θ est "portée par l'infini" ; nous donnerons, au paragraphe 4, une signification précise à ce vocable en introduisant, pour E, un ensemble convenable de points à l'infini [cf. n° 4.3]. Remarquons seulement, pour l'instant, toujours dans le cas où E est de dimension finie, que, dans l'espace vectoriel réticulé des formes linéaires relativement bornées sur $b(E)$ (cf. [2], chapitre II, § 2), θ est étrangère à toute intégrale affine μ associée à une mesure de Radon μ sur E (Exemple 1). En effet, si

$$\nu = \inf (\theta , \overline{\mu}) \quad \text{et} \quad f \in b(E) , \quad f \geqslant 0 ,$$

on a

$$\nu(f) = \inf_{\substack{g,h\geqslant 0 \\ g+h=f}} (\theta(g) + \overline{\mu}(h))$$

(cf. [2], chapitre II, § 2, page 36, formule (2)).

Soit alors (k_n) une suite croissante de fonctions de $b(E)$ à support compact telles que $\|f\|_\infty = \sup_n k_n$. On a

$$0 \leqslant \nu(f) \leqslant \inf_n (\theta(g_n) + \overline{\mu}(h_n))$$

où $g_n = \inf (f , k_n)$ et $h_n = f - g_n$. D'où $\nu(f) = 0$, puisque $\theta(g_n) = 0$ pour tout n , et $\inf \overline{\mu}(h_n) = 0$, puisque la suite (h_n) décroît vers zéro et reste bornée par f .

3. Intégrales affines et mesures cylindriques sur un ELC faible.

3.1 Systèmes projectifs de mesures de Radon.

DÉFINITION 3.1. - Soient T un ensemble quelconque, Δ_T l'ensemble des parties finies de T , et, pour tout couple U , V d'éléments de Δ_T tels que $U \subset V$, Λ_{UV} la projection de R^V sur R^U . On appelle système projectif de mesures de Radon associé à l'espace produit R^T , une famille $(\mu_U)_{U\in\Delta_T}$ où, pour chaque $U \in \Delta$, μ_U est une mesure de Radon positive et bornée sur l'espace localement compact R^U , telle que :

(P) $\qquad$ Pour tous $U , V \in \Delta_T$, $U \subset V \Longrightarrow \Lambda_{UV}(\mu_V) = \mu_U$.

Remarque. - On pourrait définir de même un système projectif sur un produit $\prod_{t\in T} E_t$, où, pour chaque $t \in T$, E_t est un espace localement compact.

Exemple fondamental : théorème de Kolmogorov. - Ce théorème affirme que, si $(\mu_U)_{U\in\Delta_T}$ est un système projectif de mesures de Radon associé à l'espace produit

R^T, et si, pour chaque $U \in \Delta_T$, Λ_U est la projection de R^T sur R^U, alors il existe une mesure (σ-additive) positive bornée sur la tribu $\mathcal{B}$ sur R^T engendrée par les projections Λ_U $(U \in \Delta)$ (tribu engendrée par les "cylindres à base finie"), et une seule, telle que, pour tout $U \in \Delta_T$, $\Lambda_U(\mu) = \mu_U$. La mesure μ ainsi introduite est appelée limite projective du système projectif $(\mu_U)_{U \in \Delta_T}$.
On trouvera ci-dessous (n° 5.1) une démonstration de ce théorème utilisant le compactifié affine.

Si on munit R^T de la topologie faible associée à l'ensemble des projections $\Lambda\{t\}$ $(t \in T)$, R^T devient un ELC, E. Soient alors $(\mu_U)_{U \in \Delta_T}$ un système projectif de mesures de Radon, et μ sa limite projective. Pour chaque $f \in b(E)$, f est $\mathcal{B}$-mesurable (3) et bornée ; donc $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$. Si on pose

$$\overline{\mu}(f) = \int f \, d\mu \qquad \text{pour tout } f \in b(E),$$

$\overline{\mu}$ est une intégrale affine sur E. On remarquera, de plus, qu'on peut associer une intégrale affine au système projectif $(\mu_U)_{U \in \Delta_T}$ sans faire appel au théorème de Kolmogorov : il suffit de remarquer que tout $f \in b(E)$ est de la forme $g \circ \Lambda_U$, où g est une fonction continue bornée sur R^U $(U \in \Delta_T)$, et de poser

$$\overline{\mu}(f) = \int g \, d\mu_U$$

(définition qui est cohérente d'après la condition $\Lambda_{UV}(\mu_V) = \mu_U$) [cf. n° 3.2, (c)].

On va, dans la suite, généraliser ce procédé de définition des intégrales affines au cas où E est un espace faible quelconque (voir à ce sujet le n° 5.5).

3.2 ELC faibles.

Notations. - Soient E un espace vectoriel sur R (a priori sans topologie), et T un ensemble de formes linéaires sur E indépendantes et séparant les points de E.

Pour toute partie M de T, nous désignerons par V_M le sous-espace du dual algébrique E^* de E engendré par M, et par Λ_M l'application linéaire $x \to (u(x))_{u \in M}$ de E dans R^M (notations prolongeant celles introduites dans le n° 3.1, où $E = R^T$). Nous désignerons enfin par Δ_T l'ensemble des parties finies de T.

---

(3) Voir la proposition 3.1 ci-dessous.

La forme bilinéaire $(x, v) \to v(x)$ met E et $F = V_T$ en dualité, et la topologie initiale sur E, associée à l'ensemble T de formes linéaires, est la topologie d' ELC $\sigma(E, F)$ associée à la dualité entre E et F.

Inversement, si E est mis en dualité avec un espace F_1 par une forme bilinéaire, et si T_1 est une base (algébrique) de F_1, la topologie $\sigma(E, F_1)$ est identique à la topologie initiale sur E associée à l'ensemble T_1 de formes linéaires.

Dans la suite, nous appellerons <u>espace faible</u>, un ELC dont la topologie est ainsi obtenue à partir d'un ensemble T de formes linéaires <u>indépendantes et séparant les points</u>.

On a alors les propriétés suivantes :

(A) Pour toute partie finie U de T $(U \in \Delta_T)$, Λ_U <u>applique</u> E <u>sur</u> R^U.

En effet, en identifiant R^U au dual V_U^* de V_U au moyen de la base duale de la base U de V_U, il suffit de montrer que toute forme linéaire sur V_U s'écrit sous la forme $v \to v(x)$ où $x \in E$; or, ceci résulte de la dualité entre E et V_T et du théorème de Hahn-Banach.

(B) L'application Λ_T est un isomorphisme de l'espace faible E dans l'espace faible R^T, et $\Lambda_T(E)$ est partout dense dans R^T. Ainsi, R^T est une réalisation du <u>complété</u> de E, et pour que E soit complet, il faut et il suffit que $\Lambda_T(E) = R^T$.

3.3 Intégrales affines sur un ELC faible.

PROPOSITION 3.1. - Soit E un espace faible. Avec les notations du n° 3.2, pour toute fonction $f \in b(E)$, il existe une partie finie U de T et une fonction $g \in b(R^U)$ telles que $f = g \circ \Lambda_U$.

En effet, d'après la propriété (γ) (proposition 2.1, n° 2.1), on a :

$$f(x) = \sup_{1 \leq i \leq m} (\alpha_i + \ell_i(x)) - \sup_{1 \leq j \leq n} (\alpha'_j + \ell'_j(x)) , \quad \forall x \in E ,$$

où les α_i et α'_j sont des nombres réels et où les ℓ_i et ℓ'_j sont des formes linéaires continues sur E. On conclut en utilisant la propriété (A) du n° 3.2 et le fait que toute forme linéaire continue sur E est dans $F = V_T$ (c'est-à-dire est combinaison linéaire d'éléments de T).

COROLLAIRE 1. - Si E est un espace faible, la topologie de E est la moins fine des topologies sur E rendant continues toutes les fonctions affines par morceaux bornées.

En effet, la topologie de E est engendrée par les Λ_U $(U \in \Delta_T)$, et, pour chaque U, celle de R^U par les fonctions de $b(R^U)$.

COROLLAIRE 2. - Si E est un ELC séparé, la topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ sur E est la moins fine rendant continues toutes les fonctions affines par morceaux bornées.

Appelons alors <u>système projectif d'intégrales affines sur</u> R^T une famille $(\theta_U)_{U\in\Delta_T}$ où, pour chaque partie finie U de T, θ_U est une intégrale affine sur R^U, telle que :

$$\text{Pour tous } U, V \in \Delta_T, \quad U \subset V \implies \Lambda_{UV}(\theta_V) = \theta_U .$$

Si θ est une intégrale affine sur E, et si, pour tout $U \in \Delta_T$, on pose $\theta_U = \Lambda_U(\theta)$, $(\theta_U)_{U\in\Delta_T}$ est un système projectif d'intégrales affines sur R^T.

Inversement, si $(\theta_U)_{U\in\Delta_T}$ est un tel système projectif, il résulte de la proposition 3.1 ci-dessus qu'il existe une intégrale affine θ, et une seule, sur E telle que $\Lambda_U(\theta) = \theta_U$ pour tout $U \in \Delta_T$.

Ainsi, <u>la donnée d'une intégrale affine sur</u> E <u>équivaut à celle d'un système projectif d'intégrales affines sur</u> R^T.

3.4 <u>Mesures d'ensembles cylindriques sur un espace faible</u>.

Nous allons maintenant, avec le point de vue adopté ici, situer les "<u>mesures d'ensembles cylindriques</u>" introduites par GEL'FAND et VILENKIN (cf. [5], page 373, et [6]). Les notations sont celles du n° 3.2.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de E de la forme $\Lambda_U^{-1}(A)$ où U est une partie finie de T, et A un ensemble borélien dans R^U $(A \in \mathcal{B}_{R^U})$; $\mathcal{C}$ est un clan de parties de E (autrement dit, $\mathcal{C}$ est stable par réunions finies et passage au complémentaire).

Soit alors $(\mu_U)_{U\in\Delta_T}$ un système projectif de mesures de Radon (cf. n° 3.1) sur R^T. Si on pose

$$\mu(\Lambda_U^{-1}(A)) = \mu_U(A)$$

pour $U \in \Delta_T$ et $A \in \mathcal{B}_{R^U}$, on définit sur $\mathcal{C}$, en vertu de la relation (P) (n° 3.1, définition 3.1), une fonction d'ensemble positive et finiment additive. GEL'FAND et VILENKIN appellent "mesure d'ensembles cylindriques", une telle fonction d'ensemble μ de mesure totale égale à 1 $(\mu(E) = 1)$.

Nous ne nous étendrons pas ici sur les diverses définitions possibles d'une mesure (d'ensembles) cylindrique(s) sur E. Pour nous, la donnée d'une telle mesure est identique à celle d'un système projectif de mesures de Radon sur R^T.

Deux remarques, cependant :

REMARQUE 1. - Il nous semble inutile, ainsi que le font GEL'FAND et VILENKIN, de considérer systématiquement E comme un dual topologique. Au contraire :

REMARQUE 2. - La donnée importante, celle qui permet, en pratique, de définir une mesure cylindrique, est celle de l'ensemble T de formes linéaires sur E indépendantes et séparant les points de E. Toutefois, la donnée de T peut sembler introduire une note de "non canonicité" (encore que, par exemple dans le cas où $E = R^T$, T soit canonique), et on peut préférer procéder comme suit :

1° Partir d'un couple E, F d'espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle x , u\rangle$.

2° Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble des sous-espaces de dimension finie G de F, pour tout $G \in \mathfrak{F}$, π_G l'application linéaire de E sur le dual G^* de G qui, à $x \in E$, fait correspondre la restriction à G de la forme linéaire $u \to \langle x , u\rangle$ sur F, et si $G_1, G_2 \in \mathfrak{F}$, $G_1 \subset G_2$, $\pi_{G_1 G_2}$ l'application linéaire "restriction à G_2" de G_1^* sur G_2^*.

3° La donnée d'une mesure cylindrique sur E (relativement à la dualité avec F) est alors équivalente à la donnée d'une famille $(\mu_G)_{G\in\mathfrak{F}}$ où, pour chaque $G \in \mathfrak{F}$, μ_G est une mesure de Radon sur G^*, et où

$$G_1 \subset G_2 \implies \pi_{G_1 G_2}(\mu_{G_2}) = \mu_{G_1} .$$

Ce procédé est exactement équivalent à celui que nous avons adopté en remarquant que (avec les notations du n° 3.2), si T est une base (algébrique) de F, la famille des sous-espaces $(V_U)_{U\in\Delta_T}$ est finale dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ ordonné par inclusion.

3.5 Mesures cylindriques et intégrales affines portées par l'infini sur un espace faible.

Avec les notations du n° 3.2, soient $(\mu_U)_{U \in \Delta_T}$ un système projectif de mesures de Radon sur R^T, et, pour chaque U, $\overline{\mu}_U$ l'intégrale affine sur R^U associée à la mesure de Radon μ_U (cf. n° 2.3, exemple 1).

La famille $(\overline{\mu}_U)_{U \in \Delta_T}$ est un système projectif d'intégrales affines sur R^T (cf. n° 3.2, (D)), qui définit donc une intégrale affine sur E. D'où :

DÉFINITION 3.2. - Soit E un espace faible, avec les notations du n° 3.2 ; on appelle mesure cylindrique sur E, toute intégrale affine θ sur E telle que, pour tout $U \in \Delta_T$, $\Lambda_U(\theta)$ soit une intégrale affine sur R^U associée à une mesure de Radon sur R^U (n° 2.3, exemple 1).

La donnée d'une mesure cylindrique sur E est ainsi équivalente à celle d'un système projectif de mesures de Radon sur R^T, donc aussi (cf. n° 3.3) à celle d'une mesure d'ensembles cylindriques au sens de GEL'FAND et VILENKIN.

Si E est de dimension finie, les mesures cylindriques sont les mesures associées à une mesure de Radon sur E (n° 2.3, exemple 1).

Remarque. - Reprenant les notations introduites dans la remarque 2 du n° 3.4, on vérifie que, pour qu'une intégrale affine θ sur E soit une mesure cylindrique, il faut et il suffit que, pour tout $G \in \mathfrak{F}$, $\pi_G(\theta)$ soit une intégrale affine associée à une mesure de Radon sur G^*. Il en résulte que l'ensemble des mesures cylindriques sur l'espace faible E ne dépend que de sa topologie, et non point du choix de l'ensemble T la définissant. Ce résultat est aussi, dans le cas où E est complet, une conséquence du théorème 4.4 (n° 4.5).

Conformément à ce qui a été entrevu dans l'exemple 2 du n° 2.3, nous poserons la définition suivante :

DÉFINITION 3.3. - Soit E un espace faible ; on dit qu'une intégrale affine μ sur E est portée par l'infini si, dans le cône convexe ordonnée des intégrales affines sur E, μ est étrangère à toute intégrale cylindrique.

La terminologie "portée par l'infini" sera justifiée par la proposition 4.4, 2° (cf. n° 4.3).

On a alors le théorème :

THÉORÈME 3.1 (Théorème de décomposition). - Soit E un espace faible :

(1) Le cône des mesures cylindriques est une bande [4] dans le cône ordonné des intégrales affines sur E.

(2) Toute intégrale affine θ peut s'écrire d'une manière, et d'une seule, sous la forme

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 ,$$

où θ_1 est une intégrale cylindrique et où θ_2 est portée par l'infini.

Démonstration. - (2) résulte de (1), en vertu du théorème de décomposition de Riesz (cf. [2], chapitre II, § 1, n° 5, théorème 1). Montrons (1) :

Si μ et ν sont des intégrales affines, la relation $\mu \leqslant \nu$ (c'est-à-dire $\mu(f) \leqslant \nu(f)$; $\forall f \geqslant 0$; $f \in b(E)$) équivaut à $\mu_U \leqslant \nu_U$ pour tout $U \in \Delta_T$, en vertu du n° 3.3, proposition 3.1. Il suffit donc de démontrer (1) dans le cas où E est de dimension finie.

Nous verrons ci-dessous (cf. n° 4.2, remarque) une démonstration utilisant le compactifié affine $\hat{E}$ de E. Montrons-le ici directement en utilisant le lemme 2.1 (n° 2.3) :

- (b_1) résulte directement du lemme 2.1.

- Pour montrer (b_2) supposons que X est filtrant et majoré par l'intégrale affine θ, et soit $\nu = \sup X$. D'après le lemme 2.1, il suffit de montrer que, si (h_n) est une suite croissante de fonctions $\geqslant 0$ de $b(E)$ telle que

$$h = \sup_n h_n \in b(E) ,$$

on a

$$\nu(h) = \sup_n \nu(h_n) ;$$

or

---

[4] Autrement dit (cf. [2], chapitre II, § 1, n° 5) :

(b_1) Si ν est une mesure cylindrique, et si μ est une intégrale affine telle que $\mu \leqslant \nu$, alors μ est aussi une mesure cylindrique.

(b_2) Si X est un ensemble de mesures cylindriques, majoré par une intégrale affine, $\sup X$ est aussi une mesure cylindrique.

$$\nu(h) = \sup_{\mu\in X} \mu(h) = \sup_{\mu\in X} \mu(\sup_n h_n) = \sup_{\mu\in X} \sup_n \mu(h_n)$$

$$= \sup_n (\sup_{\mu\in X} \mu(h_n)) = \sup_n \nu(h_n) .$$

C. Q. F. D.

Le théorème 3.1 est ainsi démontré.

§ 4. Le compactifié affine d'un ELC faible. Premières applications à l'étude des intégrales affines : le cas métrisable.

4.1 DÉFINITION 4.1. - Soit E un ELC faible ; on appelle compactifié affine de E l'espace compact $\hat{E}(b(E))$ rendant continues à l'infini les fonctions affines par morceaux et bornées (cf. définition 1.1, n° 1.1) ; cet espace sera noté $\hat{E}$.

Les théorèmes 1.1 et 1.2 fournissent alors les propriétés suivantes du compactifié affine :

THÉORÈME 4.1. - Soit E un espace faible ; le compactifié affine $\hat{E}$ de E est un espace compact ayant les propriétés suivantes :

(a) E est un sous-espace topologique de $\hat{E}$, et E est dense dans $\hat{E}$.
(b) Toute fonction $f \in b(E)$ se prolonge (d'une seule manière) en une fonction $\hat{f}$ continue sur $\hat{E}$.
(c) L'ensemble des $\hat{f}$, $f \in b(E)$, est un sous-espace réticulé de $C(\hat{E})$ contenant les constantes et séparant les points de $\hat{E}$ (donc, dense dans $C(\hat{E})$ pour la norme uniforme).
(m) Pour toute intégrale affine θ sur E , il existe une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $\hat{E}$, $\hat{\theta}$, et une seule, telle que

$$\theta(f) = \hat{\theta}(\hat{f}) \qquad \text{pour tout } f \in b(E) ;$$

$\hat{\theta}$ sera appelée la mesure de Radon associée à θ .

Comme, pour chaque mesure de Radon $\nu \geqslant 0$ sur $\hat{E}$, l'application $f \to \nu(\hat{f})$ est une intégrale affine θ sur E telle que $\hat{\theta} = \nu$, il y a équivalence entre la donnée d'une intégrale affine sur E , et celle d'une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $\hat{E}$.

Remarque. - On peut, de la même manière, définir le compactifié affine d'un ELC . Le théorème 4.1 reste valable, sauf la propriété (a) : la topologie induite par $\hat{E}$ sur E est alors seulement la topologie affaiblie $\sigma(E , E')$ de E .

PROPOSITION 4.1. – Un espace faible E et son complété $\overline{E}$ ont même compactifié affine.

En effet, si K est le compactifié affine de l'espace faible $\overline{E}$, on vérifie que K possède les propriétés (a), (b), (c) du n° 1.1, d'où le résultat, compte tenu du théorème 1.1.

4.2 Propriétés topologiques de E comme sous-ensemble de $\hat{E}$.

PROPOSITION 4.2. – Pour que E soit ouvert dans $\hat{E}$, il faut et il suffit que E soit de dimension finie.

La condition est nécessaire car, si E est ouvert dans $\hat{E}$, sa topologie est localement compacte, donc il est de dimension finie. Elle est suffisante ; en effet, si E est de dimension finie, il existe une suite (f_n) de fonctions affines par morceaux bornées à support compact telle que

$$E = \bigcup_n G_n ,$$

où G_n est l'ouvert $\{x \mid x \in E \text{ et } f_n(x) > 0\}$; on a alors

$$G_n = \{x \mid x \in \hat{E} \text{ et } \hat{f}_n(x) > 0\} ,$$

donc G_n est aussi ouvert dans $\hat{E}$; d'où le résultat.

Quand E n'est pas de dimension finie, il importe (cf. n° 4.3) de savoir si E est borélien dans $\hat{E}$ (ou μ-mesurable pour une mesure de Radon $\geqslant 0$, μ, sur $\hat{E}$). On a, à ce sujet, les résultats suivants quand E est un espace faible complet :

PROPOSITION 4.3. – Si E est un espace faible complet, on a :

$$E = \bigcap_{U \in \Delta_T} \hat{\Lambda}_U^{-1}(R^U) ,$$

où, avec les notations du n° 3.2, $\hat{\Lambda}_U$ désigne le prolongement à $\hat{E}$ (n° 1.3, proposition 1.1) de l'application linéaire continue Λ_U de E sur R^U.

Soit

$$E_1 = \bigcap_{U \in \Delta_T} \hat{\Lambda}_U^{-1}(R^U) ;$$

on a $E \subset E_1$.

Inversement, montrons d'abord que, si α , $\beta \in \hat{E}$,

$$\hat{\Lambda}_U(\alpha) = \hat{\Lambda}_U(\beta) \quad \text{pour tout } U \in \Delta_T \implies \alpha = \beta .$$

En effet, soit $g \in b(E)$; g est de la forme $f \circ \Lambda_U$, où $f \in b(R^U)$ (n° 3.3, proposition 3.1) ; on a alors (n° 1.3, proposition 1.1) :

$$\hat{g}(\alpha) = \widehat{f \circ \Lambda_U}(\alpha) = \hat{f} \circ \hat{\Lambda}_U(\alpha) = \hat{f} \circ \hat{\Lambda}_U(\beta) = \hat{g}(\beta) .$$

Ainsi, $\hat{g}(\alpha) = \hat{g}(\beta)$ pour tout $g \in b(E)$; donc, puisque les $\hat{g}$, $g \in b(E)$, séparent les points de $\hat{E}$, $\alpha = \beta$.

Soit alors $\alpha \in \hat{E}$ tel que, $\forall\ U \in \Delta_T$,

$$\hat{\Lambda}_U(\alpha) = \alpha_U \in R^U .$$

D'après la propriété de transitivité (n° 1.3, proposition 1.1, (3)), la famille $(\alpha_U)_{U \in \Delta_T}$ est telle que

$$\Lambda_{UV}(\alpha_V) = \alpha_U \quad \text{si } U \subset V .$$

Il existe donc un élément $\overline{\alpha}$ de R^T tel que $\Lambda_{UT}(\overline{\alpha}) = \alpha_U$ pour tout $U \in \Delta_T$ (où Λ_{UT} désigne la projection de R^T sur R^U). Mais, E <u>étant complet</u>, Λ_T applique E sur R^T (n° 3.2, (B)). Il existe donc un élément x dans E tel que $\Lambda_T(x) = \overline{\alpha}$, c'est-à-dire

$$\hat{\Lambda}_U(x) = \Lambda_U(x) = \alpha_U = \hat{\Lambda}_U(\alpha)$$

pour tout $U \in \Delta_T$; d'où

$$\alpha = x \in E .$$

C. Q. F. D.

D'après la proposition 4.2, R^U est ouvert dans $\widehat{R^U}$ pour chaque $U \in \Delta_T$, donc $\hat{\Lambda}_U^{-1}(R^U)$ est ouvert dans $\hat{E}$; E est ainsi l'intersection des ouverts $\hat{\Lambda}_U^{-1}(R^U)$ de $\hat{E}$. En général, on ne peut en déduire que E est mesurable dans $\hat{E}$. Toutefois, dans le cas où T est dénombrable, on peut conclure :

COROLLAIRE. - Si T est un ensemble <u>dénombrable</u>, et si E est l'espace faible complet R^T , E est un G_δ dans $\hat{E}$; en particulier, E est borélien dans $\hat{E}$.

En effet, Δ_T est alors un ensemble dénombrable, d'où le résultat d'après la proposition 4.3.

4.3 Intégrales affines sur l'espace faible R^N .

THÉORÈME 4.2. – Soient E un espace faible de dimension finie ou isomorphe à R^N , θ une intégrale affine sur E , et $\hat\theta$ la mesure de Radon sur $\hat E$ associée à θ (n° 4.1, théorème 4.1).

(1) Pour que θ soit une mesure cylindrique, il faut et il suffit que $\hat\theta$ soit portée par E . Il existe alors sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_E$ de E , une mesure bornée ν (et une seule) telle que

$$\theta(f) = \int_E f\, d\nu \qquad \text{pour tout} \quad f \in b(E) .$$

(2) Pour que θ soit portée par l'infini, il faut et il suffit que $\hat\theta$ soit portée par $\hat E \setminus E$.

(3) La décomposition $\theta = \theta_1 + \theta_2$ (n° 3.5, théorème 3.1, (2)) correspond à la décomposition $\hat\theta = 1_E\,\hat\theta + 1_{\hat E\setminus E}\,\hat\theta$ [autrement dit, $\hat\theta_1 = 1_E\,\hat\theta$, et $\hat\theta_2 = 1_{\hat E\setminus E}\,\hat\theta$].

Dans le cas de dimension finie, (1) résulte immédiatement des définitions.

Supposons que $E = R^N$. Si $\hat\theta$ est portée par E , pour tout $U \in \Delta_N$, $\hat\Lambda_U(\hat\theta) = \hat\theta_U$ est portée par $R^U = \hat\Lambda_U(E)$; donc θ est une mesure cylindrique, en vertu de la propriété dans le cas de dimension finie.

Inversement, si θ est une mesure cylindrique, pour chaque $U \in \Delta_N$, $\hat\theta_U = \hat\Lambda_U(\hat\theta)$ est portée par R^U ; donc

$$\hat\theta_U(R^U) = \hat\theta_U(\widehat{R^U}) ;$$

d'où

$$\hat\theta(\hat\Lambda_U^{-1}(R^U)) = \hat\theta_U(R^U) = \hat\theta_U(\widehat{R^U}) = \hat\theta(\hat E) ,$$

et enfin

$$\hat\theta(E) = \hat\theta(\hat E) ,$$

d'après la proposition 4.3, puisque Δ_N est dénombrable. En outre, ν est la mesure induite par $\hat\theta$ sur $(E , \mathcal{B}_E)$.

Si $\hat\theta$ est portée par $\hat E\setminus E$, dans $\mathcal{M}^+(\hat E)$, $\hat\theta$ est étrangère à toute mesure de Radon portée par E (cf. [2], chapitre V, § 5, n° 7) ; on en déduit, en utilisant le fait que l'application $\theta \to \hat\theta$ est un isomorphisme pour les structures d'ordre, que θ est portée à l'infini. Inversement, si θ est portée par l'infini, la décomposition

$$\hat\theta = 1_E\,\hat\theta + 1_{\hat E\setminus E}\,\hat\theta ,$$

comparée à celle du théorème 3.1 (2), donne le résultat ; (2) est ainsi établi. (3) résulte enfin de (1) et (2).

4.4 Mesures cylindriques sur l'espace faible R^N .

THÉORÈME 4.3. - Si θ est une mesure cylindrique sur l'espace faible $E = R^N$, il existe une suite croissante (K_n) de compacts de E , et, pour chaque n , une mesure de Radon positive ν_n sur K_n telles que :

(1) Pour tout n , la restriction de ν_{n+1} à K_n est égale à ν_n .

(2) Pour tout $f \in b(R^N)$,

$$\theta(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f \, d\nu_n .$$

Nous utiliserons le lemme suivant qui résulte du caractère régulier de la mesure de Radon $\hat{\theta}$, et du fait que $\hat{\theta}(E) = \hat{\theta}(\hat{E})$ (théorème 4.2 (1)) :

LEMME 4.1. - Si θ est une mesure cylindrique sur $E = R^N$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact H de E tel que $\hat{\theta}(H) \geqslant \hat{\theta}(E) - \varepsilon$. Autrement dit, la mesure $\hat{\theta}$ est portée par un K_σ de E .

On en déduit le théorème 4.3 comme suit :

Soient (K_n) une suite croissante de compacts de E telle que, pour chaque n ,

$$\hat{\theta}(K_n) \geqslant \hat{\theta}(E) - \frac{1}{2^n} ,$$

et, pour chaque n , ν_n la restriction de $\hat{\theta}$ à K_n ; les suites (K_n) et (ν_n) répondent à la question.

4.5 Caractérisation des mesures cylindriques comme intégrales de Daniell.

THÉORÈME 4.4. - Soit E un espace faible complet. Pour qu'une intégrale affine θ sur E soit une mesure cylindrique, il faut et il suffit [5] qu'elle soit une intégrale de Daniell sur l'espace réticulé $b(E)$.

La condition est suffisante. En effet, supposons que θ ne soit pas une mesure cylindrique ; il existe alors une partie finie U de T telle que $\Lambda_U(\theta) = \theta_U$ ne soit pas une mesure cylindrique sur R^U , donc, d'après le lemme 2.1 (n° 2.3),

---

[5] Le fait que E est complet est superflu pour la condition suffisante.

ne soit pas une intégrale de Daniell sur R^U. Il existe donc une suite (f_n) de fonctions de $b(R^U)$ décroissant vers zéro et telle que

$$\inf_n \theta_U(f_n) > 0 \ ;$$

d'où le résultat en considérant la suite $(f_n \circ \Lambda_U)$.

Inversement, la condition est nécessaire. Supposons que θ soit une mesure cylindrique, et soit (f_n) une suite de fonctions de $b(E)$ décroissant vers zéro. En vertu de la proposition 3.1 (n° 3.3), il existe une partie dénombrable D de T, et une suite (g_n) de fonctions de $b(R^D)$ telle que $f_n = g_n \circ \Lambda_D$ pour tout n. Comme E est complet, Λ_D applique E sur R^D ; donc, la suite (g_n) est aussi décroissante vers zéro. Le résultat cherché est alors une conséquence du théorème 4.2 (1), en considérant la mesure cylindrique $\theta_D = \Lambda_D(\theta)$ sur R^D.

Le théorème 4.3 est établi.

§ 5. Support et compactifié affines ; étude du cas non métrisable.

Le théorème 4.2 (n° 4.3) montre que, dans le cas où E est métrisable et complet, il y a une correspondance parfaite entre les mesures cylindriques sur E, et les mesures de Radon sur $\hat{E}$ portées par E ($\in \mathcal{B}_{\hat{E}}$), entre la décomposition d'une intégrale affine en une mesure cylindrique et une mesure portée par l'infini (n° 3.5), et la décomposition d'une mesure de Radon sur $\hat{E}$ en sa partie portée par E et sa partie portée par $\hat{E} \setminus E$.

La situation est loin d'être aussi simple dans le cas non métrisable, ainsi que nous allons le montrer maintenant. Introduisons d'abord, pour cela, la notion de support affine d'une intégrale affine de façon analogue à celle de support d'une mesure conique :

5.1 Support affine.

DÉFINITION 5.1. - Soient E un espace faible, θ une intégrale affine sur E, et C un sous-ensemble fermé de E. On dit que C porte θ affinement (ou que θ est affinement portée par C) si $C \neq \emptyset$ et si pour tout $f \in b(E)$, $f \geqslant 0$ sur $C \implies \theta(f) \geqslant 0$.

On a d'abord la propriété suivante :

PROPOSITION 5.1. - Soient θ une intégrale affine sur l'espace faible E, et C un sous-ensemble fermé de E. Pour que θ soit affinement portée par C, il faut et il suffit que la mesure de Radon $\hat{\theta}$ sur $\hat{E}$ soit portée par l'adhérence $\hat{C}$ de C dans $\hat{E}$.

La condition est suffisante, d'après la relation $\theta(f) = \hat{\theta}(\hat{f})$ $(f \in b(E))$.

Montrons qu'elle est nécessaire ; il suffit de montrer que, si θ est affinement portée par C,

$$g \in C(\hat{E}) \quad \text{et} \quad g \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \hat{C} \implies \theta(g) \geqslant 0 .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque l'ensemble des $\hat{f}$ $(f \in b(E))$ est dense dans $C(\hat{E})$ (lemme 1.1, n° 1.2), il existe $f \in b(E)$ telle que $g - \varepsilon \leqslant \hat{f} \leqslant g + \varepsilon$. On en déduit, puisque g est $\geqslant 0$ sur $\hat{C}$, que $\hat{f} + \varepsilon \geqslant 0$ sur $\hat{C}$; donc, d'après l'hypothèse selon laquelle θ est affinement portée par C, que

$$\hat{\theta}(\hat{f} + \varepsilon) = \theta(f + \varepsilon) \geqslant 0 ,$$

c'est-à-dire que

$$\hat{\theta}(\hat{f}) \geqslant - \varepsilon\hat{\theta}(\hat{E}) ,$$

et enfin que

$$\hat{\theta}(g) \geqslant \hat{\theta}(\hat{f}) - \varepsilon\hat{\theta}(E) > - 2\varepsilon\hat{\theta}(\hat{E}) ;$$

d'où le résultat, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Il se pose alors la question de savoir s'il existe un plus petit fermé portant affinement une intégrale affine ; ce qui amène à la définition suivante :

DÉFINITION 5.2. - Soient E un espace faible et θ une intégrale affine sur E. On appelle <u>support affine</u> de θ l'intersection S_θ de tous les sous-ensembles fermés de E portant affinement θ.

Le support affine d'une intégrale affine peut être vide, ainsi que le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. - Soient E un espace faible, et θ une intégrale affine sur E telle que la mesure de Radon $\hat{\theta}$ sur $\hat{E}$ ait son support S contenu dans $\hat{E} \setminus E$. Alors le support affine de θ est vide.

Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des voisinages ouverts de S dans $\hat{E}$. Pour tout $V \in \mathscr{V}$, on a

$$\widehat{V \cap E} = \hat{V}$$

(où $\hat{V}$ désigne l'adhérence de V dans $\hat{E}$) ; donc,

$$\widehat{\hat{V} \cap E} = \hat{V} .$$

Il résulte donc de la proposition 5.1 que $\hat{V} \cap E$ porte affinement θ ; d'où **la proposition,** puisque

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \hat{V} \cap E = (\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \hat{V}) \cap E = S \cap E = \emptyset .$$

5.2 Cas métrisable.

THÉORÈME 5.1. - Soit E un espace faible <u>métrisable</u> et <u>complet</u>. Pour toute mesure cylindrique θ sur E, non nulle, le support S_θ de θ est non vide et porte θ affinement.

En effet, soit S le support de la mesure de Radon $\hat{\theta}$ sur $\hat{E}$. On a $S \cap E \neq \emptyset$ et $\widehat{S \cap E} = S$ (6). En effet, soit H un sous-ensemble fermé de $\hat{E}$ contenant $S \cap E$;

$$H \cup (\hat{E} \setminus S) \supset (S \cap E) \cup (\hat{E} \setminus S) \supset (S \cap E) \cup (E \setminus S) = E .$$

Donc, puisque $\hat{\theta}$ est portée par E (théorème 4.3) et que $\hat{\theta}(\hat{E} \setminus S) = 0$,

$$\hat{\theta}(H) = \hat{\theta}(\hat{E}) ;$$

d'où $H \supset S$ et les relations $S \cap E \neq \emptyset$ et $\widehat{S \cap E} = S$. On conclut alors comme suit :

D'une part $S \cap E$ est un fermé de E qui porte θ affinement, car $f \in b(E)$ et $f \geqslant 0$ sur $S \cap E$ entraîne $\hat{f} \geqslant 0$ sur $\widehat{S \cap E} = S$, donc

$$\hat{\theta}(\hat{f}) = \theta(f) \geqslant 0 .$$

D'autre part, si C est un fermé de E qui porte θ affinement, $\hat{C}$ porte $\hat{\theta}$ d'après la proposition 5.1 (n° 5.1), donc $\hat{C} \supset S$, et

$$C = \hat{C} \cap E \supset S \cap E .$$

C. Q. F. D.

5.3 Cas non métrisable ; un contre-exemple.

La conclusion du théorème 5.1 ne subsiste pas lorsque E n'est pas métrisable ; voici un contre-exemple construit par CHOQUET à partir de sa théorie des mesures coniques :

Nous admettrons ici le résultat suivant établi par CHOQUET ([4], proposition 9) :

---

(6) où $\hat{M}$ désigne l'adhérence, dans $\hat{E}$, du sous-ensemble M de $\hat{E}$.

Il existe un espace faible complet E_0, une forme linéaire non nulle φ_0 sur E_0, et une mesure conique μ_0 sur E_0 ayant les propriétés suivantes :

(1) μ_0 est portée par le demi-espace $\{\varphi_0 \geqslant 0\}$.
(2) Si r est la résultante de μ, $\varphi_0(r) \neq 0$.
(3) Le support de μ_0 est vide.

Nous allons en déduire le théorème suivant :

THÉORÈME 5.2. - Il existe un espace faible complet (non métrisable) et, sur cet espace, une mesure cylindrique non nulle ayant un support affine vide.

Pour établir ce résultat, établissons une correspondance entre fonctions linéaires par morceaux et fonctions affines par morceaux bornées, mesures coniques et mesures cylindriques.

LEMME 5.1. - Soient E un espace faible, et φ une forme linéaire continue non nulle sur E. Désignons par F_0 l'hyperplan $\{\varphi = 0\}$ et par F_1 l'hyperplan affine $\{\varphi = 1\}$. Fixons, en outre, un point a de F_1.

Alors, pour toute fonction $g \in b(F_0)$, il existe une fonction $\tilde{g} \in h(E)$, et une seule, telle que

(a) $\tilde{g}(x) = 0$ pour tout x du demi-espace $\{\varphi \leqslant 0\}$.
(b) $\tilde{g}(x) = g(x - a)$ pour tout $x \in F_1$.

(En définissant de façon évidente les fonctions affines par morceaux sur l'espace affine F_1, on peut aussi énoncer cette proposition en disant que toute fonction $g \in b(F_1)$ se prolonge de façon unique en une fonction de $h(E)$, nulle sur le demi-espace $\{\varphi \leqslant 0\}$.)

Démonstration immédiate : il suffit de poser

$$\tilde{g}(x) = \varphi(x)\, g\left(\frac{x}{\varphi(x)} - a\right) \qquad \text{si } \varphi(x) > 0 ,$$

$$\tilde{g}(x) = 0 \qquad \text{si } \varphi(x) \leqslant 0 .$$

(On notera cependant que la fonction $\tilde{g}$ ainsi définie n'est continue aux points de F_0 que si g est bornée ; par exemple si g est une forme linéaire non nulle, $\tilde{g}$ n'est plus continue.)

On peut alors associer à toute mesure conique μ sur E une intégrale affine $\tilde{\mu}$ sur F_0 :

$$\tilde{\mu}(g) = \mu(\tilde{g}) \qquad \text{pour tout } g \in b(F_0) .$$

En outre, si μ est une intégrale de Daniell sur $h(E)$, $\tilde{\mu}$ est une intégrale de Daniell sur $b(F_0)$ car, si (g_n) est une suite de fonctions de $h(E)$ décroissant verz zéro, la suite $(\tilde{g}_n)$ décroit aussi vers zéro. En particulier, si E est complet, on sait que toute mesure conique μ sur E est une intégrale de Daniell ; $\tilde{\mu}$ est alors une mesure cylindrique, d'après le théorème 4.4 (n° 4.5). En outre, si S_μ est le support de la mesure conique μ , et $S_{\tilde{\mu}}$ le support affine de $\tilde{\mu}$, on a

$$S_{\tilde{\mu}} + a \subset S_\mu \cap F_1 \ ;$$

en effet, si A est un cône fermé dans E portant μ , $A \cap F_1 - a$ porte affinement $\tilde{\mu}$ (compte tenu de ce que, par construction, si $g \in b(F_0)$, $\tilde{g}$ est nulle sur $\{\varphi \leqslant 0\}$).

Nous pouvons alors montrer le théorème 5.2 :

En reprenant l'exemple de mesure conique à support vide précédent, posons, avec les notations du lemme 5.1, $E = E_0$ et $\varphi = \varphi_0$. On a, d'une part $S_{\tilde{\mu}_0} = \emptyset$, puisque $S_{\mu_0} = \emptyset$. D'autre part, $\tilde{\mu}_0 \neq 0$; en effet, d'après la condition (2), $\mu_0(\varphi_0) \neq 0$. Comme μ_0 est portée par $\{\varphi_0 \geqslant 0\}$ (condition (1)), on a

$$\mu_0(\varphi_0^+) = \mu_0(\varphi_0) > 0 \ .$$

Donc, puisque φ_0^+ est nulle sur $\{\varphi_0 \leqslant 0\}$, $\varphi_0^+ = \tilde{1}_{F_0}$, où 1_{F_0} désigne la fonction affine constante égale à 1 sur F_0 . On en déduit que

$$\tilde{\mu}(1_{F_0}) = \mu(\varphi_0^+) > 0 \ ;$$

donc $\tilde{\mu} \neq 0$, et le théorème 5.2 est démontré.

5.4 Mesures cylindriques pseudo-portées par E .

Ainsi que le montre le théorème 5.1, dans le cas où E n'est pas métrisable, la conclusion du théorème 5.1 ne subsiste pas pour toutes les mesures cylindriques sur E .

Ceci nous amène à distinguer les mesures cylindriques pseudo-portées par E .

Rappelons que, si K est un espace compact, et A une partie non vide de K , on dit qu'une mesure de Radon $\geqslant 0$, ν , sur K est pseudo-portée par A si $\nu(G) = \nu(K)$ pour tout ensemble ouvert (donc aussi pour tout ensemble borélien) contenant A .

Posons alors la définition suivante :

DÉFINITION 5.3. - Soient E un espace faible, et θ une intégrale affine sur E. On dit que θ <u>est pseudo-portée par</u> E, si la mesure de Radon $\hat{\theta}$ sur $\hat{E}$ associée à θ est pseudo-portée par E.

Le théorème 5.1 reste valable pour les intégrales affines pseudo-portées par E.

THÉORÈME 5.3. - Soient E un espace faible, et θ une intégrale affine non nulle pseudo-portée par E.

θ est une mesure cylindrique, son support affine S_θ est non vide et porte affinement θ.

(Démonstration analogue à celle du théorème 5.1.)

En conjuguant ce théorème avec le contre-exemple du n° 5.3, on obtient le corollaire :

COROLLAIRE. - Quand un espace faible complet E n'est pas métrisable, il est possible qu'une mesure cylindrique non nulle θ sur E soit telle que la mesure de Radon associée $\hat{\theta}$ soit portée par un compact de $\hat{E}$ disjoint de E. En particulier, il est possible que θ ne soit pas pseudo-portée par E.

REMARQUE 1. - On admettra plus facilement le résultat du corollaire, au moyen de l'argument suivant :

Soit θ une mesure cylindrique sur E. Pour chaque partie finie U de T, $\hat{\Lambda}_U^{-1}(\overline{R}^U \setminus R^U)$ est $\hat{\theta}$ négligeable dans $\hat{E}$. Cependant, T <u>n'étant pas dénombrable</u>, il n'est pas exclu qu'un compact de $\hat{E}\setminus E$ porte de la masse pour $\hat{\theta}$.

REMARQUE 2. - Utilisant la décomposition de $\hat{\theta}$ (où θ est une intégrale affine sur E) en sa partie $\hat{\theta}_1$ pseudo-portée par E et sa partie $\hat{\theta}_2$ portée par un borélien de $\hat{E}$ disjoint de E, on obtient une décomposition $\theta = \theta_1 + \theta_2$ en général différente (si E est non métrisable) de celle fournie par le théorème 3.1 (n° 3.5).

5.5 Une démonstration du théorème de Kolmogorov utilisant le compactifié affine.

Ainsi qu'on l'a montré aux n° 5.3 et 5.4, une mesure cylindrique sur l'espace faible complet $E = R^T$ n'est pas nécessairement pseudo-portée par E, au sens de la tribu borélienne $\mathcal{B}_E$; mais elle est pseudo-portée par E <u>au sens de la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les applications</u> Λ_U. On en déduit une démonstration du théorème de Kolmogorov (n° 3.1) :

THÉORÈME 5.4. (Kolmogorov). – Soient E un espace faible complet, et θ une mesure cylindrique sur E. Il existe une mesure bornée ν, et une seule, sur la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les fonctions $f \in b(E)$, telle que

(1) $$\theta(f) = \int_E f \, d\nu \qquad \text{pour tout } f \in b(E) .$$

Désignons en effet par $\hat{\mathcal{B}}$ la tribu sur $\hat{E}$ engendrée par les applications $\hat{\Lambda}_U$ où U décrit l'ensemble Δ_T des parties finies de T. En vertu de la proposition 3.1 (n° 3.3), $\hat{\mathcal{B}}$ est aussi la tribu sur $\hat{E}$ engendrée par les fonctions $\hat{f}$ où $f \in b(E)$; donc $\hat{\mathcal{B}}$ induit sur E la tribu $\mathcal{B}$.

Montrons que :

(2) $$M \in \hat{\mathcal{B}} \text{ et } M \supset E \implies \hat{\theta}(M) = \hat{\theta}(\hat{E}) .$$

En effet, soit $M \in \hat{\mathcal{B}}$ tel que $M \supset E$; M est de la forme $\hat{\Lambda}_D^{-1}(A)$ où D est une partie dénombrable de T et A un ensemble borélien de $\hat{R}^D$ (il suffit de vérifier que les ensembles de cette forme constituent une tribu contenue dans $\hat{\mathcal{B}}$ et rendant mesurables les $\hat{\Lambda}_U$, $U \in \Delta_T$). Donc $\hat{\theta}(M) = \hat{\theta}(\hat{\Lambda}_D^{-1}(A)) = \hat{\theta}_D(A)$, où θ_D est l'image de θ par Λ_D ; mais, d'une part, E étant complet, Λ_D est surjective, donc aussi $\hat{\Lambda}_D$ (proposition 1.1, n° 1.3) ; donc

$$A = \hat{\Lambda}_D(M) \supset \hat{\Lambda}_D(E) = R^D ;$$

d'autre part, θ_D est une mesure cylindrique sur l'espace faible R^D, donc (n°4.3, théorème 4.2) $\hat{\theta}_D$ est portée par R^D ; d'où finalement

$$\hat{\theta}(M) = \hat{\theta}_D(A) = \hat{\theta}_D(\hat{R}^D) = \hat{\theta}(\hat{E}) .$$

Il résulte alors de la relation (2) l'existence d'une mesure bornée ν sur $\mathcal{B}$, telle que :

(3) $$\nu(B \cap E) = \hat{\theta}(B) \qquad \text{pour tout } B \in \hat{\mathcal{B}} .$$

On en déduit la relation (1) à établir par un argument classique de prolongement par mesurabilité.

Enfin, la relation (1) détermine ν de façon unique : (1) entraîne que

$$\int_E g \circ \Lambda_U \, d\nu = \hat{\theta}_U(\hat{g}) \qquad \text{pour tout } g \in b(R^U) \text{ et tout } U \in \Delta_T ;$$

donc aussi

$$\int_E h \circ \Lambda_U \, d\nu = \hat{\theta}_U(h) \qquad \text{pour tout } h \in C(\widehat{R^U}) ,$$

puisque l'ensemble des $\hat{g}$, où $g \in b(R^U)$, est dense dans $C(\widehat{R^U})$ (n° 4.1, théorème 4.1). Il en résulte que

$$\nu(\Lambda_U^{-1}(A)) = \hat{\theta}(\Lambda_U^{-1}(A)) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B}_{R^U} \quad \text{et} \quad U \in \Delta_T \;;$$

d'où l'unicité, et le théorème 5.4.

5.6 Quelques questions ouvertes.

1. Si E est un espace faible complet non métrisable, déterminer la nature topologique de E dans $\hat{E}$ (il est probable que E n'est pas borélien).

2. Caractériser au moyen de critères commodes les mesures cylindriques pseudo-portées par E, par exemple en faisant intervenir des "limites projectives" convenables des points à l'infini des espaces $\widehat{R^U}$ (U fini, $U \subset T$) (voir à ce sujet la remarque 1, n° 5.4).

3. Par exemple, étudier la mesure gaussienne sur R^T : soit α la mesure gaussienne sur R :

$$\alpha(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \,.$$

Poser $\mu_U = \alpha^U$ pour tout $U \in \Delta_T$; $(\mu_U)_{U \in \Delta_T}$ définit une mesure cylindrique θ sur R^T telle que, si T n'est pas dénombrable, $\hat{\theta}(K) = 0$ pour tout compact K contenu dans E. Cette mesure est-elle pseudo-portée par E ? Dans l'affirmative, il en résulterait que E n'est pas borélien dans $\hat{E}$ (puisqu'il est de $\hat{\theta}$ mesure intérieure nulle).

4. Chercher à construire directement (sans passer par la théorie des mesures coniques maximales) des exemples de mesures cylindriques non pseudo-portées par E.

5. Etudier le cas de mesures cylindriques sur un espace E non complet, affinement portées par un sous-ensemble complet.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Über die Beziehungen einer abstrakten Theorie des Riemann-Integrals zur Theorie Radonscher Masse, Math. Z., t. 65, 1956, p. 448-482.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1-4, 5, 6. - Paris, Hermann, 1952 à 1959 (Act. scient. et ind., 1175, 1244 et 1281 ; Bourbaki, 13, 21 et 25).

[3] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, nº 12, 15 p.

[4] CHOQUET (Gustave). - Etude des mesures coniques, Cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 445-447.

[5] GEL'FAND (I. M.) i VILENKIN (N. Ja.). - Obobščennye funkcii [Fonctions généralisées], 4 : Nekotorye primenenija garmoničeskogo analysa, Osnaščennye Gil'bertovy prostranstva. - Moscou, 1961.

[6] GUICHARDET (Alain). - Mesure sur les espaces vectoriels topologiques, d'après Gel'fand et Vilenkin (Exposé multigraphié).