Laurent Gruson

Travaux de Krickeberg et de Giorgi sur l'application de la théorie des distributions à l'étude de l'aire des surfaces

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 2 (1963), exp. n° 4, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1963__2__A3_0>

TRAVAUX DE KRICKEBERG ET DE GIORGI SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DE L'AIRE DES SURFACES

par Laurent GRUSON

Introduction. - On sait que le problème du prolongement de l'aire des surfaces polyédrales aux surfaces les plus générales se présente de façon beaucoup plus compliquée que celui de la rectification des courbes : en effet, le prolongement le plus naturel (aire de Lebesgue) ne permet pas une caractérisation simple des surfaces d'aire finie. [BANACH [1] a construit une notion d'aire à partir d'une définition des applications à variation bornée : $\underset{\sim}{R}^n \to \underset{\sim}{R}^n$, redonnant la définition usuelle pour $n = 1$ (f est à variation bornée au sens de Banach, si sa "variation totale" $\int_{\underset{\sim}{R}^n} N(x)\, dx$, $N(x)$ désignant le nombre (éventuellement $+\infty$) des solutions de l'équation $f(y) = x$, est finie). CESARI [4] a démontré que cette notion d'aire ne coïncidait pas avec la définition de Lebesgue]. Le problème de la caractérisation des surfaces d'aire de Lebesgue finie a été résolu par FEDERER ([6] et [7]). Dans une première partie, on définira l'aire de Lebesgue d'une surface et on énoncera le résultat de Federer.

L'aspect de la théorie qu'on tentera d'exposer dans les deux dernières parties est beaucoup plus particulier, puisqu'il est relatif aux hypersurfaces non paramétriques, c'est-à-dire aux applications continues d'un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$ dans $\underset{\sim}{R}^{n+1}$ qui sont de la forme $x \to (x , f(x))$, f étant une fonction numérique continue définie sur Ω . La caractérisation de celle de ces surfaces dont l'aire de Lebesgue est finie, due à KRICKEBERG [16], est beaucoup plus simple que dans le cas général, et présente avec le cas des courbes une analogie qui s'exprime très bien dans le cadre de la théorie des distributions ; elle fera l'objet de la deuxième partie. D'autre part, de GIORGI ([13] et [14]), à propos du problème très voisin de la structure des ensembles de $\underset{\sim}{R}^n$ de "périmètre fini", a obtenu des résultats, généralisés par FEDERER et FLEMING ([10], § 8) dans le cadre de la théorie des courants, et qu'on exposera dans la troisième partie à partir du problème de la définition d'un plan tangent à une hypersurface non paramétrique.

Première partie

Définition de Lebesgue de l'aire d'une surface.

On se place dans la catégorie des surfaces (resp. surfaces à bord) de classe C^0 dans $\mathbb{R}^n$ (objets : applications continues d'une variété (resp. variété à bord) de classe C^0 dans $\mathbb{R}^n$; morphismes de $f : V \to \mathbb{R}^n$ dans $g : W \to \mathbb{R}^n$; applications continues $h : V \to W$ (resp. et envoyant le bord de V dans celui de W) vérifiant $f = g \circ h$). Deux surfaces isomorphes sont dites équivalentes. On cherche à définir l'aire k-dimensionnelle $L_k(f)$ d'une surface f de dimension k.

Rappelons tout d'abord la définition des mesures k-dimensionnelles de $\mathbb{R}^n$.

1. Rappels sur la mesure de Hausdorff.

Les résultats qui suivent sont démontrés dans SAKS [20], chapitre II). Soient E un ensemble, m une application : $\mathfrak{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, croissante, dénombrablement sous-additive, telle que $m(\emptyset) = 0$. Un ensemble $X \subset E$ est dit m-mesurable si, pour tout $A \subset E$, on a : $m(A) = m(A \cap X) + m(A \cap \complement X)$; on montre que ces ensembles forment une tribu, et que, sur le clan des ensembles m-mesurables X tels que $m(X) < +\infty$, m induit une mesure au sens ensembliste habituel, μ, les ensembles m-mesurables et μ-mesurables étant les mêmes. Enfin on dit que m est régulière si, pour tout $A \subset E$, il existe X m-mesurable, $A \subset X \subset E$ et $m(A) = m(X)$; si m est régulière, elle coïncide avec le prolongement extérieur de μ. Si E est un espace uniforme et m une "mesure extérieure de Carathéodory sur E", c'est-à-dire une application : $\mathfrak{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, croissante, dénombrablement sous-additive, vérifiant $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ lorsque A et B sont "éloignées" dans E (i. e. telles que $\complement(A \times B)$ soit un entourage de E), tout ensemble fermé F qui est intersection des $V_n(F)$ pour une suite d'entourages (V_n) de E, est m-mesurable (en particulier tout quasi-compact fermé de Baire est mesurable, toute fonction uniformément continue est mesurable) ; si E est un espace métrique, tout ensemble analytique est m-mesurable. Le prolongement extérieur définit une bijection des mesures régulières de Carathéodory, sur les mesures sur un clan complet $\mathcal{C}$ de E, tel que, pour tout fermé F possédant la propriété ci-dessus, $A \in \mathcal{C}$ entraîne $A \cap F \in \mathcal{C}$.

Soient E un espace métrique, d sa distance, φ une fonction : $\mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, croissante, continue à gauche et nulle à l'origine. Soit $A \subset E$; pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\Phi_\varepsilon(A)$ la borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ (pour toutes les partitions dénombrables $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A, telles que le diamètre $\delta(A_i)$ de chaque A_i soit $\leqslant \varepsilon$) des nombres $\sum_{i\in\mathbb{N}} (\varphi(\delta(A_i)))$; lorsque $\varepsilon \to 0$, on pose :

$$\Phi(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon(A) \quad .$$

Φ est une mesure de Carathéodory sur E, régulière si φ est continue ; elle vérifie la propriété "de Kolmogorov" : s'il existe une rétraction de $A \subset E$ sur $B \subset E$, alors $\Phi(B) \leqslant \Phi(A)$. Lorsque $\varphi(r) = 2^{-k}\alpha(k)\, r^k$ (k entier positif, $\alpha(k)$ mesure de Lebesgue de la boule unité de $\mathbb{R}^k$ pour la norme euclidienne), Φ est appelée mesure k-dimensionnelle de Hausdorff ; sur $\mathbb{R}^k$, elle coïncide avec la mesure de Lebesgue ; on la notera H_n^k sur $\mathbb{R}^n$. KOLMOGOROV [15] a démontré le théorème suivant :

Les mesures de Carathéodory sur $\mathbb{R}^n$, possédant la propriété de Kolmogorov et égale à 1 sur le cube unité de $\mathbb{R}^k$, sont comprises entre deux mesures extrémales :

$$m_k(E) = \sup \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} H_k^k(\pi_i(G_i))\right)$$

(pour toutes les partitions dénombrables $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de E et toutes les rétractions $\pi_i : G_i \to \mathbb{R}^k$) ;

$$M_k(E) = \inf \left(H_k^k(\pi^{-1}(E))\right)$$

(pour toutes les rétractions $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \pi(\mathbb{R}^k)$) ; de plus sur les ensembles E tels que $M_k(E) < +\infty$ (ensembles dits k-rectifiables) ces mesures coïncident toutes avec le nombre $\int_{\pi^{-1}(E)} |J_\pi(x)\, dx$, où J_π est le vecteur jacobien de la rétraction π supposée injective sur $\pi^{-1}(E)$ (bien qu'elles ne coïncident pas nécessairement en tant que mesures). Divers procédés pour définir des mesures k-dimensionnelles dans $\mathbb{R}^n$ sont étudiés dans FEDERER [5] ; ce dernier donne un théorème généralisant le théorème de Kolmogorov à ces mesures.

2. Propriétés de l'aire d'une surface polyédrale.

Une surface polyédrale f, de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, est une application continue et affine par morceaux d'un polyèdre de dimension k dans $\mathbb{R}^n$. On définit l'aire k-dimensionnelle de f, $L_k(f)$, de la façon suivante : à toute subdivision simpliciale (S_i) de P, f étant affine sur chaque S_i, on fait correspondre la somme des aires k-dimensionnelles des simplexes $f(S_i)$, qui est indépendante de la subdivision choisie et possède les propriétés suivantes :

- Additivité. - Pour toute subdivision (P_j) de P, f_j désignant la surface, on a :

$$L_k(f) = \sum_j L_k(f_j) \quad .$$

- Propriété des projections. - Soient $(p_i)_{1 \leq i \leq C_n^k}$ les projecteurs de $\underset{\sim}{R}^n$ sur les C_n^k espaces de coordonnées de dimension k, on a :

$$\Big(\sum_{1 \leq i \leq C_n^k} (L_k(p_i \circ f))^2\Big)^{1/2} \leq L_k(f) \leq \sum_{1 \leq i \leq C_n^k} L_k(p_i \circ f)$$

(on le voit immédiatement en se plaçant dans $\Lambda^K(\underset{\sim}{R}^n)$ muni de sa norme euclidienne).

- Principe de Kolmogorov. - Soient deux surfaces polyédrales f et $g : P \to \underset{\sim}{R}^n$, $(S_j)_{1 \leq j \leq r}$ une subdivision simpliciale de P, f et g étant affines sur chaque S_j. Si pour tout couple (x, y) de sommets de la subdivision, on a

$$|g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| \quad ,$$

alors

$$L_k(g) \leq L_k(f) \quad .$$

- Semi-continuité inférieure (propriété forte). - Soit $f : P \to \underset{\sim}{R}^n$ une surface polyédrale. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset P$, qu'on peut supposer disjoint du bord de P, et un nombre $\alpha > 0$, avec la propriété suivante : pour toute surface polyédrale $g : Q \to \underset{\sim}{R}^n$, s'il existe une application continue $\varphi : K \to Q$, avec

$$(\sup_{x \in K} |f(x) - g(\varphi(x))|) \leq \alpha \quad ,$$

alors

$$L_k(g) \geq L_k(f) - \varepsilon \quad .$$

(Propriété qui entraîne la "propriété faible" de semi-continuité inférieure de L_k sur l'espace des surfaces polyédrales : $P \to \underset{\sim}{R}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte.)

LEMME. - Soit h une application continue : $U \to \underset{\sim}{R}^k$ (U étant un ouvert de $\underset{\sim}{R}^k$) différent de l'identité de moins de ε. L'ensemble V des points dont la distance à $\complement U$ est $> \varepsilon$ est contenu dans l'image de U par h. (Démonstration : un point x_0 V est tel que la boule fermée $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ soit contenue dans U ; on applique le théorème du point fixe de Brouwer à l'application : $x \to x - f(x) + x_0$ de $\overline{B}(X_0, \varepsilon)$ dans elle-même ; un tel point fixe y vérifie $x_0 = f(y)$.)

La propriété en résulte ; on se ramène successivement :

- au cas où f est affine injective d'un simplexe de dimension k dans $\underset{\sim}{R}^n$.

- au cas $n = k$, en projetant g sur le sous-espace de $\underset{\sim}{R}^n$ engendré par le simplexe image de f au lemme, en composant avec f^{-1}.

3. Définition de Lebesgue de l'aire d'une surface à bord dont la variété source est triangulable.

Pour obtenir une aire prolongeant l'aire des surfaces polyédrales, semi-continue inférieurement et invariante par équivalence des surfaces, LEBESGUE a donné la définition suivante :

Définition. - Soient : f une application continue d'une variété à bord triangulaire V de dimension k, dans $\underset{\sim}{R}^n$; (g) la famille des surfaces : $V \to \underset{\sim}{R}^n$; (P, φ) la famille des couples d'un polyèdre P, et d'un homéomorphisme φ de P sur V (famille non vide puisque V est triangulable). L'aire de Lebesgue est définie par la formule :

$$L_k(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\begin{array}{l} \inf\limits_{(g,P,\varphi)} L_k(g \circ \varphi) \\ \\ g \circ \varphi \text{ est affine par morceaux sur } P \text{, et } \left(\sup\limits_{x \in V} |g(x) - f(x)|\right) \leq \varepsilon \end{array} \right).$$

Cette définition est justifiée : en effet, d'après le théorème de ~~Stone-Weierstrass~~, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application affine par morceaux : $P \to \underset{\sim}{R}^n$, approchant $f \circ \varphi$ à moins de ε ; d'après la propriété forte de semi-continuité inférieure citée plus haut, la définition coïncide avec la définition précédente sur les surfaces polyédrales. L'aire de Lebesgue L_k est invariante par équivalence des surfaces (évident) ; de la propriété faible de semi-continuité inférieure citée plus haut, on déduit la propriété analogue pour l'aire de Lebesgue.

FEDERER ([6], p. 334-335) a démontré le résultat suivant : soit f une surface : $P \to \underset{\sim}{R}^n$, P étant un polyèdre de dimension k (resp. f étant de la forme $(x, g(x))$, P étant contenu dans $\underset{\sim}{R}^k$ et g étant une application continue : $P \to \underset{\sim}{R}^{n-k}$). Il existe une suite (f_q) de surfaces polyédrales : $P \to \underset{\sim}{R}^n$ (resp. et on peut supposer que f_q est de la forme $(x, g_q(x))$) convergeant uniformément vers f et telle que l'on ait

$$\left(\lim_{q \to \infty} L_k(f_q)\right) = L_k(f) \quad .$$

De ce résultat, on déduit immédiatement la propriété de semi-continuité forte telle qu'elle a été énoncée plus haut.

L'aire de Lebesgue possède les propriétés suivantes, démontrées dans FEDERER ([6] et [7]) :

- Additivité. - Elle s'énonce, pour une surface $f : P \to \mathbb{R}^n$ (P polyèdres), comme pour le cas des surfaces polyédrales.

- Propriété des projections. - Soit f une surface : $V \to \mathbb{R}^n$, telle que l'image $f(V)$ soit de mesure $(k+1)$-dimensionnelle de Hausdorff nulle, ou que $k \leq 2$. Soient $(p_i)_{1 \leq i \leq C_n^k}$ les projecteurs de $\mathbb{R}^n$ sur les espaces de coordonnées de dimension k. On a

$$L_k(f) \leq \overline{\sum_{1 \leq i \leq C_n^k}} (L_k(p_i \circ f)) \quad .$$

- Principe de Kolmogorov. - Soient f et g deux surfaces : $V \to \mathbb{R}^n$. S'il existe une rétraction $\varphi : f(V) \to \mathbb{R}^n$, telle que $g = \varphi \circ f$, alors $L_k(g) \leq L_k(f)$. (Pour la démonstration on utilise un résultat (MICKLE [17]) selon lequel une rétraction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ peut se prolonger en une rétraction : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; la propriété est alors immédiate à partir de son analogue pour les surfaces polyédrales.)

- Valeur pour les applications lipschitziennes. - Soit f une application lips-lipschitzienne d'un simplexe S dans $\mathbb{R}^n$, et soit $J(x)$ le jacobien en x de f (qui est un k-vecteur défini presque partout), alors

$$L_k(f) = \int_S |J(x)| \, dx \quad .$$

Remarques.

(i) Le problème de l'unicité d'une application : $C(P, \mathbb{R}^n) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (P polyèdre de dimension k), coïncidant avec l'aire des surfaces polyédrales, semi-continue inférieurement pour la norme de la convergence uniforme, et vérifiant les propriétés d'additivité, des projections et de Kolmogorov a été résolu négativement dans le cas général ; on ignore sa solution dans le cas $k = 2$, $n = 3$. (Pour $k = 1$, il est évidemment résolu affirmativement.)

(ii) A propos de la propriété de la projection, il est nécessaire de remarquer que, d'après BESICOVITCH [2], il existe des surfaces : $V \to \mathbb{R}^n$ d'aire finie et de mesure de Lebesgue non nulle dans $\mathbb{R}^n$, même quand $k = 2$, $n = 3$, ce qui ne se produit jamais quand $k = 1$. En effet, dans ce dernier cas, on parvient à relier la longueur à la mesure de Hausdorff par la formule

$$L_1(f) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} N(x)\ dH_n^1(x) \qquad ,$$

$N(x)$ désignant le nombre (éventuellement $+\infty$) de solutions de l'équation $f(y) = x$ (FEDERER [6]).

4. Définition de l'aire de Lebesgue d'une surface sans bord lorsque la variété source est triangulable.

Soient : f une application continue d'une variété V triangulable, de dimension k, dans $\underset{\sim}{R}^n$; (P, φ) la famille des couples d'un polyèdre P et d'une injection continue $\varphi : P \to V$. On pose

$$L_k(f) = (\sup_{(P,\varphi)} L_k(f \circ \varphi)) \qquad .$$

D'après la propriété forte de semi-continuité inférieure, l'aire d'une surface à bord $f : V \to \underset{\sim}{R}^n$ est égale à l'aire de la surface sans bord $f/(V - \partial V)$: $(V - \partial V) \quad \underset{\sim}{R}^n$, ce qui justifie la notation employée.

Pour cette notion, on a des propriétés de semi-continuité inférieure, des projections, de Kolmogorov, qui s'énoncent comme pour les surfaces à bord.

5. Enoncé de la caractérisation de Federer des surfaces à bord d'aire de Lebesgue finie.

Le résultat obtenu est relatif aux surfaces à bord $f : V \to \underset{\sim}{R}^n$ (V de dimension k) telles que $H_n^{k+1}(f(V)) = 0$. D'après la propriété des projections, on peut alors se ramener au cas $k = n$. FEDERER, dans [6], définit la multiplicité combinatoire $M(x)$ en $x \in \underset{\sim}{R}^k$ d'une surface à bord $f : V \to \underset{\sim}{R}^k$, de la façon suivante : pour tout ouvert U de $\underset{\sim}{R}^k$, relativement compact et connexe, et pour toute composante connexe C de $f^{-1}(U)$, $D(f, U, C)$ désigne le degré de l'application f/C (au sens de la topologie algébrique) ; on pose alors

$$M(U) = \sum_{(C)} (D(f, U, C)) \quad \text{et} \quad M(x) = \sup_{x \in U} M(U) \qquad .$$

Le résultat est alors le suivant :

THÉORÈME. - Pour que la surface à bord $f : V \to \underset{\sim}{R}^k$ ait une aire de Lebesgue finie, il faut et il suffit que $\int_{\underset{\sim}{R}^k} M(x)\ dx$ soit finie ; on a alors

$$L_k(f) = \int_{\underset{\sim}{R}^k} M(x)\ dx \qquad .$$

Remarques.

(i) Dans [7], FEDERER a défini d'une façon générale la multiplicité de $f : V \to \mathbb{R}^n$ en $x \in \mathbb{R}^n$, et obtenu un résultat analogue (en remplaçant la mesure de Lebesgue par la mesure de Hausdorff).

(ii) La multiplicité de Federer coïncide avec celle de Banach dans les cas $(k = 1)$ et (f lipschitzienne, k quelconque).

Deuxième partie

Fonctions numériques à variation bornée sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On se place d'abord dans le cadre de la théorie des distributions ; pour les définitions et notations, on se réfère aux livres de L. SCHWARTZ ([21] et [22]). On utilisera, pour l'interprétation de certains résultats, les définitions et notations relatives aux espaces vectoriels topologiques et bornologiques (evtb), étudiées dans un Séminaire à l'Ecole Normale Supérieure, sous la direction de C. HOUZEL (non publié).

Soit E un espace vectoriel sur un corps valué k, complet, non discret. Une bornologie sur E est une famille de parties de E (dites bornées), stable par réunion finie et inclusion, somme et homothétie ; elle est de type convexe si l'enveloppe disquée d'un borné est bornée. La catégorie (evb) des espacec vectoriels bornologiques, a pour objets les espaces vectoriels munis d'une bornologie, pour morphismes les applications linéaires bornées (i. e. telles que l'image de tout borné soit bornée). Une topologie et une bornologie sur un espace vectoriel E sont compatibles, si les voisinages de 0 absorbent les bornés, et si l'adhérence d'un borné est bornée ; la donnée d'une topologie et d'une bornologie compatible définit sur E une structure d'espace vectoriel topologique et bornologique. La catégorie (evtb) a pour objets ces espaces, pour morphismes les applications linéaires continues et bornées. Un evtb est dit de type convexe, si sa topologie est localement convexe et sa bornologie de type convexe.

Un evtb est dit séparé (resp. quasi-complet) si sa topologie est séparée (resp. et si tout borné fermé est complet). Le foncteur d'inclusion des evtb séparés (resp. quasi-complets) dans les evtb admet un adjoint noté $E \rightsquigarrow \dot{E}$ (resp. $E \rightsquigarrow \widehat{E}$). (Séminaire Houzel, chap. I et II.)

Le dual d'un evtb E est l'espace E' des formes linéaires sur E, continues ($\Longrightarrow$ bornées), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E, et de la bornologie des parties équicontinues ; c'est un evtb de type convexe et quasi-complet (Séminaire Houzel, chap. I et III).

Le produit tensoriel $E \otimes_{\pi bc} F$ de deux evtb de type convexe E et F, est l'espace $E \otimes F$ muni de la structure d'evtb de type convexe la plus fine rendant continue et bornée la forme bilinéaire canonique : $E \times F \to E \otimes F$. Si $k = \underset{\sim}{R}$, on définit l'espace $L^1(E)$, des classes de fonctions intégrables sur un espace mesuré (T, μ) à valeurs dans un evtb de type convexe E, comme le séparé de l'evtb $\mathcal{L}^1(E)$ défini de la façon suivante : un élément de $\mathcal{L}^1(E)$ est une fonction f, μ-mesurable : $T \to E$, telle qu'il existe au moins une jauge p d'un borné, avec $\mu^*(p \circ f) < +\infty$; la topologie est définie par les semi-normes $\mu^*(q \circ f)$ où q est une semi-norme continue sur E ; la bornologie est définie par les semi-normes $\mu^*(p \circ f)$ où p est une jauge de borné. On a alors un isomorphisme canonique $L^1(E) \simeq L^1 \widehat{\otimes}_{\pi bc} E$ (Séminaire Houzel, chap. IV). Ensuite on appliquera les résultats obtenus à l'étude de l'aire des hypersurfaces non paramétriques, d'après KRICKEBERG [16].

1. Espace des fonctions à variation bornée.

Cadre. – Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. Dans la catégorie (evt) (resp. (evtb)) un espace de distributions sur Ω est un monomorphisme $i : E \to \mathcal{D}'(\Omega)$; un monomorphisme d'inclusion de $i : E \to \mathcal{D}'$ dans $j : F \to \mathcal{D}'$ est un morphisme de (evt) (resp. (evtb)) $k : E \to F$, tel que $i = j \circ k$ (k est donc unique et injectif). Soient $i : E \to \mathcal{D}'$ et $j : F \to \mathcal{D}'$ deux espaces de distributions (dans une des catégories (evt, (evtb)) ; $(D_k)_{1 \leq k \leq m}$ m dérivations dans Ω ; l'espace des distributions de E dont les dérivées D_k sont dans F et la limite projective $(G, p, (q_k)_{1\leq k\leq m})$ du diagramme

$$\left(\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "i"] & \mathcal{D}' \arrow[dd, "D_k"] \\ G \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q_k"'] & & \\ & F \arrow[r, "j"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd}\right)_{1\leq k\leq m} .$$

$i \circ p$ est un espace de distributions. L'espace des fonctions dont les dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{1\leq k\leq n}$ sont dans $\mathcal{M}(\Omega)$ (espace des mesures sur Ω muni de la topologie forte) : il est donc muni de la topologie la moins fine rendant continues l'inclusion dans

$\mathcal{D}'(\Omega)$ et les dérivations dans $\mathcal{M}(\Omega)$; en particulier il est localement convexe et complet. D'après (SCHWARTZ [21], chap. VI, § 6), il possède les propriétés suivantes :

- il existe un monomorphisme d'inclusion : $BV(\Omega) \to L^p_{loc}(\Omega)$ pour $1 \leqslant p < \frac{n}{n-1}$. Autrement dit $BV(\Omega)$ est l'espace des distributions de L^p_{loc} dont les dérivées sont dans $\mathcal{M}(\Omega)$; en particulier c'est un espace de Fréchet ([21], théorème XV).

- le morphisme $(\frac{\partial}{\partial x_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$ de $BV(\Omega)$ dans $(\mathcal{M}(\Omega))^n$ est strict ([21], remarque 2 suivant le théorème XV).

- tout borné de $BV(\Omega)$ est relativement compact dans L^p_{loc} $(1 \leqslant p < \frac{n}{n-1})$ ([21], théorème XVI, et remarque suivant le théorème XVII) ; en particulier $\mathcal{D}'$ et les L^p_{loc} $(1 \leqslant p < \frac{n}{n-1})$ induisant sur les bornés de $BV(\Omega)$ la même topologie.

Remarque. - On peut déduire très simplement ces trois résultats, dans le cas $p = 1$ (de beaucoup le plus facile, mais dont on peut se contenter dans la suite) du lemme suivant (de GIORGI [14], lemme 1) ; soit f une fonction numérique de classe C^1 définie dans un cube K de $\underset{\sim}{R}^n$, de côté ℓ ; si

$$\int_K f(x)\ dx = 0 \qquad ,$$

on a l'inégalité :

$$\int_K |f(x)|\ dx \leqslant \ell . \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\int_K \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|\ dx\right)$$

(cf. troisième partie, reparque 1 précédant le n° 2).

FEDERER et FLEMING ([10], théorème 6.4) ont démontré que le premier résultat ci-dessus est valable pour $p = \frac{n}{n-1}$ (mais non le troisième). On va donner de ce fait une démonstration plus élémentaire que la leur, copiée sur de GIORGI ([13], théorème 7).

LEMME. - Soit φ une fonction numérique définie sur $\underset{\sim}{R}^n$, localement lipschitzienne et nulls à l'infini. Soit K un compact : si $\varphi(x) \geqslant 1$ sur K, on a : $(\|\varphi_K\|_{n/(n-1)}) \leqslant c_n . \|\text{grad}\ \varphi\|$, où c_n est une constante ne dépendant que de n. (Remarque : la démonstration ci-dessous donne $c_n = \frac{1}{2}$; d'après FEDERER et FLEMING, la meilleure possible est $n^{-1}(\alpha(n))^{-1/n}$ (déduite de l'inégalité de Brunn-Minkowski)).

Démonstration ; on va procéder par récurrence sur n en démontrant l'inégalité sous la forme

$$(\int_K dx)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (\sup_k |\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}|)\ dx \quad .$$

Le lemme est évident pour $n = 1$. Supposons le vrai pour n , et écrivons un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ sous la forme $(y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Posons :

$$K_y = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}}(K \cap (\{y\} \times \mathbb{R})) \ ; \quad K_z = \mathrm{pr}_{\mathbb{R}^n}(K \cap (\mathbb{R}^n \times \{z\})) \ ;$$

$$K_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid K_y \text{ est de mesure non nulle}\} \quad .$$

Pour presque tout $z \in \mathbb{R}$, $K_z \cap \complement K_1$ est de mesure nulle (en effet $K \cap \complement(K_1 \times \mathbb{R})$ est de mesure nulle).

D'après le théorème de Fubini, on a les deux inégalités :

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\sup_{1\leq k\leq n+1} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}|)\ dx \geq \int_{\mathbb{R}} dz \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (\sup_{1\leq k\leq n} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}|)\ dy\Big) \ ,$$

$$\text{et} \quad I \geq \int_{\mathbb{R}^n} dy \Big(\int_{\mathbb{R}} |\frac{\partial\varphi}{\partial z}|\ dz\Big) \quad .$$

La première inégalité et l'hypothèse de récurrence entraînent

$$\frac{I}{2} \geq \int_{\mathbb{R}} dz \Big(\int_{K_z} dy\Big) \quad .$$

La deuxième inégalité et le lemme pour $n = 1$ entraînent

$$\frac{I}{2} \geq \int_{K_1} dy \geq \int_{K_z} dy$$

pour presque tout z . D'où, en combinant

$$2^{-(n+1)/n}\ I^{(n+1)/n} \geq \int_{\mathbb{R}} dz \Big(\int_{K_z} dy\Big) = \int_K dx \quad .$$

Q. E. D.

THÉORÈME (FEDERER et FLEMING). - Soit E une distribution sur $\mathbb{R}^n$ nulle à l'infini, dont les dérivées partielles sont des mesures bornées. Alors $T \in L^{n/(n-1)}$ et on a l'inégalité

$$\|T\|_{n/(n-1)} \leq c_n . \|\mathrm{grad}\ T\|$$

(la notation $\| \ \|$ désignant la masse totale d'une mesure scalaire ou vectorielle).

<u>Démonstration</u>. - Supposons d'abord que T soit une fonction lipschitzienne à support compact. Pour tout $\alpha > 0$, posons : $T_\alpha = T$ tronquée entre $-\alpha$ et α

$$u(\alpha) = \|T_\alpha\|_{n/(n-1)} \qquad v(\alpha) = \|\mathrm{grad}\ T_\alpha\|_1 \qquad K_\alpha = \varphi^{-1}([\alpha\ , \to[) \quad .$$

Les fonctions u et v sont croissantes, absolument continues et nulles à l'origine : il suffit donc de montrer l'inégalité $\frac{du}{d\alpha} \leq \frac{dv}{d\alpha}$ presque partout. Or :

- d'une part pour tout $h > 0$, on a

$$u(\alpha + h) \leq u(\alpha) + h\|\varphi_{K_\alpha}\|_{n/(n-1)} \quad ,$$

donc : $\frac{du}{d\alpha} \leq \|\varphi_{K_\alpha}\|_{n/(n-1)}$ presque partout ;

- d'autre part, d'après le lemme, pour tout $\alpha > 0$ et tout k, $0 < k \leq \alpha$, on a :

$$\|\varphi_{K_\alpha}\|_{n/(n-1)} \leq \frac{v(\alpha) - v(\alpha - k)}{k} \quad ,$$

(en effet pour presque tout $x \in \underset{\sim}{R}^n$,

$$\text{grad } T_\alpha = \text{grad } T_{\alpha-k} \ , \quad \text{ou} \quad \text{grad } T_{\alpha-k} = 0 \quad ,$$

donc

$$|\text{grad } T_\alpha| - |\text{grad } T_{\alpha-k}| = |\text{grad}(T_\alpha - T_{\alpha-k})|$$

donc $\|\varphi_{K_\alpha}\|_{n/(n-1)} \leq \frac{dv}{d\alpha}$ presque partout. Ces deux inégalités démontrent le théorème dans ce cas.

Si maintenant T est localement lipschitzienne et nulle à l'infini, on applique le résultat précédent aux fonctions $(T - \alpha)_+$ pour $\alpha > 0$, et on applique le théorème de Beppo Levi quand α tend vers 0.

Dans le cas général, on régularise par une suite (α_p) de fonctions de $\mathcal{D}$, à support tendant vers 0, positives et d'intégrale 1. Pour tout p, $T \star \alpha_p \in \mathcal{B}$ (SCHWARTZ [21], chap. VI théorème XXV), donc d'après le résultat précédent

$$T \star \alpha_p \in L^{n/(n-1)} \quad \text{et} \quad \|T \star \alpha_p\|_{n/(n-1)} \leq c_n . \|\text{grad}(T \star \alpha_p)\|_1 \quad .$$

Or : la régularisation n'augmente pas la masse totale, donc

$$\|\text{grad}(T \star \alpha_p)\|_1 \leq \|\text{grad } T\| \quad ;$$

autrement dit la suite $(T \star \alpha_p)$ est bornée en norme dans $L^{n/(n-1)}$ par $c_n\|\text{grad } T\|$. Comme elle converge vers T dans $\mathcal{D}'$, que la boule unité de L^p est compacte dans $\mathcal{D}'$ pour $p > 1$ et que la convolution est continue : $L^p \times \mathfrak{M}^1 \to L^p$, $T \in L^{n/(n-1)}$, $T \star \alpha_p$ converge vers T dans $L^{n/(n-1)}$ et on a

$$\|T\|_{n/(n-1)} \leq c_n . \|\text{grad } T\| \quad .$$

D'après ce théorème, l'espace des distributions nulles à l'infini dont les dérivées sont dans $\mathfrak{M}^1$ est isomorphe (comme evt) à l'espace des distributions de

$L^{n/(n-1)}$ dont les dérivées sont dans $\mathcal{M}^1$; ce dernier est un espace de Banach. Le théorème est également vrai dans un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$ (évident).

De ce théorème on déduit un monomorphisme d'inclusion : $BV(\Omega) \to L^{n/(n-1)}_{loc}(\Omega)$. En effet la multiplication $(\alpha , T) \to \alpha T$: $\mathcal{E} \times BV \to BV$ est continue, et BV possède la propriété d'approximation par troncature ; il suffit alors d'appliquer cette dernière propriété. (D'une façon générale, soit un diagramme :

$$\left(\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "i"] & \mathcal{D}' \arrow[dd, "D_k"] \\ G \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q_k"'] & & \\ & F \arrow[r, "j"] & \mathcal{D}' \end{tikzcd}\right)_{1\leq k\leq m}$$

si $\mathcal{D} \to E$ et $\mathcal{D} \to F$, alors $\mathcal{D} \to G$; si de plus $E \to F$, et si la multiplication $(\alpha , T) \to \alpha T$ est $\mathcal{D} \times E \to E$ et $\mathcal{D} \times F \to F$, et continue (resp. hypocontinue), alors elle est $\mathcal{D} \times G \to G$ et continue (resp. hypocontinue) ; si de plus E et F possèdent la propriété d'approximation par troncature, il en est de même de G.)

2. Structure des fonctions dont certaines dérivées partielles sont des mesures.

Rappelons le théorème suivant (SCHWARTZ [21], chap. II, théorème VI) : pour que, dans $\underset{\sim}{R}^n$ considéré comme le produit $\underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^{n-m}$, le système d'équations dans $\mathcal{D}'$: $\dfrac{\partial T}{\partial x_k} = S_k$ $(1 \leq k \leq m)$, d'inconnue T, admette au moins une solution, il faut et il suffit que les S_k vérifient la condition de compatibilité :

$$\frac{\partial S_k}{\partial x_\ell} = \frac{\partial S_\ell}{\partial x_k} .$$

THÉORÈME (KRICKEBERG [16]). - Pour que dans $\underset{\sim}{R}^n = \underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^{n-m}$, le système d'équations compatible dans $\mathcal{D}'$: $\dfrac{\partial T}{\partial x_k} = \mu_k$ $(1 \leq k \leq m)$ d'inconnue T, où les μ_k sont des mesures sur $\underset{\sim}{R}^n$, admette au moins une solution dans $L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$, il faut et il suffit que la mesure de Lebesgue dans $\underset{\sim}{R}^{n-m}$ soit pseudo-image (par la projection) de chaque mesure μ_k.

Démonstration. - La condition est nécessaire : bornons-nous au cas où T a un support compact K (dans le cas général, soit $x \in \underset{\sim}{R}^n$; on tronque par $\alpha \in \mathcal{D}$ égale à 1 au voisinage de x ; αT est à support compact et (au voisinage de x)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha T) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_k}\right) T + \alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$$

diffère de μ_k d'une fonction). Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, choisissons $\varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$, à valeurs dans $[-1, +1]$, telle que $\|\varphi\mu_k - |\mu_k|\| \leqslant \varepsilon$; posons

$$\gamma = \sup_{\underset{\sim}{R}^n} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right| \quad .$$

On va montrer qu'étant donné un compact $K_1 \subset \underset{\sim}{R}^{n-m}$ négligeable pour la mesure de Lebesgue, en posant $L_1 = \mathrm{pr}^{-1}_{\underset{\sim}{R}^{n-m}}(K_1)$, on a $|\int_{L_1} \varphi d\mu_k| \leqslant \varepsilon$, ce qui démontrera le résultat. Pour cela on choisit un ouvert Ω_1 de R^{n-m}, contenant K_1 et tel que :

$$\int_{\mathrm{pr}^{-1}_{\underset{\sim}{R}^{n-m}}(\Omega)} d(|\mu_k|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} , \qquad \int_{\Omega_1} dz \leqslant \frac{\varepsilon}{2\gamma\|T\|_1} \quad .$$

Soient : ψ une fonction de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^{n-m})$ égale à 1 sur K, à valeurs dans $[0, 1]$ et à support dans Ω_1 ; χ la fonction de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^n)$: $(y, z) \to \varphi(y ; z).\psi(z)$. On

$$\int_{L_1} \varphi d\mu_k = \int_{L_1} \chi d\mu_k \ ; \quad \left|\int_{\complement L_1} \chi d\mu_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ ; \quad \left|\int_{\underset{\sim}{R}^n} \chi d\mu_k\right| = \left|\int_{\underset{\sim}{R}^n} T \frac{\partial \chi}{dx_k} dx\right|$$

$$= \left|\int_{\underset{\sim}{R}^n} T\psi \frac{\partial \varphi}{dx_k} dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} ,$$

Q. E. D.

La condition est suffisante : soit H l'espace vectoriel (sans structure) des mesures sur $\underset{\sim}{R}^n$ possédant la propriété : d'après le théorème de désintégration des mesures, c'est l'espace vectoriel sous-jacent à $L^1_{loc}(z)\,(\mathcal{M}^\sigma(y))$ (= séparé de l'espace des fonctions localement intégrables à valeurs dans l'evtb des mesures sur $\underset{\sim}{R}^m$, muni de la topologie faible et de la bornologie de l'équicontinuité). En fait, on va construire un projecteur p, de l'espace vectoriel E des distributions sur $\underset{\sim}{R}^n$ dont les dérivées $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ sont dans H, dans l'espace vectoriel F des fonctions possédant la même propriété, tel que l'on ait $\frac{\partial}{\partial x_k} \circ p = \frac{\partial}{\partial x_k}$, et que $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ soit injectif : $F \to H^m$. Dans le cas $m = n$: $E = BV(\underset{\sim}{R}^m)$; soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{R}^m)$ d'intégrale non nulle, le projecteur $q : T \to (T - \langle T , \varphi \rangle)$ possède la propriété, et de plus $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ définit un isomorphisme d'evt de $F_0 = q(BV(\underset{\sim}{R}^m))$ sur l'image M du morphisme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{1 \leqslant k \leqslant m} : \ BV(\underset{\sim}{R}^m) \to (\mathcal{M}(\underset{\sim}{R}^m))^m \quad .$$

Il s'ensuit que, par cet isomorphisme, les bornés sont homologues, et que, sur un couple de bornés homologues, les topologies induites respectivement par $L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^m)$

et par $(\mathfrak{M}^\sigma(\underset{\sim}{R}^m))^m$ sont isomorphes. (Evident, car ce sont les topologies induites respectivement par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}'^m$, et la dérivation est un morphisme strict : $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'^m$.)

Cas général. - Deux remarques préliminaires :

(i) $\mathcal{D}$ a un ensemble dénombrable partout dense, donc le morphisme canonique $L^1_z(\mathfrak{M}^\sigma_y) \to L^1_z(\mathcal{D}'^\sigma_y)$ est injectif ;

$$L^1_z(\mathcal{D}'^\sigma_y) \subset L^1_z(\mathcal{D}'_y) \ , \quad L^1_z(\mathcal{D}'_y) = \mathcal{D}'_y \hat{\otimes} L^1_z = \mathcal{D}'_y(L^1_z)$$

s'envoie par un monomorphisme dans $\mathcal{D}'_y(\mathcal{D}'_z) = \mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$.

(ii) Si E est un evtb de type convexe, l'espace vectoriel bornologique sous-jacent à $L^1(E)$ ne dépend que des bornés de E et de la topologie induite par E sur ces bornés.

De la remarque (i), on déduit que $\frac{\partial T}{\partial x_k} \in L^1_{loc}(z)(M^\sigma_y)$ si T vérifie les conditions de l'énoncé (il suffit de relever dans $\mathcal{L}^1_{loc}(z)((\mathfrak{M}^\sigma_y)^m)$) et de vérifier que l'application obtenue vérifie, pour presque tout z, les conditions de compatibilité) ; on relève par l'isomorphisme $F_0 \to M$, et on applique la remarque (ii) pour voir que le relèvement définit un élément unique de

$$L^1_{loc}(z)(L^1_{loc}(y)) = L^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n) \qquad ;$$

enfin, par la remarque (i) on vérifie que cet élément f est bien tel que $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \mu_k$.

En passant, on a démontré le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Soit $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\underset{\sim}{R}^n)$. Pour que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ soit une mesure, il faut et il suffit que, pour presque tout $(x_2 , \ldots , x_n) \in \underset{\sim}{R}^{n-1}$, la fonction $x_1 \to f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ soit égale presque partout à une fonction localement à variation bornée, et que, pour tout compact $K \subset \underset{\sim}{R}$, la variation totale de cette dernière fonction sur K soit par rapport à $(x_2 , \ldots , x_n)$, localement majorée par une fonction intégrale. Cette propriété caractéristique des fonctions localement à variation bornée sur $\underset{\sim}{R}^n$ a été utilisée par TONELLI (1926) pour démontrer le théorème qu'on va donner dans le numéro suivant.

3. Etude de l'aire des hypersurfaces non paramétriques.

Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$; notons $BV^1(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω dont les dérivées partielles du premier ordre sont dans $\mathfrak{M}^1(\Omega)$ (espace de Banach des mesures bornées sur Ω), qui est normable complet ; ses éléments sont appelés fonctions à variation bornée.

THÉORÈME (KRICKEBERG [16]). - Si Ω est de mesure de Lebesgue finie, pour que l'hypersurface définie par $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ait une aire de Lebesgue finie, il faut et il suffit que $f \in BV^1(\Omega)$; dans ce cas, on a la formule

$$L_n(f) = \left\| \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right)_{1 \leq k \leq n} , dx \right) \right\|$$

le deuxième nombre désignant la masse totale de la mesure $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right)_{1 \leq k \leq n} , dx \right)$ sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme euclidienne. (Dans le cas où f est localement lipschitzienne, cette formule redonne la formule classique

$$L_n(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2} \, dx \quad .)$$

<u>Démonstration</u>. - Ω étant quelconque, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, à chaque $\alpha \in \mathcal{K}_+(\Omega)$ on peut faire correspondre

$$\nu(\alpha) = \sup_{(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}} \left(\sum_{1 \leq i \leq r} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i \, dx \right)^2 + \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\langle T , \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \rangle \right)^2 \right)^{1/2} \right)$$

pour toutes les familles finies $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\sum_{1 \leq i \leq r} |\varphi_i(x)| \leq \alpha(x)$; pour que $\nu(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathcal{K}_+(\Omega)$, il faut et il suffit que $T \in BV(\Omega)$, au quel cas ν est la variation totale de la mesure $\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)_{1 \leq k \leq n} , dx \right)$. De même si on remplace α par 1, pour que le nombre $\mathcal{L}(T)$ donné par la formule précédente soit $< +\infty$, il faut et il suffit que Ω soit de mesure finie et que $T \in BV^1(\Omega)$, au quel cas $\mathcal{L}(T)$ est la masse totale de la mesure ν. Par suite (en supposant désormais Ω intégrable), $\mathcal{L}(T)$ est une application $\mathcal{D}'(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$, semi-continue inférieurement (sup. de fonctions continues), qui fournit la caractérisation de l'énoncé. On montre ensuite un lemme :

LEMME. - Soient ε un nombre positif, $\alpha \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0 , \varepsilon)$ (boule ouverte de rayon ε), et d'intégrale 1 ; Ω_ε l'ensemble ouvert des x tels que $\overline{B}(x , \varepsilon) \subset \Omega$, T_ε la distribution $T \star \alpha$ dans Ω_ε. On a $\mathcal{L}(T_\varepsilon) \leq \mathcal{L}(T)$. (En effet, en posant $\check{\alpha}(x) = \alpha(x)$, on sait que pour tout couple $(S , \varphi) \in \mathcal{D}' \times \mathcal{D}$, on a

$$\langle S \star \alpha , \varphi \rangle = \langle S , \check{\alpha} \star \varphi \rangle \qquad ;$$

d'autre part, pour toute famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq r}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$, on a

$\check{\alpha} \star \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\overline{\sum_{1\leq i\leq r}} |\check{\alpha} \star \varphi_i| \leq \check{\alpha} \star (\sum |\varphi_i|)$, et $\int (\check{\alpha} \star \varphi_i)\, dx = \int \varphi_i\, dx$.

comme $0 \leq f \leq 1$ dans Ω_ε entraîne $0 \leq (\alpha \star f) \leq 1$ dans Ω $f \in \mathcal{D}$, on vérifie immédiatement l'inégalité.)

Il reste à voir que $L_n(f) = \mathcal{L}(f)$ quand f est continue.

$L_n(f) \geq \mathcal{L}(f)$: il existe une suite (P_q , f_q) de polyèdres P_q , avec

$$P_q \subset P_{q+1} \text{ et } \bigcup \overset{\circ}{P}_q = \Omega \qquad ,$$

et de fonctions f_q continues, affines par morceaux sur P_q , convergeant uniformément sur tout compact vers f , avec

$$\lim_{q\to\infty} L_n(f_q) = L_n(f) \qquad .$$

Pour tout nombre $r < L(f)$, il existe q_0 tel que $\mathcal{L}(f/P_{q_0}) \geq r$ (pour toute famille filtrante croissante (Ω_i) d'ouverts, de réunion Ω , on a

$$\nu(\Omega) = \sup_i (\nu(\Omega_i))) \qquad ;$$

sur $\overset{\circ}{P}_{q_0}$, f_q tend vers f au sens des distributions donc

$$\mathcal{L}(f/P_{q_0}) \leq \liminf_{q\to\infty} \mathcal{L}(f_q/P_{q_0}) = \liminf_{q\to\infty} L_n(f_q/P_{q_0}) \leq \liminf_{q\to\infty} L_n(f_q) = L_n(f) \quad .$$

$L_n(f) \leq \mathcal{L}(f)$: on régularise f par une suite (α_q) de fonctions choisies comme dans le lemme avec $\varepsilon_q \to 0$, soit $f_q = f \star \alpha_q$ définie sur Ω_{ε_q} . Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe q_0 : $(q \geq q_0) \implies f_q$ est définie sur K et converge uniformément vers f sur K ; comme $f_q \in \mathcal{E}(\Omega)$. $\mathcal{L}(g_q) = L_n(f_q)$ d'après la première partie : la semi-continuité inférieure de L_n entraîne donc

$$L_n(f) \leq \liminf_{q\to\infty} L_n(f_q) = \mathcal{L}(f) \qquad .$$

Q. E. D.

<u>Remarque</u>. - On peut construire l'aire de Lebesgue des hypersurfaces non paramétriques de façon autonome d'après les résultats de FEDERER énoncés dans la première partie. On obtiendrait la définition suivante : soient $f : \Omega \to \underset{\sim}{R}$; (P , g) la famille d'un polyèdre $P \subset \Omega$, et d'une application $g : P \to \underset{\sim}{R}$, continue, affine par morceaux

$$L_n(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\inf_{(P,g) \,|\, (\Omega_\varepsilon \subset P) \text{ et } (\sup_{x\in P} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon)} L_n(g) \Big) \qquad .$$

D'après cette définition, le théorème précédent repose sur la validité pour les fonctions lipschitziennes de la formule

$$L_n(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{1\leq k\leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2}\, dx \qquad ,$$

laquelle résulte de l'existence d'une suite (P_q , f_q) d'approximations polyédrales de f avec la formule

$$\int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{1\leq k\leq n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2}\, dx = \lim_{q\to\infty} L_n(f_q)$$

(à cause de la semi-continuité inférieure de $\mathcal{L}(f)$. Ce dernier résultat est très facile à établir directement. On trouve un résultat beaucoup plus fort dans WHITNEY [23], p. 293, lemme 4 A, de sorte qu'en fait la théorie qu'on vient d'exposer est indépendante des résultats de la première partie qu'on a admis.

Troisième partie

Structure des ensembles de périmètre fini.

Un ensemble E contenu dans un ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$, et mesurable pour la mesure de Lebesgue, est dit de périmètre fini dans Ω si $\varphi_E \in BV^1(\Omega)$. Le périmètre de E est défini par la formule $P(E) = \|\text{grad}\ \varphi_E\|$ ($\text{grad}\ \varphi_E$ étant à valeurs dans $\underset{\sim}{R}^n$ muni de la norme euclidienne).

On dit qu'un ensemble $E \subset \Omega$ est localement de périmètre fini si $\varphi_E \in BV(\Omega)$. Un ensemble localement de périmètre fini, et relativement compact dans Ω , est de périmètre fini (la mesure $\text{grad}\ \varphi_E$ étant portée par $\overline{E}$). Les ensembles de périmètre fini (resp. localement de périmètre fini) forment un clan sur Ω . (En effet $BV(\Omega)$ est réticulé, d'après l'inégalité $|\text{grad}(|f|)| \leq |\text{grad}\ f|$ qu'on obtient par régularisation à partir de l'égalité $|\text{grad}(|f|)| = |\text{grad}\ f|$ valable quand les dérivées de f sont des fonctions) : en particulier pour qu'un ensemble E soit localement de périmètre fini, il faut et il suffit que, sur tout compact de Ω , il ait même trace qu'un ensemble de périmètre fini.

1. Exemples d'ensembles de périmètre fini.

La formule de Gauss-Green fournit les exemples les plus simples ; d'après l'exposé de cette formule de Whitney ([23], p. 94-103) et le théorème de Kolmogorov sur les mesures k-dimensionnelles de $\underset{\sim}{R}^n$, on a les résultats suivants :

(i) Un ensemble E de $\underset{\sim}{R}^n$, dont la frontière est un polyèdre de dimension $(n-1)$, est de périmètre fini, $\operatorname{grad}\varphi_E$ étant le mesure $-\nu(x)\ M_{n-1}(x)$ ($\nu(x)$ = vecteur unitaire de la normale orientée en x à E si $x \in \operatorname{fr}(E)$, $= 0$ si $x \notin \operatorname{fr}(E)$; M_{n-1} = mesure $(n-1)$-dimensionnelle). On déduit de là un exemple très général :

(ii) Soit $E \subset \Omega$ tel que, sur $\operatorname{fr}(E)$, la mesure de Hausdorff induise une mesure de Radon. Alors E est localement de périmètre fini (ce résultat sera précisé dans la suite).

(Démonstration : on va montrer que si $E \subset \underset{\sim}{R}^n$ et est relativement compact, il existe une constante K telle que

$$\|\operatorname{grad}\varphi_E\| \leqslant K . H_n^{n-1}(\operatorname{fr}(E)) \quad .$$

Soient $M > H_n^{n-1}(\operatorname{Fr}(E))$ et $\varepsilon > 0$: il existe une partition de $\operatorname{fr}(E)$, qu'on peut supposer finie ($\operatorname{fr}(E)$ étant compact), en ensembles $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ de diamètre $\leqslant \varepsilon$, telle que

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant q} 2^{1-n} . \alpha(n-1) . (\delta(A_i))^{n-1} \leqslant M \quad .$$

Il existe une constante $k > 0$ (ne dépendant que de n) telle que tout ensemble de $\underset{\sim}{R}^n$ de diamètre $\leqslant \delta$ soit contenu dans un polyèdre de diamètre $\leqslant 2\delta$ et d'aire $\leqslant k . \delta^{n-1}$. Pour chaque i, on construit un tel polyèdre P_i contenant A_i, et on considère l'ensemble $E \cup (\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} P_i)$: sa frontière est un polyèdre contenu dans $\bigcup_{1\leqslant i\leqslant q} \operatorname{fr}(P_i)$, donc d'aire $\leqslant \dfrac{2^{n-1}\ kM}{\alpha(n-1)}$; il contient E et en diffère d'un ensemble de mesure $\leqslant 2^n . \dfrac{\alpha(\ )}{\alpha(n-1)} . M$. Donc il existe une suite de polyèdres d'aire bornée par $\dfrac{2^{n-1}\ kM}{\alpha(n-1)}$ et convergeant en mesure vers E, ce qui montre le résultat avec $K = \dfrac{2^{n-1}\ k}{(n-1)}$).

(iii) On a le lemme suivant :

LEMME 1. – Soient $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de classe C^1 définie sur Ω,

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega \times \underset{\sim}{R} \mid x_{n+1} \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)\} \quad .$$

La distribution $\operatorname{grad}\varphi_E$ de $\Omega \times \underset{\sim}{R}$ est une mesure, image par $y \to (y, f(y))$ de la mesure $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - 1\right)\right)\ dy$; par suite cette mesure est égale à $-\nu(x)\ M(x)$ ($\nu(x)$ = vecteur unitaire de la normale orientée en x à E si

$x \in \mathrm{fr}(E)$, $= 0$ si $x \notin \mathrm{fr}(E)$. On peut remplacer la mesure maximale M_{n-1} de Kolmogorov par toute mesure $(n-1)$-dimensionnelle). (Pour la démonstration, cf. WHITNEY [23], p. 96, lemme 12 A ou faire un calcul de distributions.)

De façon analogue, on ramène l'étude de l'aire d'une hypersurface non paramétrique $f(x_1 , \dots , x_n)$ définie sur Ω , à l'étude de l'ensemble

$$E = \{ (x_1 , \dots , x_n , x_{n+1}) \in \Omega \times \underset{\sim}{R} \mid x_{n+1} \leq f(x_1 , \dots , x_n) \} .$$

Pour que E soit de périmètre fini, il faut et il suffit que f soit d'aire de Lebesgue finie auquel cas on a $P(E) = L_n(f)$. (Par régularisation, et en appliquant le lemme 1, on obtient $P(E) \leq L_n(f)$; d'autre part soit g la fonction $(x_1 , \dots , x_n , x_{n+1}) \to x_{n+1} - f(x_1 , \dots , x_n)$ tronquée entre 0 et 1 ; d'après les résultats de la deuxième partie $\|\mathrm{grad}\, g\| = L_n(f)$, et on a

$$g(x_1 , \dots , x_n , x_{n+1}) = \int_0^1 \varphi_E(x_1 , \dots , x_n , x_{n+1} + t)\, dt ,$$

d'où immédiatement $L_n(f) \leq P(E)$.) Pour que E soit localement de périmètre fini, il faut et il suffit que $f \in BV(\Omega)$.

Si $f \in BV(\Omega)$ et de plus est continue, ou si ses dérivées sont des fonctions, alors la mesure $\mathrm{grad}\, \varphi_E$ est l'image par $y \to (y , f(y))$ de la mesure $(\frac{\partial f}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n} , - dy)$ (ceci n'est pas vrai si f est quelconque : par exemple, f n'est pas nécessairement $|\mathrm{grad}\, f|$-mesurable).

(Démonstration : on peut la faire par régularisation : soient (f_q) une suite de régularisées de f , (E_q) les ensembles correspondants ; montrons que $\mathrm{grad}\, \varphi_{E_q}$ convergent vaguement vers l'image μ de $(\frac{\partial f}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_n} , - dy)$ par $y \to (y , f(y))$; soit μ_q l'image de $((\frac{\partial f_q}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial f_q}{\partial x_n} , - 1))\, dy$ par $y \to (y , f(y))$. μ_q converge vaguement vers μ quand f est continue, parce que $\varphi \to \varphi \circ f$ définit un isomorphisme de $\mathcal{K}(\mathrm{fr}(E))$ sur $\mathcal{K}(\Omega)$, quand les dérivées de f sont des fonctions, parce qu'il y a convergence forte. $\mu_q - \mathrm{grad}\, \varphi_{E_q}$ converge vaguement vers 0 quand f est continue, parce que f_q converge uniformément sur tout compact vers f ; si $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega \times \underset{\sim}{R})$, $\varphi \circ f - \varphi \circ f_q$ converge vers 0 au sens de la topologie forte de $\mathcal{K}(\Omega)$, les mesures $((\frac{\partial f_q}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial f_q}{\partial x_n} , - 1))\, dy$ restant bornées dans $\mathcal{M}(\Omega)$, si les dérivées de f dont des fonctions, parce que de toute sous-suite de (f_q) on peut extraire une nouvelle sous-suite telle que les fonctions $\frac{\partial f_q}{\partial x_1} , \dots , \frac{\partial f_q}{\partial x_n} , 1$ soient majorées en module par une fonction localement intégrable g , et que $f - f_q$ tende simplement presque partout vers 0 ; alors $(\varphi \circ f) - (\varphi \circ f_q)$ tend vers 0 simplement presque partout en restant majorée la fonction égale à $\sup\limits_{\Omega \times \underset{\sim}{R}} |\varphi|$ sur le compact $pr_\Omega(\sup \varphi)$, $= 0$ ailleurs ; donc elle converge vers 0 au sens de $L^1(gdx)$.)

Les ensembles de périmètre fini dans $\underset{\sim}{R}^n$ ont des propriétés globales intéressantes, étudiées dans de GIORGI ([13]) ; une étude plus poussée, fondée sur le théorème principal de de GIORGI ([14]) se trouve dans FLEMING ([11]). Citons les deux propriétés suivantes :

- Si E est de périmètre fini et $n \geqslant 2$, on a l'inégalité :

$$\inf (m_n(E) \ , m_n(\complement E) \leqslant (c_n - (P(E))^{n/(n-1)}$$

(m_n = mesure de Lebesgue dans $\underset{\sim}{R}^n$) ; en particulier E ou $\complement E$ est intégrable (d'après le théorème de Federer et Fleming, il suffit de démontrer cette dernière propriété, ce que l'on fait par un raisonnement semblable (mais plus compliqué) à celui du lemme précédent ce dernier théorème). Certains ouverts de $\underset{\sim}{R}^n$ possèdent une propriété analogue (existence d'une constante K , telle que, pour tout ensemble E de périmètre fini dans Ω , on ait l'inégalité

$$\inf (m_n(E) \ , m_n(\complement E)) \leqslant (K.P(E))^{n/(n-1)}$$

le périmètre étant pris dans Ω), en particulier, d'après FEDERER et FLEMING ([10], p. 6), les ouverts bornés connexes tels qu'il existe une rétraction d'un voisinage de $\overline{\Omega}$ sur $\overline{\Omega}$ (par exemple les ouverts bornés convexes). On peut déduire de cette propriété la compacité relative des bornés de $BV(\Omega)$ dans L^p_{loc} pour $1 \leqslant p < n/(n-1)$ (cf. de GIORGI [14], théorème I ; FLEMING et RISHEL [12], § 2).

- Pour tout ensemble E de périmètre fini dans $\underset{\sim}{R}^n$, il existe une suite (E_q) d'ensembles relativement compacts dont les frontières sont des polyèdres de dimension $(n - 1)$, convergeant en mesure vers E avec

$$P(E) = \lim_{q \to \infty} P(E_q) \qquad .$$

2. Etude locale.

Soient E un ensemble mesurable de $\underset{\sim}{R}^n$, x un point de $\underset{\sim}{R}^n$; on cherche à montrer l'équivalence de deux notions de normale en x à E lorsque E est de périmètre fini.

(i) Au sens de FEDERER ([8]) E admet en x un vecteur unitaire normal $n(x)$, si $P(x)$ et $N(x)$ désignant les régions de $\underset{\sim}{R}^n$ délimitées par l'hyperplan $H(x)$ perpendiculaire en x à $n(x)$, $P(x)$ contenant la direction de $n(x)$, on a :

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\, m_n(E \cap P(x) \cap B(x\,,\,r)) = \lim_{r\to 0} r^{-n}\, m_n(\complement E \cap N(x) \cap B(x\,,\,r)) = 0 \quad ;$$

$n(x)$ est alors unique. On convient de dire que $n(x) = 0$ en dehors de l'ensemble $\mathfrak{F}_1$ des points où E admet un vecteur unitaire normal.

(ii) Au sens de de GIORGI ([14]) : d'après BESICOVITCH ([3]) et MORSE ([19]), l'ensemble $\mathfrak{F}_2$ des points $x \in \underset{\sim}{R}^n$, tels que

$$|\text{grad}\ \varphi_E|\ (B(x\,,\,r)) > 0 \quad \text{pour tout} \quad r > 0 \quad ,$$

et que

$$\lim_{r\to 0} \frac{\text{grad}\ \varphi_E\ (B(x\,,\,r))}{|\text{grad}\ \varphi_E|\ (B(x\,,\,r))}$$

existe et soit un vecteur unitaire $\nu(x)$, porte la mesure $\text{grad}\ \varphi_E$.

THÉORÈME (de GIORGI [14], FEDERER [8]). - $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$ avec $\nu(x) = n(x)$ en tout $x \in \mathfrak{F}_2$; de plus la mesure $|\text{grad}\ \varphi_E|$ est égale à la mesure de Hausdorff H_n^{n-1} restreinte à $\mathfrak{F}_1$; enfin il existe un ensemble $(n - 1)$-rectifiable, contenu dans $\mathfrak{F}_2$ et dont le complémentaire dans $\mathfrak{F}_1$ est H_n^{n-1}-négligeable (ce qu'on exprime en disant que $\mathfrak{F}_1$ est H_n^{n-1}-rectifiable (cf. FEDERER [5]).

LEMME 2. - Soit $f \in BV(\underset{\sim}{R}^n)$. Pour tout $x \in \underset{\sim}{R}^n$ et presque tout $r > 0$, on a

$$\text{grad}(f.\varphi_{B(x,r)}) = f.\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)} + \varphi_{B(x,r)}\ \text{grad}\ f \quad .$$

(Démonstration : on régularise pour obtenir une suite (f_q) de fonctions de $\mathcal{E}$, convergeant au sens de L^1 vers f, et telle que $\text{grad}\ f_q$ converge vaguement vers $\text{grad}\ f$, et avec

$$\lim_{q\to\infty} \text{grad}\ f_q(\Omega) = \text{grad}\ f(\Omega) \quad \text{pour tout ouvert} \quad \Omega \ ,$$

sur la frontière duquel $|\text{grad}\ f| = 0$ (propriété immédiates). Soit $x \in \underset{\sim}{R}^n$; pour chaque fonction f_q, la formule de l'énoncé est valable quel que soit $r > 0$. D'autre part : $f_q\,\varphi_{B(x,r)}$ converge vers $f\varphi_{B(x,r)}$ au sens de L^1, donc au sens de $\mathcal{D}'$ - sauf peut-être sur l'ensemble dénombrable des r, $|\text{grad}\ f|\,(S(x\,,\,r)) > 0$, $\varphi_{B(x,r)}.\text{grad}\ f_q$ converge faiblement dans $\mathcal{M}^1$ vers $\varphi_{B(x,r)}\ \text{grad}\ f$ - enfin, en extrayant au besoin de f_q une suite partielle, on peut supposer que f_q converge simplement m_n-presque partout vers f, en restant majorée en module par une fonction m_n-intégrable $g \geq 0$; alors, pour presque tout r, f_q converge simplement et $|\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}|$ presque partout vers f, en restant majorée par la fonction $|\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}|$ intégrable g. D'après le théorème de Lebesgue, $f_q\ \text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}$ converge fortement vers $f\ \text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}$. En passant à la limite, on obtient la formule.)

Notons $L(x)$ l'ensemble des r tels qu'en $x \in \underset{\sim}{R}^n$, on ait la formule du lemme 2, et que de plus $|\text{grad}\ \varphi_E|\ (S(x\ ,\ r)) = 0$.

On va d'abord montrer que $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_1$ avec $n(x) = \nu(x)$ en tout $x \in \mathfrak{F}$. Il suffit de montrer que, de toute suite tendant vers 0, on peut extraire une sous-suite (r_q) telle que

$$\lim_{q\to\infty} r_q^{-n}.m_n(E \cap P(x) \cap B(x\ ,\ r)) = \lim_{q\to\infty} r_q^{-n}.m_n(\complement E \cap N(x) \cap B(x\ ,\ r)) = 0$$

($p(x)$ et $N(x)$ étant les régions de $\underset{\sim}{R}^n$ délimitées par l'hyperplan $H(x)$ perpendiculaire en x à $n(x)$). Montrons d'abord que pour toute suite (r_q) de nombres positifs tendant vers 0, les ensembles E_q, intersections de $B(x\ ,1)$ et des homothétiques de E dans l'homothétie $(x\ ,\ \frac{1}{r_q})$ forment dans $BV(\underset{\sim}{R}^n)$ une suite bornée. En effet :

LEMME 3.

$$\liminf_{r\to 0} r^{-n}\ m_n(E \cap B(x\ ,\ r)) > 0\ ; \qquad \liminf_{r\to 0} r^{-n}\ m_n(\complement E \cap B(x\ ,\ r)) > 0\ ;$$

$$\limsup_{r\to 0} r^{1-n}\ P(E \cap B(x\ ,\ r)) < +\infty \quad .$$

(Démonstration : les deux premières fonctions étant continues et le troisième semi-continue inférieurement dans $]0\ ,\ \to[$, il suffit de le démontrer pour $r \in L(x)$. Alors les mesures $|\text{grad}\ \varphi_E|$ et $|\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}$ sont étrangères, donc

$$P(E \cap B(x\ ,\ r)) = |\text{grad}\ \varphi_E|\ (B(x\ ,\ r)) + |\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}|(E) \quad ;$$

d'autre part

$$\text{grad}\ \varphi_{E\cap B(x,r)}\ (\underset{\sim}{R}^n) = \text{grad}\ \varphi_E(B(x\ ,\ r)) + \text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}\ (E) = 0$$

(ces deux égalités par le lemme 2) ; enfin pour r assez petit,

$$2|\text{grad}\ \varphi_E(B(x\ ,\ r))| \geq |\text{grad}\ \varphi_E|\ (B(x\ ,\ r))$$

(parce que $x \in \mathfrak{F}_2$). Donc

$$P(E \cap B(x\ ,\ r)) \leq 3|\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}|\ (E) \leq 3\omega(n)\ r^{n-1}$$

($\omega(n)$ = aire de la sphère $S(0\ ,\ 1)$), d'où la troisième inégalité. Par ailleurs si l'on pose $g(r) = m_n(E \cap B(x\ ,\ r))$ (fonction absolument continue en r dont la dérivée est presque partout égale à $|\text{grad}\ \varphi_{B(x,r)}|(E)$) on obtient, par cette dernière inégalité et le théorème de Federer et Fleming, $(g(r))^{(n-1)/n} \leq \frac{3dg}{dr}$, donc $g(r) \geq (\frac{r}{3n})^n$ (en intégrant, puisque $g(0) = 0$).

On peut donc extraire de la suite (r_q) une sous-suite, notée encore (r_q) , E_q convergeant en mesure vers un ensemble D , et telle que dans $\mathfrak{M}^1(B(x\ ,\ 1))$, $\text{grad}\ \varphi_{E_q}$ converge faiblement vers $\text{grad}\ \varphi_D$. On va montrer que $D = N(x) \cap B(x\ ,\ 1)$, ce qui entraînera cette partie du théorème.

Utilisons le théorème de la Vallée-Poussin, selon lequel pour toute suite (μ_q) bornée dans $\mathfrak{M}^1(\underset{\sim}{R}^n)$, il existe une sous-suite (μ_{q_p}) convergeant faiblement vers une mesure μ , et une mesure de Radon positive α , telles que, sur tout ouvert Ω de $\underset{\sim}{R}^n$, sur la frontière duquel α est nulle,

$$\lim \mu_{n_p}(\Omega) = \mu(\Omega) \quad .$$

En appliquant ici ce théorème, on voit qu'on peut supposer

$$\lim_{q\to\infty} \text{grad}\ \varphi_{E_q}(B(x\ ,\ r)) = \text{grad}\ \varphi_D(B(x\ ,\ r))$$

pour tout $r \in]0\ ,\ 1[$, sauf les éléments d'un ensemble au plus dénombrable. Comme

$$|\text{grad}\ \varphi_D|(B(x\ ,\ r)) \leq \liminf_{q\to\infty} |\text{grad}\ \varphi_{E_q}|(B(x\ ,\ r))$$

et

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\text{grad}\ \varphi_{E_q}(B(x\ ,\ r))}{|\text{grad}\ \varphi_{E_q}|(B(x\ ,\ r))} = -\nu(x)$$

pour presque tout r , on a pour ces r

$$\text{grad}\ \varphi_D(B(x\ ,\ r)) = -\nu(x)\ |\text{grad}\ \varphi_D|(B(x\ ,\ r)) \quad ,$$

ce qui signifie $\text{grad}\ \varphi_D = -\nu(x).|\text{grad}\ \varphi_D|$, D est donc, à un ensemble de mesure nulle près, l'intersection de $B(x\ ,\ 1)$ et d'une région $\nu(x).(y - x) < a$; d'après le lemme 3, $a = 0$ (parce que x est point frontière de cette région), donc $D = N(x) \cap B(x\ ,\ 1)$.

On va maintenant prouver que tout ensemble $\subset \mathfrak{F}_1$ et $|\text{grad}\ \varphi_E|$ négligeable est H_n^{n-1}-négligeable ; d'après le théorème de recouvrement de Vitali pour la mesure de Hausdorff (cf. MORSE [18]), il suffit de prouver le lemme suivant :

LEMME 4. - $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup r^{1-n}|\text{grad } \varphi_E|(B(x\ ,\ r))$ est sur $\mathfrak{F}_1$ supérieure à un nombre fixe > 0.

(Démonstration : soient $x \in \mathfrak{F}_1$, y la direction de $m(x)$. On va montrer :

$$\lim_{r\to 0} \sup r^{1-n}\left|\frac{\partial\varphi_E}{\partial y}\right|(B(x\ ,\ r)) \geq \frac{\alpha(n)}{4} .$$

Soit $\varepsilon > 0$; par hypothèse il existe $r_1 > 0$ tel que, pour $r \in]0\ ,\ r_1[$, on ait les inégalités

(1) $m_n(E \cap B(x\ ,\ r')) \geq (\alpha(n) - \varepsilon).\frac{r'^n}{4}$;

(2) $m_n(E \cap B(x\ ,\ r') \cap P(x)) \leq \frac{\varepsilon}{n} r^m = \varepsilon \int_0^{r'} r^{n-1}\, dr$.

De la deuxième inégalité, on déduit que pour tout $r' \in]0\ ,\ r_1[$, l'ensemble des $r \in]0\ ,\ r'[$, tels que

$$|\text{grad } \varphi_{B(x,r)}|(E \cap B(x\ ,\ r) \cap P(x)) \leq \varepsilon.r^{n-1} ,$$

est de mesure non nulle ; en particulier qu'il en existe auxquels on puisse appliquer le lemme 2. On va montrer que, pour un tel r , on a

$$\left|\frac{\partial\varphi_E}{\partial y}\right|(B(x\ ,\ r)) \geq \frac{r^{n-1}}{4}(\alpha(n) - 5\varepsilon) ,$$

ce qui entraînera le lemme. En effet : soit ψ la fonction qui, à $z \in B(x\ ,\ r)$, fait correspondre la distance de z au point d'intersection de la parallèle à $n(x)$ menée par z , et de l'hémisphère $S(x\ ,\ r) \cap N(x)$; cette fonction : $\overline{B}(x\ ,\ r) \to [0\ ,\ 2r]$ est continue et de classe C^1 dans $B(x\ ,\ r)$; de plus $\frac{\partial\psi}{\partial y} = 1$. D'après le lemme 2

$$\int_{E\cap B(x,r)} \frac{\partial\psi}{\partial y}\, dy = \int_E \psi.d(\frac{\partial\varphi}{\partial y} B(x\ ,\ r)) + \int_{B(x,r)} \psi d(\frac{\partial\varphi_E}{\partial y}) .$$

Le premier terme est $\geq \frac{r^n}{2}(\alpha(n) - \varepsilon)$ d'après l'inégalité (1) ; le deuxième est $\leq 2r.\varepsilon r^{n-1}$ d'après l'hypothèse sur r ; le troisième est $\leq 2r.\left|\frac{\partial\varphi_E}{\partial y}\right|(B(x\ ,\ r))$; d'où l'inégalité annoncée.)

On peut trouver une suite de compacts (K_m) contenus dans $\mathfrak{F}_2$,

$$|\text{grad } \varphi_E|(\mathfrak{F}_1 - \bigcup_m K_m) = 0 ,$$

et où les relations :

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\, m_n(E \cap P(x) \cap B(x\ ,\ r)) = \lim_{r\to 0} r^{-n}\, m_n(\complement E \cap N(x) \cap B(x\ ,\ r)) = 0$$

sont vérifiées uniformément en x (théorème d'Egoroff). On va montrer que chacun de ces compacts K_m est contenu dans une variété de dimension $(n-1)$, V_m. D'après le théorème de Whitney sur le prolongement des fonctions uniformément différentiables sur un compact à l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier il suffit de montrer que, sur chaque compact K_m, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$, x et $y \in K_m$ et $|x-y| < \alpha$ entraînent $|\nu(x).(y-x)| \leq \varepsilon.|y-x|$. Choisissons α de façon que

$$(r < 2\alpha) \implies r^{-n} m_n(E \cap B(x, r) \cap P(x)) < \varepsilon^n \quad .$$

$2^{-(n+2)}$ $\alpha(n)$ et l'inégalité analogue pour $\complement E$, quel que soit $x \in K_m$; si l'inégalité $\nu(x).(y-x)$ n'était pas vérifiée en un $y \in B(x, \alpha)$ au moins, la boule de centre y et de rayon $\varepsilon|x-y|$ serait contenue dans $P(x) \cap B(x, 2|x-y|)$ (en supposant $\varepsilon < 1$). On aurait alors

$$m_n(E \cap P(x) \cap B(x, 2|x-y|)) < \frac{\varepsilon^n.|x-y|^n.\alpha(n)}{4} \quad ,$$

et

$$m_n(E \cap B(y, \varepsilon|x-y|)) > \frac{\varepsilon^n.|x-y|^n.\alpha(n)}{4}$$

ce qui est absurde.

En rétrécissant au besoin les compacts K_m, on peut supposer que chaque variété V_m est définie par une équation de la forme $y = f_m(z)$, en écrivant $x \in \mathbb{R}^m$ sous la forme $(y, z) \in (\nu(x_m).\mathbb{R}) \times H(x_m)$, f_m étant définie et de classe C^1 dans un ouvert de la forme $B(x_m, r_m) \cap H(x_m)$. Le théorème résulte alors du lemme 1 et du fait que si F_m désigne l'ensemble $\{(y, z) \mid y \leq f_m(z)\}$, K_m est $|\mathrm{grad}(\varphi_E - \varphi_{E\cap F_m})|$-négligeable, et $|\mathrm{grad}(\varphi_{F_m} - \varphi_{E\cap F_m})|$-négligeable (évident), donc que $\mathrm{grad}\, \varphi_E$ et $\mathrm{grad}\, \varphi_{F_m}$ induisent sur K_m la même mesure.

Ce théorème est local ; les deux premières assertions de son énoncé et (localement) la troisième restent valables pour un ensemble localement de périmètre fini dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Donnons quelques conséquences :

(i) <u>Formule de Gauss-Green.</u> – Soient E un ensemble localement de périmètre fini dans Ω, $\mathfrak{F}_1$ l'ensemble des points de Ω où la normale au sens de Federer existe. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a la formule

$$\int_E \varphi(x)\, dx = \int_{\mathfrak{F}_1} (\mathrm{grad}\, \varphi.n(x))\, dH_n^{n-1}(x)$$

$n(x)$ désignant la normale au sens de Federer en x à E.

L'énoncé de WHITNEY ([23], p. 100, théorème 14 A) en est un cas particulier.

Le paragraphe 1 et le fait que $\mathfrak{F}_1 \subset \mathrm{fr}(E)$ entraînent que si E est m_n-mesurable dans Ω,

$$\|\mathrm{grad}\ \varphi_E\| \leqslant H_n^{n-1}(\mathrm{fr}(E)) \quad .$$

(ii) Application aux hypersurfaces non paramétriques. – Soient f une fonction numérique définie sur Ω,

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \Omega \times \underset{\sim}{R} \mid x_{n+1} < f(x_1, \ldots, x_n)\} \quad .$$

Du paragraphe 1, on déduit que si f est continue ou si ses dérivées sont des fonctions, pour m_n, presque tout $x \in \Omega$, il existe en $(x, f(x))$ une normale à E au sens de Federer, théorème classique (qui devient inexact si $f \in BV$ est quelconque). Lorsque f est continue, on peut démontrer (FEDERER [9]) que $(f(\Omega) \cap \complement\mathfrak{F}_1)$ est H_n^{n-1}-négligeable ; ce qui entraîne, d'après le théorème précédent, que l'aire de Lebesgue de f soit égale à la mesure de Hausdorff de son image.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BANACH (Stefan). – Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, Fund. Math., t. 7, 1925. p. 225-237.

[2] BESICOVITCH (A. S.). – On the definition and value of the area of a surface, Quart. J. of Math., Oxford Series, t. 16, 1945, p. 86-102.

[3] BESICOVITCH (A. S.). – A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions, I., Proc. Cambr. phil. Soc., t. 41, 1945, p. 103-110 ; II., Proc. Cambr. phil. Soc., t. 42, 1946, p. 1-10.

[4] CESARI (Lamberto). – Sulle transformazioni continue, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 21, 1942. p. 157-188.

[5] FEDERER (Herbert). – The $(\varphi, 1)$-rectifiable subsets of n space, Trans. Amer. math. Soc., t. 62, 1947, p. 114-192.

[6] FEDERER (Herbert). – On Lebesgue area, I., Annals of Math., t. 61, 1955, p. 289-353.

[7] FEDERER (Herbert). – On Lebesgue area, II., Trans. Amer. mat. Soc., t. 90, 1959, p. 499-522.

[8] FEDERER (Herbert). – A note on the Gauss-Green theorem, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 447-451.

[9] FEDERER (Herbert). – The area of a non parametric surface, Proc. Amer. math. Soc., t. 11, 1960, p. 436-439.

[10] FEDERER (H.) and FLEMING (W. H.). – Normal and integral currents, Annals of Math., Series 2, 72, 1960, p. 458-520.

[11] FLEMING (Wendell H.). - Functions whose partial derivatives are measures, Illinois J. of Math., t. 4, 1960, p. 452-478.

[12] FLEMING (W. H.) and RISHEL (R.). - An integral formula for total gradient variation, Arch. der Math., t. 11, 1960, p. 218-222.

[13] de GIORGI (Ennio). - Su una teoria generale della misura (r - 1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 36, 1954, p. 191-213.

[14] de GIORGI (Ennio). - Nuovi teoremi relativi alle misure (r - 1)-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni, Ricerche di Mat., t. 4, 1955, p. 95-113.

[15] KOLMOGOROV (N. A.). - Bertrâge zur Masstheorie, Math. Annalen, t. 107, 1935, p. 351-356.

[16] KRICKEBERG (Klaus). - Distributionen, Funktionen Beschränter Variation und Lebesguescher Inhalt nichtparametrische Flächen, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 44, 1957, p. 105-134.

[17] MICKLE (Earl J.). - On the extension of a transformation, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 160-164.

[18] MORSE (Anthony P.). - Theory of covering and differentiation, Trans. Amer. math. Soc., t. 55, 1944, p. 205-235.

[19] MORSE (Anthony P.). - Perfect blankets, Trans. Amer. math. Soc., t. 61, 1947, p. 418-442.

[20] SAKS (Stanislaw). - Theory of the integral. 2nd edition. - New York, G. E. Stechert and Co., 1957.

[21] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes 1 (2e éd.) et 2. - Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. scient. et ind., 1245 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[22] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 et t. 8, 1958, p. 1-209.

[23] WHITNEY (Hassler). - Geometric integration theory. - Princeton, Princeton University Press, 1957 (Princeton mathematical Series, 21).