Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Gabriel Mokobodzki

Sélections continues

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 2 (1963), exp. n° 1, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1963__2__A1_0>

SÉLECTIONS CONTINUES

par Gabriel MOKOBODZKI

[d'après Ernest MICHAEL (*)]

1. Position du problème.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $\Phi : X \to Y$ une application multivoque de X dans Y (pour tout $x \in X$, $\Phi(x)$ est un sous-ensemble non vide de Y). Quelles conditions doit vérifier le triplet (X, Φ, Y) pour qu'il existe une famille d'applications continues f ayant les propriétés suivantes ?

(a) $f : X \to Y$ et $f(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in X$.

(b) Pour tous $x_0 \in X$, $y_0 \in \Phi(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que f est définie sur U, continue,

$$f : U \to Y , \quad f(x) \in \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in U$$

et

$$f(x_0) = y_0 .$$

(c) Si A est fermé dans X et si g est une application continue de A dans Y telle que $g(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in A$, alors il existe f définie sur X (ou dans un voisinage de A) et

$$f : X \to Y , \quad f(x) \in \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in X$$

et

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in A .$$

On appellera <u>sélection continue</u> de Φ, une application continue f définie sur un sous-ensemble X' de X, à valeurs dans Y, et telle que, pour tout $x \in X'$,

$$f(x) \in \Phi(x) .$$

On a ainsi une formulation générale pour les problèmes de sections continues d'une application, d'extensions d'applications continues, etc., qui semble particulièrement bien adaptée.

(*) L'exposé qui suit est seulement une introduction aux travaux de MICHAEL sur les sélections continues et sur la caractérisation des espaces paracompacts :
MICHAEL (Ernest). - Continuous selections, I., Annals of Math., t. 63, 1956, p. 361-382.

Une classe importante d'applications multivoques intervient dans les problèmes de sélections continues : ce sont les applications multivoques semi-continues inférieurement dont on rappelle la définition :

DÉFINITION. - <u>Une application multivoque</u> Φ <u>de</u> X <u>dans</u> Y <u>sera dite semi-continue inférieurement (en abrégé s. c. i.) si, pour tout</u> $x \in X$ <u>et tout</u> ω <u>ouvert de</u> Y <u>tel que</u> $\Phi(x) \cap \omega \neq \emptyset$, <u>il existe un voisinage</u> V <u>de</u> X <u>tel que</u>

$$(x' \in V) \implies (\Phi(x') \cap \omega \neq \emptyset) .$$

2. Exemples de telles applications.

1° Soit f une application continue de Y sur X ; alors $x \rightsquigarrow f^{-1}(x)$ est s. c. i. si et seulement si f est ouverte.

2° Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'applications continues de X dans Y ; alors Φ , définie sur X par

$$\Phi(x) = \bigcup_{\alpha \in A} \{\varphi_\alpha(x)\} \qquad \forall x \in X ,$$

est s. c. i.

3° Une fonction univoque est s. c. i. si et seulement si elle est continue au sens ordinaire.

4° Soit f une fonction numérique sur X , s. c. i. au sens ordinaire ; alors $x \rightsquigarrow]-\infty , f(x)]$ définit une application multivoque s. c. i.

3. Quelques propriétés des applications multivoques s. c. i.

Soient X et Y des espaces topologiques.

1° Si $(\Phi_i)_{i \in I}$ est une famille d'applications s. c. i. de X dans Y , alors $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ est s. c. i.

2° Si $\Phi : X \to Y$ est s. c. i., $\bar{\Phi}$, définie pour tout $x \in X$ par $\bar{\Phi}(x) = \overline{\Phi(x)}$, est encore s. c. i.

3° Soient Z un espace topologique, Φ et Ψ des applications s. c. i. de X dans Y et de Y dans Z respectivement. Alors $\Psi \circ \Phi : X \to Z$, définie pour tout $x \in X$ par

$$(\Psi \circ \Phi)(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) ,$$

est encore s. c. i. En particulier, si Y s'identifie à un sous-espace de Z et si Ψ est l'injection canonique de Y dans Z, Φ peut être considérée comme application s. c. i. de X dans Z.

4° On dira que $\Psi : Y \to Z$ est de graphe ouvert, si le graphe de Ψ dans $Y \times Z$ est ouvert dans $Y \times Z$, et Ψ est alors s. c. i. Si en outre $\Phi : X \to Y$ est s. c. i., alors

$$\Psi \circ \Phi : X \to Z$$

est de graphe ouvert.

5° Soient Φ, Ψ, des applications s. c. i. de X dans Y. Si Ψ est de graphe ouvert et si $\Phi \cap \Psi$ est une application multivoque (c'est-à-dire $\Phi(x) \cap \Psi(x) \neq \emptyset$ $\forall\, x \in X$), alors

$$x \to \Phi(x) \cap \Psi(x)$$

est s. c. i.

Applications. - Soient $(Y , \mathcal{U})$ un espace uniforme, X un espace topologique, Φ une application s. c. i. de X dans Y. Si V est un entourage ouvert de $\mathcal{U}$, alors

$$V\Phi : x \to V(\Phi(x))$$

est s. c. i. de graphe ouvert. Cela résulte du fait que l'application $y \to V(y)$ est s. c. i. de graphe ouvert.

Réciproquement, si pour tout entourage ouvert V de $\mathcal{U}$, $V\Phi$ est s. c. i., alors Φ est s. c. i.

Voici un lemme utile dans les problèmes de sélections :

LEMME 1. - *Soit* $(Y , \mathcal{U})$ *un espace uniforme séparé, et soit* F *un sous-espace non vide de* Y, *complet, donc fermé dans* Y. *On considère le filtre* $\mathfrak{F}$ *qui a pour base les ensembles* $V(F)$ *où* V *parcourt* $\mathcal{U}$.

Tout filtre de Cauchy $\mathfrak{G}$ *sur* Y, *plus fin que* $\mathfrak{F}$, *converge vers un point de* F.

Démonstration. - Soit $\mathfrak{G}_0$ le filtre de Cauchy minimal associé à $\mathfrak{G}$. Alors $\mathfrak{G}_0$ admet une trace sur F, d'où le résultat.

4. Deux techniques pour obtenir des sélections continues.

A. - Soient X un espace topologique, (Y , d) un espace métrique, Φ une application multivoque de X dans Y telle que $\forall x \in X$, $\Phi(x)$ est complet dans Y .

On pose $V_n = d^{-1}([0 , \frac{1}{n}[)$; V_n est un entourage ouvert de (Y , d) .

PROPOSITION 1. - <u>Soit</u> f_n <u>une suite d'applications continues de</u> X <u>dans</u> Y <u>telle que</u>

1° f_n <u>est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme</u> ;

2° <u>Pour tout</u> n , f_n <u>est une sélection continue de</u> $V_n \Phi$.

<u>Dans ces conditions, la suite</u> f_n <u>converge uniformément vers une application continue</u> f <u>de</u> X <u>dans</u> Y , <u>et</u> f <u>est une sélection continue de</u> Φ .

<u>Démonstration</u>. - A l'aide du lemme précédent, on montre que la suite f_n converge simplement vers une fonction f , et celle-ci est limite uniforme de la suite f_n .

B. - Soient toujours X un espace topologique et (Y , d) un espace métrique.

DÉFINITION. - <u>On dira que</u> $f : X \to Y$ <u>est</u> ε-<u>continue si, pour tout</u> $x \in X$, <u>il existe un voisinage</u> ω <u>de</u> x <u>tel que</u>

$$(x' \in \omega) \implies d(f(x) , f(x')) < \varepsilon .$$

LEMME 2. - <u>Soit</u> f_n <u>une suite d'applications de</u> X <u>dans</u> Y <u>telle que</u> :

1° f_n <u>est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme</u> ;

2° <u>Pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>et</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $n' \geqslant n$ <u>tel que</u> $f_{n'}$ <u>soit</u> ε-<u>continue</u>.

<u>Si la suite</u> f_n <u>converge simplement vers une fonction</u> f , <u>alors</u> f <u>est continue</u>.

Soit maintenant Φ une application multivoque de X dans Y telle que, pour tout $x \in X$, $\Phi(x)$ soit complet. On peut alors améliorer la proposition précédente :

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> f_n <u>une suite d'applications de</u> X <u>dans</u> Y <u>telle que</u> :

1° f_n <u>est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme</u> ;

2° <u>Pour tout</u> n , f_n <u>est une sélection de</u> $V_n \Phi$, <u>et</u> f_n <u>est</u> ε_n-<u>continue</u> $(\varepsilon_n \downarrow 0)$.

<u>Dans ces conditions, la suite</u> f_n <u>converge uniformément vers une sélection continue</u> f de Φ .

Revenons au problème des sélections continues. Le lemme suivant montre la nécessité d'utiliser des applications multivoques s. c. i.

LEMME 3. - Soient X et Y deux espaces topologiques, Φ une application multivoque de X dans Y. Si, pour tout $x_0 \in X$, et $y_0 \in \Phi(y_0)$, il existe un voisinage U de x_0 et une sélection continue f de Φ, définie dans U, et telle que $f(x_0) = y_0$, alors Φ est s. c. i.

5. Caractérisation des espaces paracompacts.

Soit X un espace topologique dont tout point est fermé.

PROPOSITION 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) X est paracompact.

(2) Pour tout espace de Banach Y et toute application s. c. i. Φ de X dans Y, telle que $\Phi(x)$ soit convexe fermé pour tout $x \in X$, il existe une sélection continue f de Φ définie sur X tout entier ; pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

La démonstration de (1) $\Longrightarrow$ (2) repose sur le lemme suivant.

LEMME 4. - Soit V un voisinage ouvert symétrique convexe de 0 dans Y. Il existe une sélection continue de $\Phi + V$.

Pour tout $y \in Y$, soit U_y l'ouvert

$$U_y = \{x \ ; \ x \in X \ , \ \Phi(x) \cap (y + V) \neq \emptyset\} \ ;$$

les ouverts U_y forment un recouvrement de X, et il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ qui lui est subordonnée, les supports des p_i formant une famille localement finie. Pour chaque $i \in I$, soit y_i tel que le support de p_i soit contenu dans U_{y_i}. On pose

$$f = \sum p_i(x).y_i \ ;$$

a. f est continue, car les supports des p_i forment une famille localement finie,

b. $f(x) \in \Phi(x) + V$, pour tout $x \in X$.

$$f(x) = \sum_{x \in U_{y_i}} p_i(x).y_i \ ,$$

puisque $S_{p_i} \subset U_{y_i}$; d'autre part,

$$(x \in U_{y_i}) \iff \Phi(x) \cap (y_i + V) \neq \emptyset ,$$

ou encore

$$(x \in U_{y_i}) \iff y_i \in \Phi(x) + V .$$

Enfin :

$$\sum p_i(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum p_i(x).y_i \in \Phi(x) + V ,$$

puisque les p_i sont $\geqslant 0$ et $\Phi(x) + V$ convexe.

Ce lemme étant démontré, soit V_1 la boule unité (ouverte) de Y. On définit V_n par récurrence en posant $V_{n+1} = \frac{1}{2^n} V_n$. On construit une suite f_n qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) $f_n : X \to Y$;
(2) $f_n(x) \in (f_{n-1}(x) + 2V_{n-1}) \quad \forall\, x \in X$;
(3) $f_n(x) \in (\Phi(x) + V_n) \quad \forall\, x \in X$.

Une telle construction est possible ; supposons que l'on ait déjà défini des f_n satisfaisant à ces conditions pour $n \leqslant k$; posons

$$\Phi_{k+1} = \Phi \cap (f_k + V_k) .$$

Par hypothèse, $\Phi_{k+1}(x) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$, et Φ_{k+1} est s. c. i. ; il existe alors une sélection continue f_{k+1} de $(\Phi_{k+1} + V_{k+1})$, et l'on a, pour tout $x \in X$,

$$f_{k+1}(x) \in (f_k(x) + V_k + V_{k+1}) \subset f_k(x) + 2V_k ,$$

$$f_{k+1}(x) \in (\Phi_{k+1}(x) + V_{k+1}) \subset \Phi(x) + V_{k+1} .$$

Enfin on remarque que

$$\sum_{p=n}^{+\infty} V_p \subset 2V_n ,$$

et que la suite f_n est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme ; la fonction $f = \lim f_n$ est alors une sélection continue de Φ.

<u>Démonstration de</u> (2) $\Longrightarrow$ (1). – Nous admettrons l'équivalence des propriétés 1 et 1' pour un espace topologique.

1. X est paracompact ;

1'. Tout point de X est fermé, et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, il existe une partition continue de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$, c'est-à-dire une famille de fonctions numériques continues $\geqslant 0$, $(p_U)_{U\in\mathcal{U}}$, telle que $\forall\ U \in \mathcal{U}$ et $x \notin U$, $p_U(x) = 0$ et, pour tout $x \in X$, $\sum\limits_{U\in\mathcal{U}} p_U(x) = 1$.

Nous nous ramènerons à démontrer que (2) $\Longrightarrow$ 1'. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X, et soit $(p_U)_{U\in\mathcal{U}}$ une partition continue de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ (si elle existe). Pour chaque $x \in X$, la famille de nombres réels $(p_U(x))_{U\in\mathcal{U}}$ peut être considérée comme un élément de $\ell^1(\mathcal{U})$, c'est-à-dire comme une application de $\mathcal{U}$ dans $\underset{\sim}{R}$ satisfaisant à la condition

$$\|y\| = \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)| = \sum_{U\in\mathcal{U}} p_U(x) < +\infty ;$$

globalement, nous pouvons considérer la famille (p_U) comme une application f de X dans $\ell^1(\mathcal{U})$. Traduisons dans ce langage les conditions imposées à la famille $(p_U)_{U\in\mathcal{U}}$:

1° f doit être continue lorsqu'on munit $\ell^1(\mathcal{U})$ de la topologie définie par la norme usuelle : si $y \in \ell^1(\mathcal{U})$,

$$\|y\| = \sum_{U\in\mathcal{U}} |y(U)| .$$

2° Pour tout $x \in X$, soit $\Phi(x) \subset \ell^1_+(\mathcal{U})$ défini par

$$(y \in \Phi(x)) \iff (y(U) = 0 \quad \text{pour tout} \quad U \not\ni x)$$

et

$$\sum y(U) = 1 .$$

Pour tout $x \in X$, on doit avoir $f(x) \in \Phi(x)$. Il est clair que $\Phi(x) \neq \emptyset$ $\forall\ x \in X$, et que $\Phi(x)$ est un ensemble convexe fermé, donc complet, puisque $\ell^1(\mathcal{U})$ est un espace de Banach.

On est ainsi ramené à trouver une sélection continue de l'application multivoque Φ, ce qu'on pourra faire grâce au lemme suivant :

LEMME 5. - <u>L'application multivoque</u> Φ <u>de</u> X <u>dans</u> $\ell^1_+(\mathcal{U})$, <u>définie précédemment, est semi-continue inférieurement</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soit E le sous-espace vectoriel de $\ell^1(\mathcal{U})$ formé des $y \in \ell^1(\mathcal{U})$ tels que $y(U) = 0$, sauf pour un nombre fini d'ouverts $U \in \mathcal{U}$. Pour tout $x \in X$, posons

$$\Phi_1(x) = \{y \ ; \ y \in E \ , \ y \geqslant 0 \ , \ y(U) = 0 \ , \ \forall\ U \not\ni x \ ; \ \sum_U y(U) = 1\} .$$

Lorsqu'on munit E de la topologie induite par celle de $\ell^1(\mathcal{U})$, on voit facilement que Φ_1 , considérée comme application multivoque de X dans E est s. c. i., et comme pour tout $x \in X$

$$\Phi(x) = \overline{\Phi_1(x)} \qquad \text{(adhérence dans } \ell^1(\mathcal{U}) \text{)},$$

il en résulte que Φ elle-même est s. c. i., ce qui termine la démonstration.