Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier

Travaux récents de L. Nachbin sur l'approximation polynomiale pondérée

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 2 (1963), exp. n^{o} 3, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1963__2__A2_0>

TRAVAUX RÉCENTS DE L. NACHBIN
SUR L'APPROXIMATION POLYNOMIALE PONDÉRÉE

par Jean-Pierre FERRIER

Première partie

L'approximation polynomiale des fonctions continues sur un intervalle compact peut se généraliser à des intervalles non compacts de la droite. Si on désigne par $\mathcal{C}_0(R)$ l'algèbre normée des fonctions continues sur R tendant vers zéro à l'infini, par $\mathcal{P}$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels, pour pouvoir approcher des éléments de $\mathcal{C}_0(R)$, il est alors nécessaire d'introduire une fonction p telle que $p\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_0(R)$; on dira alors que p est rapidement décroissante à l'infini. Le problème, posé par BERNSTEIN, consiste alors à donner des conditions pour que $p\mathcal{P}$ soit dense dans $\mathcal{C}_0(R)$, auquel cas on dira que p est un poids.

Une condition nécessaire pour qu'une fonction p, continue et rapidement décroissante à l'infini, soit un poids est que p ne s'annule pas. Si p_1, p_2 sont deux telles fonctions et si $|p_1| \leqslant |p_2|$ et p_2 est un poids, p_1 est un poids. En effet si f est une fonction continue à support compact dans R, il en est de même de $\frac{fp_2}{p_1}$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\left|\frac{fp_2}{p_1} - Pp_2\right| \leqslant \varepsilon$, d'où $|f - Pp_1| \leqslant \varepsilon\left|\frac{p_1}{p_2}\right| \leqslant \varepsilon$, or l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathcal{C}_0(R)$.

On connait un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'une fonction p continue, ne s'annulant pas, soit un poids :

a. Il existe $k > 0$ tel que $|p(x)| \leqslant k \exp(-|x|)$.

b. La série $\sum (\sup_{x\in R} |x^m p(x)|)^{-1/m}$ diverge.

c. Il existe une fonction B continue, partout > 0 sur R_+, telle que $\log \frac{1}{B(t)}$ soit convexe en $\log t$ et que $\int^\infty \frac{1}{t^2} \log \frac{1}{B(t)}\, dt$ diverge, avec $|p(x)| \leqslant B(|x|)$.

Enfin, POLLARD a démontré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction p continue, ne s'annulant pas, et rapidement décroissante à l'infini, soit un poids est que

(a) $\sup\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ P(t)}{1+t^2}\,dt \mid P \in \mathcal{P} \text{ tel que } |P| \leqslant |\frac{1}{p}|\} = +\infty$.

De façon plus générale, on peut envisager le cas de R^n . Désignons par $\mathcal{P}_n$ l'algèbre des polynômes réels à n indéterminées, par $\mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n^+$) l'ensemble des fonctions continues p (resp. positives) rapidement décroissantes à l'infini dans R^n , telles que $p\mathcal{P}_n$ soit dense dans $\mathcal{C}_0(R^n)$. Les conditions (a), (b), (c), où l'on a remplacé $|x|$ par $\|x\|$, sont alors suffisantes pour qu'une fonction continue, ne s'annulant pas, p , appartienne à $\mathcal{B}_n$. Contrairement au cas où $n = 1$, on ne connait pas de condition nécessaire et suffisante.

On trouvera des démonstrations de (a), (b), (c) dans CARLEMAN [2], dans MANDELBROJT [5]. Pour (d) se référer à CARLESON [3] et POLLARD [11], ainsi qu'à AKHIEZER et BABENKO [1].

Une extension de la théorie a fait l'objet d'une étude de L. NACHBIN (voir par exemple [9]). Le cadre envisagé est celui de l'espace des fonctions continues sur un espace topologique uniformisable, avec la topologie de la convergence compacte. Le point de vue adopté dans cet exposé diffèrera du précédent parce qu'on ne supposera pas donnée la topologie et parce qu'on s'efforcera d'énoncer le plus de résultats possibles pour des fonctions à valeurs dans un corps K valué complet non discret.

Il serait intéressant d'approfondir les liens entre l'application polynomiale pondérée et la recherche de conditions d'unicité pour le problème des moments où certaines conditions de densité d'algèbres de fonctions dans les espaces $\mathcal{L}^p$. L. NACHBIN [7] signale un exemple d'application du théorème de Bernstein dans la décomposition spectrale de la transformation de Fourier dans $\mathcal{L}^2(R^n)$ qui comme on le sait est définie par

$$f \to \mathcal{F}(f) = \int f(x)\, \exp(-\,2\pi i\langle x\,,\,y\rangle\, dx \quad .$$

Du fait que $\mathcal{F}^4 = 1$, les seules valeurs propres sont 1 , -1 , i et $-i$, et un calcul simple montre que la somme directe des quatre sous-espaces propres est l'espace vectoriel des fonctions $p(x)\exp(-\pi\|x\|^2)$ où $p \in \mathcal{P}_n$. Pour terminer la décomposition, il suffit de prouver que $\mathcal{P}_n \exp(-\pi\|x\|^2)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(R^n)$ ou encore que $\mathcal{P}_n$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mu)$, μ désignant le produit par $\exp(-\,2\pi\|x\|^2)$ de la mesure de Lebesgue de R^n .

Plus généralement, μ étant une mesure positive sur R^n telle que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, on peut chercher des conditions suffisantes pour que $\mathcal{P}_n$ soit dense dans $\mathcal{L}^p(\mu)$. Il suffit, par exemple, qu'il existe $w \in \mathcal{B}$ tel que $1/w^p$ soit

μ-intégrable, car, pour toute fonction continue à support compact f et tout $\varepsilon \in R_+^*$, on peut trouver $p \in \mathcal{P}_n$ tel que $\|fw - Pw\| \leq \varepsilon$, d'où

$$|\int (f - P)^p \, d\mu| \leq \|fw - Pw\|^p \, |\int \frac{d\mu}{w}| \quad .$$

Dans l'exemple donné, il suffit de prendre $w = \exp(- c\|x\|^2)$ avec $0 < c < \pi$.

1. Préliminaires.

1° On appellera espace uniforme bornologique un espace uniforme X muni d'une bornologie, c'est-à-dire d'une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{P}(X)$ contenant les points, stable par réunion finie et telle que, si $A \in \mathfrak{A}$ et $B \subset A$, on ait $B \in \mathfrak{A}$ (cf. [12], chapitre I § 2), compatible avec la structure uniforme dans le sens que l'adhérence d'une partie bornée est bornée. Si X, Y sont deux espaces uniformes bornologiques, on notera $\widetilde{Bc}(E , F)$ l'espace des applications f de X dans Y bornées (c'est-à-dire telles que, pour tout borné A de E, $f(A)$ soit borné) et quasi-uniformément continues (c'est-à-dire telles que la restriction à tout borné soit uniformément continue). On notera $(\widetilde{Eub})$ la catégorie dont les objets sont les espaces uniformes bornologiques, et les morphismes sont les applications bornées et quasi-uniformément continues.

2° Soit X un espace uniforme ; on dira qu'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'application uniformément continues et bornées (au sens usuel) de X dans K est équifinie si elle est uniformément équicontinue et uniformément bornée, et s'il existe un entourage V et un entier n tels que, pour tout ensemble A, petit, d'ordre V, il existe au plus n fonctions de la famille dont le support rencontre A. Il est alors clair que $\sum_{i\in I} f_i$ est uniformément continue et bornée.

On vérifie immédiatement les résultats qui suivent.

- Si $(f_{i_1})_{i_1\in I_1}, \ldots, (f_{i_n})_{i_n\in I_n}$ sont des familles équifinies d'applications de X dans K, la famille $(f_{i_1} \ldots f_{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_1\times\ldots\times I_n}$ est équifinie.

- Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille équifinie, pour toute famille bornée $(\lambda_i)_{i\in I}$ de K, la famille $(\lambda_i f_i)_{i\in I}$ est équifinie.

- Si $\varphi : X' \to X$ est une application uniformément continue, pour toute famille équifinie $(f_i)_{i\in I}$ sur X, la famille $(f_i \circ \varphi)_{i\in I}$ est équifinie.

On appellera V-partition de l'unité dans X, toute famille équifinie $(f_i)_{i\in I}$ d'applications de X dans K telle que le support de f_i soit petit, d'ordre V, et que

$$\sum_{i\in I} f_i = \sum_{i\in I} |f_i| = 1 \quad .$$

On dira qu'une algèbre unitaire $\mathcal{B}$ de fonctions uniformément continues et bornées de X dans K est partageante si, pour tout entourage V, il existe une V-partition de l'unité composée de fonctions de $\mathcal{B}$.

Si un espace uniforme X a la structure initiale pour une famille d'applications $\varphi_\alpha : X \to X_\alpha$ $(\alpha \in A)$ et si, pour tout α, $\mathcal{B}_\alpha$ est une algèbre partageante sur X_α, l'algèbre unitaire $\mathcal{B}$ engendrée par le $f \circ \varphi_\alpha$ où $f \in \mathcal{B}_\alpha$, est partageante.

On dira qu'un espace uniforme X est K-paracompact, si l'algèbre des applications uniformément continues et bornées de X dans K est partageante. Tout espace uniforme qui a la structure initiale pour des applications dans des espaces K-paracompacts est donc K-paracompact. Par suite, toute limite projective d'espaces K-paracompacts est K-paracompacte. D'autre part, il est clair que K est K-paracompact ; si K est R ou C, c'est évident, et si K est ultramétrique, on peut choisir des fonctions caractéristiques de boules.

3° On peut développer des notions analogues pour un espace uniforme bornologique X. On dira qu'une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications quasi-uniformément continues et bornées (au sens usuel) de X dans K est quasi-équifinie si, pour tout borné A de X, les restrictions à A forment une famille équifinie. $\sum_{i\in I} f_i$ sera alors quasi-uniformément continue et relativement bornée.

On vérifie de même que :

- Si $(f_{i_1})_{i_1\in I_1}, \ldots, (f_{i_n})_{i_n\in I_n}$ sont des familles quasi-équifinies d'applications de X dans K, la famille $(f_{i_1} \cdots f_{i_n})_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_1\times\ldots\times I_n}$ est quasi-équifinie.

- Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille quasi-équifinie, pour toute famille bornée $(\lambda_i)_{i\in I}$ de K, la famille $(\lambda_i f_i)_{i\in I}$ est quasi-équifinie.

- Si $\varphi : X' \to X$ est une application bornée et quasi-uniformément continue, pour toute famille quasi-équifinie $(f_i)_{i\in I}$ sur X, la famille $(f_i \circ \varphi)_{i\in I}$ est quasi-équifinie.

Pour tout entourage V d'un borné A, on appelle V-partition de l'unité sur A, toute famille quasi-équifinie $(f_i)_{i\in I}$ d'applications de X dans K telle que $\sum_{i\in I} |f_i| \leqslant 1$ et que les restrictions des f_i à A forment une V-partition de A.

On dira qu'une algèbre $\mathcal{B}$ de fonctions quasi-uniformément continue et bornées est quasi-partageante, si, pour tout borné A et tout entourage V de A, il existe une V-partition de l'unité sur A composée de fonctions de $\mathcal{B}$.

Si un espace uniforme bornologique a une structure isomorphe dans $(\widetilde{\mathrm{Eub}})$ à la structure initiale pour une famille d'applications $\varphi_\alpha : X \to X_\alpha$ $(\alpha \in A)$ et si, pour tout α, $\mathcal{B}_\alpha$ est une algèbre quasi-partageante sur X_α, l'algèbre unitaire $\mathcal{B}$ engendrée par les $f \circ \varphi_\alpha$ où $f \in \mathcal{B}_\alpha$ est quasi-partageante.

On dira enfin qu'un espace uniforme bornologique X est quasi-K-paracompact, si l'algèbre des applications quasi-uniformément continues et bornées de X dans K est quasi-partageante. Tout espace uniforme bornologique qui a une structure isomorphe à la structure initiale pour des applications dans des espaces quasi-K-paracompacts est lui-même quasi-K-paracompact. Par suite, toute limite projective d'espaces quasi-K-paracompacts est quasi-K-paracompacte.

2. Problème de Bernstein généralisé.

Considérons la donnée d'un ensemble X, d'une algèbre unitaire $\mathcal{A}$ d'applications de X dans K et d'un espace vectoriel $\mathcal{W}$ d'applications bornées de X dans K qui soit un $\mathcal{A}$-module, autrement dit, tel que $\mathcal{A}\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$. On désignera par $(\mathcal{N})$ la catégorie dont les objets sont les triplets $(X, \mathcal{A}, \mathcal{W})$ et dans laquelle un morphisme de $(X, \mathcal{A}, \mathcal{W})$ dans $(X', \mathcal{A}', \mathcal{W}')$ est une application φ de X dans X' telle que, pour tout $f \in \mathcal{A}'$ et tout $g \in \mathcal{W}'$, $f \circ \varphi \in \mathcal{A}$ et $g \circ \varphi \in \overline{\mathcal{W}}$, $\overline{\mathcal{W}}$ étant l'adhérence de $\mathcal{W}$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mathcal{W})$ un objet de $(\mathcal{N})$; on considère sur X la structure uniforme bornologique initiale pour les fonctions de $\mathcal{A}$. On obtient ainsi un foncteur de $(\mathcal{N})$ dans $(\widetilde{\mathrm{Eub}})$ qui (par construction) commute aux structures initiales, donc aux limites projectives.

__Définition.__ - On dit que $(X, \mathcal{A}, \mathcal{W})$ est de type fini, ou que $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$, si $\mathcal{W}$ est un module sur une algèbre quasi-partageante $\mathcal{B}$ sur X.

Il résulte de ce qui a été dit que la propriété de type fini se conserve par structures initiales ou limites projectives quelconques. On peut énoncer un certain nombre de conséquences :

PROPOSITION 1. – Soit $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ un objet de $(\mathcal{N})$; considérons une application $\varphi : X' \to X$ et soit $(X' , \mathcal{A}' , \mathcal{W}')$ l'image réciproque de $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ par φ ; autrement dit $\mathcal{A}'$ (resp. $\mathcal{W}'$) est l'ensemble de $f \circ \varphi$ où $f \in \mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{W}$). Si $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}'$ est de type fini sous $\mathcal{A}'$.

PROPOSITION 2. – Soit $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ un objet de $(\mathcal{N})$; on suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{W}_i)_{i \in I}$ de sous-espaces de $\mathcal{W}$ qui soient des sous-$\mathcal{A}$-modules telle que le sous-espace engendré par les $\mathcal{W}_i$ soit dense dans $\mathcal{W}$ pour la topologie de la convergence uniforme. Dans ces conditions, si pour tout $i \in I$, $\mathcal{W}_i$ est de type fini sous $\mathcal{A}$, $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 3. – Soit $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ un objet de $(\mathcal{N})$; on suppose que $\mathcal{A}$ est engendrée par une famille $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de sous-algèbres. Si pour tout i , $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{W}$ est de type fini sous $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 4. – Soient $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ un objet de $(\mathcal{N})$, $A \subset \mathcal{A}$ engendrant $\mathcal{A}$, $W \subset \mathcal{W}$ tel que le sous-$\mathcal{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathcal{W}$. Pour toute partie B de A , on désigne par $\mathcal{A}_B$ l'algèbre unitaire engendrée par B . Pour que $\mathcal{W}$ soit de type fini sous $\mathcal{A}$, il suffit que l'une des conditions qui suivent soit réalisée :

(a) Pour toute partie finie B de A , et tout $w \in W$, $\mathcal{A}_B w$ est de type fini sous $\mathcal{A}_B$.

(b) Pour toute famille finie $f_1 , \ldots , f_k$ de fonctions de A , tout $f \in A$, tout $w \in W$, et toute suite $p_1 , \ldots , p_k$ d'entiers, $\mathcal{A}_{\{f\}} f_1^{p_1} \ldots f_k^{p_k} w$ est de type fini sous $\mathcal{A}_{\{f\}}$.

Etudions maintenant le cas où $\mathcal{W}$ est engendré comme $\mathcal{A}$-module par un seul élément w . Pour que $\mathcal{W}$ soit de type fini sous $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une algèbre quasi-partageante $\mathcal{B}$ telle que, pour tout $\varepsilon \in R_+^*$, tout $f \in \mathcal{A}$ et tout $g \in \mathcal{B}$, il existe $h \in \mathcal{A}$ avec $|gfw - hw| \leq \varepsilon$, soit $|w|\,|gf - h| \leq \varepsilon$. Par suite si $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$ et $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W}')$ sont deux objets de $(\mathcal{N})$, $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}'$) étant engendré par w (resp. w') et s'il existe $k \in R_+^*$ tel que $|w| \leq k|w'|$, pour que $\mathcal{W}$ soit de type fini sous $\mathcal{A}$, il suffit que $\mathcal{W}'$ le soit. En particulier, lorsque K est R ou C , pour que $\mathcal{A}w$ soit de type fini sous $\mathcal{A}$, il faut et il suffit que $\mathcal{A}|w|$ le soit.

Revenons à l'étude de la catégorie $(\mathcal{N})$ et considérons un objet $(X , \mathcal{A} , \mathcal{W})$. Les bornés de X sont les ensembles $A \subset X$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$, $f(A)$ soit borné. Pour cette bornologie les fonctions de $\mathcal{W}$ tendent vers zéro à l'infini, autrement dit, pour tout $\varepsilon \in R_+^*$, l'ensemble des $x \in X$, tels que $|w(x)| \geq \varepsilon$, est borné pour toute fonction $w \in \mathcal{W}$; en effet, raisonnons par l'absurde : dans le cas contraire, il existerait $f \in \mathfrak{A}$ telle que fw ne soit pas bornée. On notera $\widehat{X}$ le quasi-complété de X, c'est-à-dire la réunion dans le séparé complété de X des adhérences des images des bornés de X, muni de la bornologie engendrée par ces parties. Les fonctions de $\mathfrak{A}$ se prolongent à $\widehat{X}$ qui a la structure initiale pour les fonctions prolongées et X a alors la structure initiale pour l'application $\pi : X \to \widehat{X}$.

Supposons maintenant que K soit localement compact, et que $\mathcal{W}$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}$. Soient f une application quasi-uniformément continue et bornée de X dans K et $w \in \mathcal{W}$. Pour tout $\varepsilon \in R_+^*$, l'ensemble des $x \in X$ tels que $|w(x)| \geq \varepsilon$ est un borné A. Soit V un entourage de A tel que l'oscillation de f sur tout ensemble petit d'ordre V soit inférieure à ε, et soit $(f_i)_{i \in I}$ une V-partition de l'unité sur $\mathfrak{A}$ composée de fonctions d'une algèbre $\mathfrak{B}$ telle que $\overline{\mathcal{W}}$ soit un $\mathfrak{B}$-module. A étant précompact, il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que, pour tout $i \in I \cap \complement J$ le support de f_i ne rencontre pas A, et que, pour tout $i \in J$, il existe $x_i \in A$ tel que $f_i(x_i) \neq 0$. Dans ces conditions, on vérifie que

$$|fw - \sum_{i \in J} f(x_i)\, f_i\, w| \leqslant 2\varepsilon(\|f\| + \|w\|) \quad .$$

Autrement dit, $\overline{\mathcal{W}}$ est un module sur l'algèbre des fonctions quasi-uniformément continue et bornées sur X.

Un cas particulier intéressant est celui où $\mathfrak{A}$ est engendrée par un nombre fini de fonctions, car $\widehat{X}$ est alors localement compact. Pour que, dans ce cas, $\mathcal{W}$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}$, il faut et il suffit que $\overline{\mathcal{W}}$ soit un module sur l'algèbre des fonctions continues à support compact sur $\widehat{X}$. Si, en outre, $\mathcal{W}$ est engendré par un seul élément w, il faut et il suffit que, pour toute fonction continue à support compact g sur $\widehat{X}$, $gw \in \overline{\mathcal{W}}$, en effet, pour toute fonction $f \in \mathfrak{A}$, gf est alors continue à support compact, et $gfw \in \overline{\mathfrak{A}}$. Cela signifie que $\mathfrak{A}$ est dense dans l'espace des fonctions continues à support compact sur $\widehat{X}$ pour la semi-norme $f \rightsquigarrow \|fw\|$.

Dans tout ce qui va suivre, on supposera que K est R ou C.

Un autre cas particulier est celui où les fonctions de $\mathcal{W}$ sont quasi-uniformément continues. On peut considérer sur X la bornologie engendrée par les parties A telles qu'il existe $w \in \mathcal{W}$ avec $w(x) \geq 1$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire la bornologie la plus fine pour laquelle les fonctions de $\mathcal{W}$ tendent vers zéro à l'infini ; elle est donc plus fine que la bornologie initiale pour

$\mathfrak{A}$. On peut se demander à quelle condition $\mathfrak{W}$ est l'espace des fonctions f sur X quasi-uniformément continues (pour la structure définie par $\mathfrak{A}$) et tendant vers zéro à l'infini (pour la bornologie définie par $\mathfrak{W}$). Il est clair que cette condition entraîne le type fini. Elle lui est équivalente si $\mathfrak{W}$ est engendré par un seul élément w, car il suffit de considérer les fonctions $\frac{f}{\sup(\varepsilon , |w|)} |w|$.

On voit donc dans ce cas le lien avec le problème classique de Bernstein.

Enfin, un cas particulier immédiat est celui où $K = R$ et où les fonctions de $\mathfrak{A}$ sont bornées. En effet, $\bar{\mathfrak{W}}$ est alors un module sur $\bar{\mathfrak{A}}$, X est précompact et $\hat{X}$ compact. Le théorème de Stone-Weierstrasse prouve alors que $\bar{\mathfrak{A}}$ est l'espace des fonctions continues sur $\hat{X}$. $\mathfrak{W}$ est donc de type fini sous $\mathfrak{A}$.

On désignera par $\mathcal{P}_k(K)$ l'algèbre des polynômes à k variables à coefficients dans K et par $\mathcal{C}_0(K^k)$ l'espace des fonctions continues tendant vers zéro à l'infini sur K^k. On peut énoncer (cf. NACHBIN [6], théorème 2) :

PROPOSITION 5. - Soient $(X , \mathfrak{A} , \mathfrak{W})$ un objet de $(\mathfrak{N})$, $A \subset \mathfrak{A}$ engendrant $\mathfrak{A}$, $W \subset \mathfrak{W}$ tel que le sous-$\mathfrak{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathfrak{W}$. Pour que $\mathfrak{W}$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}$, il suffit que, pour tout $w \in W$ et toute partie finie $\{f_1 , \ldots , f_k\}$ de A, il existe une fonction continue positive p sur K^k telle que $p\mathcal{P}_k(K)$ soit dense dans $\mathcal{C}_0(K^k)$ et que :

$$|w| \leq p(f_1 , \ldots , f_k) \quad .$$

On va donner un autre résultat qui est un peu plus fort que celui qu'on peut trouver dans les mémoires de L. NACHBIN.

PROPOSITION 6. - Soient $(X , \mathfrak{A} , \mathfrak{W})$ un objet de $(\mathfrak{N})$, $A \subset \mathfrak{A}$ engendrant $\mathfrak{A}$, $W \subset \mathfrak{W}$ tel que le sous-$\mathfrak{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathfrak{W}$. Pour que $\mathfrak{W}$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}$, il suffit que, pour tout $w \in W$ et tout $f \in A$, l'une des conditions qui suivent soit vérifiée :

(1) Il existe $a \in]0 , 1[$ tel que $\mathfrak{A}_{\{f\}}|w|^a$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}_{\{f\}}$.

(2) Il existe $a \in]0 , 1[$ et une fonction continue positive p sur K de façon que $p^a \mathcal{P}_1(K)$ soit dense dans $\mathcal{C}_0(K)$ et que $|w| \leq p \circ f$.

(2) se déduit de (1) à l'aide de la proposition 1. Pour montrer (1), il suffit de voir que, pour toute famille finie $f_1 , \ldots , f_k$ de fonctions de A et toute famille $p_1 , \ldots , p_k$ d'entiers, si on pose $v = f_1^{p_1} \ldots f_k^{p_k} w$, $\mathfrak{A}_{\{f\}} v$ est de type fini sous $\mathfrak{A}_{\{f\}}$. Ceci résulte de ce que

$$|v| \leq \|f_1^{p_1} \ldots f_k^{p_k} |w|^{1-a}\| \, |w|^a \quad .$$

On va pouvoir étendre au cas général les résultats classiques relatifs au problème de Bernstein. Le résultat qui suit est tiré du cours de L. NACHBIN, 1962/63 [8].

PROPOSITION 7. – K étant le corps R, soient $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ un objet de $(\mathfrak{N})$, $A \subset \mathfrak{A}$ engendrant $\mathfrak{A}$, $W \subset \mathfrak{W}$ tel que le sous-$\mathfrak{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathfrak{W}$. Pour que $\mathfrak{W}$ soit de type fini sous $\mathfrak{A}$, il suffit que, pour tout $w \in W$ et tout $f \in A$, la série $\|f^n w\|^{1/n}$ diverge.

D'après la proposition 6, on peut supposer $A = \{f\}$, $W = \{w\}$, et il suffit de prouver que $\mathfrak{A}|w|^{1/2}$ est de type fini sous $\mathfrak{A}$. Remarquons d'abord que, si $\|w\| \leq 1$, ce qu'on peut toujours supposer,

$$\|f^n\|_w{}^{1/n} = \||f| \cdot |w|^{1/n}\|$$

est une fonction croissante de n, par suite la série $\|f^{2n} w\|^{1/2n}$ diverge. Si $\|f^n w\|^{1/n}$ ne tend pas vers l'infini, posons

$$M_n = ((n+1) \sup_{k \in N} \|f^k w\|^{1/k})^n \qquad ;$$

sinon posons

$$M_n = \|f^{2n} w\|^{1/2} \qquad .$$

Dans tous les cas, M_n est une suite de nombres réels > 0, telle que $M_n^{1/n}$ tende vers l'infini, que $M_n^{-1/n}$ soit une série divergente et que $\|f^{2n} w\| \leq M_n^2$. Considérons alors la fonction $p : R \to R_+$, définie pour $x \neq 0$ par $p(x) = \inf_{n \in N} \frac{M_n}{|x|^n}$ et par $p(0) = M_0$. Comme $\frac{M_n}{|x|^n}$ tend vers l'infini uniformément sur tout compact quand n tend vers l'infini, p est borne supérieure sur tout compact d'une famille finie, donc continue et partout strictement positive. Or

$$\|px^n\|^{-1/n} \geq M_n^{-1/n}$$

de sorte que, d'après le théorème classique de Carleman-Denjoy, p est un poids. Enfin, comme $|w| \leq \frac{M_n^2}{|f|^{2n}}$ pour tout m, on a :

$$|w| \leq (p(f))^2 , \qquad \text{soit} \quad |w|^{1/2} \leq p(f) \qquad .$$

Nous allons maintenant envisager le cas de fonctions à valeurs complexes et essayer d'étendre le théorème de Carleman-Denjoy. Le problème a été étudié par P. MALLIAVIN [4] dans le cas d'une algèbre séparante et d'un poids unique. Ce qui suit est tiré d'une partie de son article.

PROPOSITION 8. — K étant le corps C, soient $(X, \mathfrak{A}, \mathfrak{W})$ un objet de $(\mathfrak{N})$, $A \subset \mathfrak{A}$ engendrant $\mathfrak{A}$, $W \subset \mathfrak{W}$ tel que le sous-$\mathfrak{A}$-module engendré par W soit dense dans $\mathfrak{W}$; supposons que, pour tout $f \in A$, $f(X)$ soit négligeable (pour la mesure de Haar) et que toute composante connexe Ω de $\complement \overline{f(X)}$ contienne un angle Λ (d'origine quelconque) d'ouverture φ telle que, pour tout $w \in W$,

$$\sum_{n \in N} \|wf^n\|^{-(\pi/n\varphi)} = \infty \quad ,$$

alors $\mathfrak{W}$ est de type fini sous $\mathfrak{A}$.

D'après la proposition 6, on peut supposer que $W = \{w\}$, $A = \{f\}$; il suffit alors de prouver que $\mathfrak{A}|w|^{1/2}$ est de type fini sous $\mathfrak{A}$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une fonction continue à support compact g sur $\hat{X}$ telle que $gw \notin \mathfrak{A}|w|^{1/2}$. Soit alors, d'après Hahn-Banach, ψ une forme linéaire continue sur l'espace des applications bornées de X dans C nulle sur $\mathfrak{A}|w|^{1/2}$ et telle que $\psi(g|w|^{1/2}) \neq 0$. L'image de w par f est une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions à croissance lente à l'infini sur C (i. e. majorées par un polynôme en $|z|$). On vérifie qu'elle définit une mesure μ de support $\overline{f(X)}$ pour laquelle tout fonction continue à croissance lente à l'infini h est intégrable et

$$\int h \, d\mu = \psi((h \circ f) \ |u|^{1/2}) \quad .$$

Par suite μ est non nulle, orthogonale aux polynômes et si on pose $M_u = \|wf^n\|$, on a

$$\int |z^n| \ |d\mu(z)| \leq M_{2^n}^{1/2} \quad .$$

Pour tout $z \in \Omega$, posons

$$F(z) = \int \frac{d\mu(\xi)}{z - \xi} \quad ;$$

on définit ainsi une fonction holomorphe dans Ω. On peut toujours supposer que, pour tout $z \in A$, $d(z, \overline{f(X)}) \geq 1$ de sorte que de l'égalité

$$\frac{1}{z - \xi} = \sum_{p<n} \frac{\xi^p}{z^p} + \frac{\xi^n}{z^n(z - \xi)}$$

résulte l'inégalité, pour tout $z \in A$:

$$|F(z)| = \left|\frac{1}{z^n} \int \frac{\xi^n}{z - \xi} d\mu(\xi)\right| \leq \frac{1}{|z|^n} \int |\xi^n| \ d\mu(\xi)| \leq \frac{M_{2^n}^{1/2}}{|z|^n} \quad .$$

Comme $\sum_{n \in N} (M_{2^n}^{1/2})^{\pi/n\varphi} = \infty$, d'après un théorème classique de Watson (cf. MANDELBROJT [5], p. 27), $F(z) = 0$ pour tout $z \in A$, donc pour tout $z \in \Omega$. Par suite F est nulle dans le complémentaire de $\overline{f(X)}$.

Soit alors λ la densité i sur la couronne $r < |z - z_0| < R$ et $\psi(z) = \int \frac{d\lambda(\xi)}{\xi - z}$; ψ est constante positive pour $|z - z_0| < r$, nulle pour $|z - z_0| > R$ et toujours comprise entre 0 et $\psi(z_0)$. Lorsque z_0 , r , R varient les $\psi(z)$ forment un système total dans l'espace des fonctions continues à support compact. Comme, d'après FUBINI, $\mu(\psi) = - \lambda(F)$, $\mu(\psi) = 0$, d'où $\mu = 0$.

Deuxième partie

1. Rappels sur les fonctions différentiables.

Il n'est pas question ici de définir toutes les notions de différentiabilité ; on se placera seulement dans le cadre assez général de deux espaces vectoriels topologiques et bornologiques de type convexe E , F , F étant supposé séparé. Rappelons qu'une bornologie de type convexe sur un espace vectoriel E est définie par une partie $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{P}(E)$ contenant les points, telle que si $A \subset B$ et $B \in \mathfrak{A}$, $A \in \mathfrak{A}$ et stable par homothétie et enveloppe disquée, et qu'une homologie est compatible avec une topologie localement convexe si les ensembles de $\mathfrak{A}$ sont absorbés par les voisinages de l'origine et si l'adhérence d'un ensemble de $\mathfrak{A}$ est dans $\mathfrak{A}$. Les ensembles de $\mathfrak{A}$ seront appelés parties bornées.

On dira qu'une application f , définie dans un voisinage de l'origine dans E et à valeurs dans F , est tangente à zéro à l'origine, si elle vérifie la condition qui suit :

Pour tout disque borné A de E (tout voisinage disqué de zéro B dans F), il existe un disque borné B de F (un voisinage disqué de zéro A dans E) et $\alpha \in R^*$ tels que $x \in \nu A$ entraîne $f(x) \in \nu B$ pour tout $\nu \in K$ tel que $|\nu| < \alpha$. En outre, pour tout voisinage disqué de zéro B de F , il existe un disque borné A de E tel que, pour tout $\varepsilon \in R_+^*$, il existe $\eta \in R_+^*$ tel que $x \in \lambda A$ entraîne $f(x) \in \lambda\mu B$ pour tout couple (λ , μ) de scalaires tels que $|\mu| = \varepsilon$ et $|\lambda| \leqslant \eta$.

On peut traduire cette condition de la façon suivante :

Pour toute semi-norme bornée p sur E (resp. toute semi-norme continue q sur F) il existe une semi-norme bornée q sur F (resp. une semi-norme continue p sur E) et $\alpha \in R_+^*$ tels que $p(x) \leqslant \alpha$ entraîne $(q \circ f)(x) \leqslant \varepsilon p(x)$. En outre, pour toute semi-norme continue q sur F , il existe une semi-norme bornée p sur E telle que, pour tout $\varepsilon \in R_+^*$, il existe $\eta \in R_+^*$ tol que $p(x) \leqslant \alpha$ entraîne $(q \circ f)(x) \leqslant \varepsilon p(x)$.

Remarquons que si E , F sont deux espaces normés, munis de leur topologie et de leur bornologie canonique, on retrouve bien la notion habituelle.

Par la suite, on désignera par $\mathcal{O}(E , F)$ l'espace vectoriel des germes de fonction tangente à zéro à l'origine.

Dans tout ce qui va suivre, on désignera par $\mathrm{Lbc}(E , F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues et bornées de E dans F. $\mathrm{Lbc}(E , F)$ est un espace vectoriel topologique et bornologique, les bornés de $\mathrm{Lbc}(E , F)$ étant les parties équicontinues et équibornées d'applications linéaires et la topologie celle de la convergence uniforme sur les ensembles bornés de E. Il est clair qu'une forme linéaire continue et bornée, qui est tangente à zéro à l'origine, est nécessairement nulle. Par suite, on définira l'espace vectoriel des germes de fonction différentiables à l'origine comme somme (directe) des constantes, de $\mathrm{Lbc}(E , F)$ et de $\mathcal{O}(E , F)$. On définirait de façon analogue l'espace vectoriel des germes de fonctions différentiables en un point quelconque de E.

On voit donc qu'une application f d'un ouvert Ω de E dans F, différentiable en tout point de Ω, définit une application de Ω dans $\mathrm{Lbc}(E , F)$. On dira que f est deux fois différentiable dans Ω si cette application est à son tour différentiable en tout point de Ω. La différentielle seconde est donc une application de Ω dans $\mathrm{Lbc}(E , \mathrm{Lbc}(E , F))$ qui est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathrm{Bbc}(E , F)$ des applications bilinéaires de $E \times E$ dans F, bornées et hypocontinues, muni de la bornologie des parties équibornées et équihypocontinues et de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $E \times E$, ou encore à $\mathrm{Lbc}(E \otimes E , F)$, $E \otimes F$ désignant la produit tensoriel topologique et bornologique de E par E. En réalité, le théorème de Schwarz précise sous certaines hypothèses, en particulier si f est trois fois différentiable, que la différentielle seconde est une forme bilinéaire symétrique, donc définit une application de Ω dans $\mathrm{Lbc}(E \vee E, F)$ où $E \vee E$ désigne le produit symétrique de E par lui-même, quotient de $E \otimes E$ par l'espace vectoriel (resp. fermé) engendré par les $x \otimes y - y \otimes x$, suivant que F est supposé séparé ou non.

On définit aisément par récurrence les applications n fois différentiables dans Ω et la différentielle d'ordre n qui est une application de Ω dans $\mathrm{Lbc}(\bigvee_n E , F)$. Si une application $f : \Omega \to E$ est différentiable pour tous les ordres, on dira qu'elle est indéfiniment différentiable. Une telle application définit alors une application de Ω dans $\prod_n \mathrm{Lbc}(\bigvee_n E , F)$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Lbc}(\coprod_n (\bigvee_n E), F)$, $\coprod_n (\bigvee_n E)$ désignant la somme directe des espaces $\bigvee_n E$, c'est-à-dire l'algèbre symétrique $\mathbf{V}(E)$ topologique et bornologique de E. On notera $x, y \rightsquigarrow df(x ; y)$ l'application de $\Omega \times \mathbf{V}(E) \to F$ ainsi définie. Autrement dit $x \rightsquigarrow df(x ; y)$ est la "dérivée partielle suivant la direction y". On notera que f sera assimilée à une dérivée d'ordre zéro et que $f(x) = df(x ; 1)$.

Si φ est une application linéaire continue et bornée de F dans un espace vectoriel topologique et bornologique G, f une application indéfiniment différentiable de Ω dans F, $\varphi \circ f$ est alors indéfiniment différentiable dans Ω et

$$d(\varphi \circ f)(x ; y) = \varphi(df(x ; y))$$

soit

$$d(\varphi \circ f) = \varphi \circ df \quad .$$

Si ψ est une application linéaire continue et bornée d'un espace vectoriel topologique et bornologique H dans E, $f \circ \psi$ est indéfiniment différentiable dans $\psi^{-1}(\Omega)$ et

$$d(f \circ \psi)(x ; y) = df(\psi(x) ; \overline{\psi}(y))$$

où $\overline{\psi}$ est le morphisme canonique $V(H) \to V(E)$ défini par ψ.

Un cas particulier important est celui où E et F sont deux espaces vectoriels topologiques munis de leur bornologie canonique, un autre celui où E, F sont bornologiques munis de leur topologie canonique c'est-à-dire la topologie engendrée par les disques absorbant les bornés si celle-là est compatible avec la bornologie.

2. Fonctions quasi-analytiques.

Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques et bornologiques de type convexe, f une application indéfiniment différentiable d'un ouvert connexe de E dans F séparé ; on dit que f est quasi-analytique dans Ω si, pour tout $a \in \Omega$, $f(\Omega)$ et $df(a ; V(E))$ engendrent le même sous-espace vectoriel fermé dans F. On remarquera que de toute façon $df(a ; x)$ appartient au sous-espace vectoriel fermé engendré par $f(\Omega)$ pour tout $a \in \Omega$ et tout $x \in V(E)$, en effet, si x est un monôme $x_1 \vee \cdots \vee x_n$,

$$df(a ; x) = \frac{\partial f}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}(a) \quad .$$

Notons que f reste quasi-analytique si on munit E de la structure de type convexe la plus fine (E est alors limite inductive des sous-espaces de dimension finie) ; la bornologie de F n'intervient pas alors, et on peut se contenter d'étudier le cas où E est un espace vectoriel (sans structure supplémentaire) et F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé.

Si F est le corps de base, une fonction non nulle est quasi-analytique s'il n'existe aucun point de Ω où toutes les dérivées partielles s'annulent. En particulier, si $E = C^n$ et $F = C$, une fonction analytique de $\Omega \subset C^n$ dans C est quasi-analytique.

De façon générale, on appellera classe quasi-analytique tout espace vectoriel de fonctions quasi-analytiques ; cette notion coïncide avec celle qui a été introduite par DENJOY, lorsque par exemple $E = F = R$. Dans ce cas, une c. n. s., pour que l'espace des fonctions f réelles sur un intervalle $I \subset R$, indéfiniment différentiables et telles qu'il existe $k \in R_+^*$ tel que $|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n M_n$, où $(M_n)_{n\in N}$ est une suite de nombres réels positifs, soit quasi-analytique est que, si on pose

$$\beta_n = \inf_{k\geqslant n} M_k^{1/k} \quad ,$$

la série $1/\beta_n$ diverge (condition de Carleman ; cf. S. MANDELBROJT [5], chapitre 4.I.III).

On va donner une condition suffisante de quasi-analyticité due à L. NACHBIN [10].

Soient E un espace vectoriel sur R, α une semi-norme sur $V(E)$. On dit que α vérifie la condition de Carleman-Denjoy s'il existe un système de générateurs G de E tel que, pour tout $g \in G$, et tout monôme x, la série $\alpha(xu^n)^{-1/n}$ diverge.

PROPOSITION. - Soient E un espace vectoriel sur R, f une fonction indéfiniment différentiable d'un ouvert (pour la topologie finie) connexe Ω de E dans R, telle que $\sup\limits_{x\in\Omega} |df(x ; y)|$ soit fini et vérifie la condition de Carleman-Denjoy ; alors, s'il existe $a \in \Omega$ tel que, pour tout $y \in V(E)$, $df(a ; y)$, f est nulle dans Ω.

En effet, avec les notations qui précèdent, il suffit de prouver que, si la suite des différentielles est nulle en $b \in \Omega$, il en est de même en tout point $c \in \Omega$ tel que $c - b \in RG$; on peut en effet relier deux points de Ω par une ligne polygonale à côté parallèles aux éléments de G. Il suffit alors de prouver que $df(x ; x) = 0$ lorsque x est un monôme. Posons

$$g(y) = df(y ; x) \quad .$$

On a

$$dg(u ; v) = df(u ; vx)$$

de sorte que

$$\sup_{u\in\Omega} |dg(u ; v)|$$

vérifie encore la condition de Carleman-Denjoy. Par suite, l'application $h : \lambda \to g(b + \lambda u)$ de $[0 , 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les conditions :

$$\begin{cases} h^{(n)}(0) = 0 \text{ pour tout entier } n \\ \sum_{n\in N} \sup_{\lambda\in[0,1]} |h^{(n)}(\lambda)|^{-1/n} = \infty \end{cases} \quad .$$

D'après le théorème classique de Carleman, $h(\lambda) = 0$, d'où $df(c ; x) = 0$.

PROPOSITION. - Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F un espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur $\mathbb{R}$, f une fonction indéfiniment différentiable d'un ouvert connexe Ω de E dans F, telle que, pour toute semi-norme p sur F, $\sup_{x\in\Omega} p(df(x ; y))$ soit fini et vérifie la condition de Carleman-Denjoy. Dans ces conditions, f est quasi-analytique dans Ω.

En effet supposons par l'absurde qu'il existe un point $a \in \Omega$ tel que le sous-espace vectoriel fermé C de F engendré par $df(a ; V(E))$ ne contienne pas $f(\Omega)$ et soit, d'après Hahn-Banach, une forme linéaire φ continue, nulle sur G et non sur $f(\Omega)$. On obtient une contradiction en appliquant à $\varphi \circ f$ les résultats de la proposition précédente.

Remarque. - Si α vérifie la condition $\alpha(xy) \leqslant \sqrt{\alpha(x^2)\ \alpha(y^2)}$ pour que $\alpha(xu^n)^{-1/n}$ diverge, il suffit que $\alpha(u^{2n})^{-1/2n}$ diverge, puisque

$$\alpha(xu^n)^{-1/n} \geqslant \alpha(x^2)^{-1/2n}\ \alpha(u^{2n})^{-1/2n} \quad .$$

Si en outre $\alpha(u^n)^{1/n}$ est une fonction croissante de n, il suffit donc que $\alpha(u^n)^{-1/n}$ diverge.

Montrons maintenant comment la théorie des fonctions quasi-analytiques peut s'appliquer au problème de Bernstein, dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$. Soient $(X , \mathcal{a} , \mathfrak{W})$ un objet de $(\mathfrak{N})$, $A \subset \mathcal{a}$ engendrant $\mathcal{a}$, $\mathfrak{A}$ l'espace vectoriel engendré par A, $W \subset \mathfrak{W}$ tel que le sous-$\mathcal{a}$-module engendré par W

soit dense dans $\mathfrak{W}$. Fixons w et désignons par h l'application $f \rightsquigarrow e^{if} w$ de $\mathfrak{A}$ dans l'espace des applications bornées de X dans C muni de la norme uniforme. On vérifie immédiatement que h est indéfiniment différentiable et que

$$dh(f ; f_1 \dots f_n) = (i)^n e^{if} f_1 \dots f_n w$$

de sorte que :

$$\sup_{f \in \mathfrak{A}} |dh(f ; f_1 \dots f_n)| \leq \|wf_1 \dots f_n\| \quad .$$

Pour que h soit quasi-analytique, il suffit donc que la semi-norme α, définie par $P(f_1 , \dots , f_n) \rightsquigarrow \|wP(f_1 , \dots , f_n)\|$, P désignant ici un polynôme, vérifie la condition de Carleman-Denjoy. On peut toujours supposer que $\|w\| \leq 1$, de sorte que

$$\|wf^n\|^{1/n} = \| |w|^{1/n} |f| \|$$

est une fonction croissante de n. D'après la remarque, il suffit donc que, pour toute fonction $f \in A$,

$$\sum_{n \in N} \|wf^n\|^{1/n} = \infty \quad .$$

Supposons h quasi-analytique pour tout $w \in W$; désignons par $\mathfrak{B}$ l'espace vectoriel complexe engendré par les e^{if} où f parcourt $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ est une algèbre unitaire autoadjointe de fonctions uniformément continues et bornées sur $\hat{X}$. Comme $\mathfrak{B}$ sépare les points de $\hat{X}$, $\mathfrak{B}$ est dense dans l'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées sur $\hat{X}$. Pour voir que $\mathfrak{W}$ est de type fini sous $\mathfrak{A}$, il suffit de voir que $\overline{\mathfrak{W} + i\mathfrak{W}}$ est un $\mathfrak{B}$-module. Or la quasi-analyticité de h, appliquée au point $f = 0$, prouve que $\overline{\mathfrak{B}w} = \overline{(\mathfrak{A} + i\mathfrak{A})\, w}$, donc que $\overline{\mathfrak{W} + i\mathfrak{W}}$ est l'espace vectoriel fermé engendré par les $\mathfrak{B}w$: c'est donc un $\mathfrak{B}$-module.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKHIEZER (N. I.) et BABENKO (K. I.). - Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 57, 1947, p. 315-318.

[2] CARLEMAN (Rorsten). - Les fonctions quasi-analytiques. - Paris, Gauthier-Villars, 1926 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[3] CARLESON (Lennart). - On Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 953-961.

[4] MALLIAVIN (Paul). - L'approximation polynomiale pondérée sur un espace localement compact, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 605-612.

[5] MANDELBROJT (Szolem). - Séries adhérentes, Régularisation des suites, Applications. - Paris, Gauthier-Villars, 1952 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).

[6] NACHBIN (Leopoldo). - On the weighted polynomial approximation in a localy compact space, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 47, 1961, p. 1055-1057.

[7] NACHBIN (Leopoldo). - Sur l'approximation polynomiale pondérée des fonctions réelles continues, Atti della 2a Riunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine [2. 1961. Firenze-Bologna], p. 42-58. - Roma, Gremonese, 1963.

[8] NACHBIN (Leopoldo). - Analyse fonctionnelle. Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1962/63 (Cours non rédigé).

[9] NACHBIN (Leopoldo). - Algèbres et modules des fonctions continues. Conférence prononcée à la Faculté des Sciences de Rennes (non rédigée).

[10] NACHBIN (Leopoldo). - Sur un théorème de Denjoy-Carleman pour les applications vectorielles indéfiniment différentiables quasi-analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 256, 1963, p. 862-863.

[11] POLLARD (Harry). - Solution of Bernstein's approximation problem, Proc. Amer. math. Soc., t. 4, 1953, p. 869-875.

[12] "Séminaire Banach". - Paris, Ecole Normale Supérieure, 1962/63 (non publié).