Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Michel Hacque

Étude des E-structures. II. Structures générales

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 7, p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A7_0>

ÉTUDE DES E-STRUCTURES
II. STRUCTURES GÉNÉRALES.

par Michel HACQUE

5. Structures générales.

Structures générales sur un ensemble.

DÉFINITION 5.1. - Une structure générale (S) sur un ensemble E ou une E-structure est déterminée par une famille $S = \{\rho_i\}_{i\in I}$ de E-applications vérifiant l'axiome :

(S_1) Pour tout couple d'éléments ρ_1 et ρ_2 de S, il existe un élément ρ_3 de S vérifiant $\rho_1 \subset \rho_3$ et $\rho_2 \subset \rho_3$.

Une E-structure (S) est pré-idempotente si elle vérifie l'axiome :

(S_2) Pour tout élément ρ_1 de S, il existe un élément ρ_2 de S vérifiant $\rho_1 \subset \rho_2^2$.

Une E-structure (S) est d'un type (T) [semi-parfait, parfait, symétrique, etc.] si toutes les E-applications de la famille S sont du même type (T).

Toute E-application ρ_i de la famille S détermine une structure simple d'ordre ρ_i à laquelle sont associées les notions fondamentales d'ordre ρ_i.

L'axiome (S_1) exprime que la partie S de $\mathcal{E}$ est filtrante à droite. Soit $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des parties de $\mathcal{E}$ non vides et filtrantes à droite. La relation d'ordre sur $\mathcal{E}$ détermine une relation de pré-ordre $<$ sur $\mathcal{E}^*$ caractérisée par la condition suivante : " $S < S'$ signifie que, pour tout élément ρ de S, il existe un élément ρ' de S' vérifiant $\rho \subset \rho'$ ". La condition " $S < S'$ et $S' < S$ " caractérise la relation d'équivalence canonique R associée à la relation de pré-ordre $<$. Soit θ l'application de $\mathcal{E}^*$ dans $\mathfrak{P}[\mathcal{E}]$ qui, à tout élément S de $\mathcal{E}^*$, associe la plus petite partie $\hat{S} = \theta(S)$ de $\mathcal{E}$ contenant S et héréditaire à gauche. Il est immédiat que l'application θ est une application surjective de $\mathcal{E}^*$ sur le sous-ensemble $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}^*$ formé par les éléments de $\mathcal{E}^*$ constitués par des parties de $\mathcal{E}$ héréditaires à gauche. La condition

$S \prec S'$ est alors équivalente à la condition $\hat{S} \subset \hat{S}'$. L'équivalence modulo R de deux éléments S et S' de $\mathcal{E}^*$ se traduit par la condition $\hat{S} = \hat{S}'$ ce qui montre que l'équivalence canonique R déduite de la relation de pré-ordre $<$ sur $\mathcal{E}^*$ coïncide avec l'équivalence canonique associée à l'application θ. L'ensemble $\mathcal{E}^*/R$, ordonné par la relation d'ordre déduite de la relation de pré-ordre $<$ par passage au quotient, est donc isomorphe à l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}$ ordonné par inclusion. L'ensemble $\hat{\mathcal{E}}$ est l'ensemble des copréfiltres de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ qui constitue le copréfiltre "impropre" n'est pas exclu) et l'ensemble $\mathcal{E}^*$ est l'ensemble des bases de copréfiltres de $\mathcal{E}$. Deux bases de copréfiltres sont équivalentes si et seulement si elles engendrent un même copréfiltre.

Une structure générale (S) est donc déterminée par une base S de copréfiltre de $\mathcal{E}$ appelée aussi base de (S). Il y a intérêt à identifier les structures générales déterminées par des bases équivalentes, c'est-à-dire à considérer que deux bases équivalentes déterminent une même structure générale. Toute structure générale admet donc une base privilégiée unique constituée par un copréfiltre de $\mathcal{E}$. Néanmoins, dans la pratique, cette base n'est pas très intéressante et il est préférable de lui substituer une base la plus petite possible. Par exemple, une structure simple est une structure générale particulière caractérisée par le fait qu'elle est déterminée par un copréfiltre "principal" c'est-à-dire ayant une base constituée par une seule E-application. C'est naturellement cette dernière base qui est la plus utile. Compte tenu de ce qui précède, une structure générale (S) est donc en fait d'un type (T) si elle admet une base du type (T).

Il existe une bijection entre l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}$ des copréfiltres de $\mathcal{E}$ et l'ensemble $\mathcal{S}$ des structures générales sur $\mathcal{E}$. La relation d'ordre sur $\hat{\mathcal{E}}$ détermine une relation d'ordre sur $\mathcal{S}$ notée $\subset$. Si S et S' sont deux bases de copréfiltres de $\mathcal{E}$, $\hat{S}$ et $\hat{S}'$ les copréfiltres qu'elles engendrent, (S) et (S') les structures générales qu'elles déterminent, il y a équivalence des trois conditions : $S < S'$, $\hat{S} \subset \hat{S}'$, $(S) \subset (S')$, qui expriment que la structure générale (S') est plus fine que la structure générale (S). Naturellement, la relation d'ordre définie sur l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des structures simples est induite par la relation d'ordre définie sur $\mathcal{S}$.

<u>Structures uniformes et structures quasi-uniformes</u>. - Une structure uniforme sur un ensemble E est déterminée par la donnée d'un ensemble $\mathcal{V}$ de parties de $E \times E$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(F_I) Toute partie de $E \times E$ contenant un ensemble de $\mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{V}$.

(F_{II}) Toute intersection finie d'ensemble de $\mathcal{V}$ appartient à $\mathcal{V}$.

(U_1) Tout ensemble de $\mathcal{V}$ contient la diagonale Δ.

(U_2) La relation $V \in \mathcal{V}$ entraîne $V^{-1} \in \mathcal{V}$.

(U_3) Quel que soit $V \in \mathcal{V}$, il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que $W \circ W \subset V$.

L'ensemble $\mathcal{V}$ est appelé le filtre des entourages de la structure uniforme.

Une structure quasi-uniforme sur un ensemble E est déterminée par la donnée d'un ensemble $\mathcal{V}$ de parties de $E \times E$ satisfaisant aux axiomes (F_I), (F_{II}), (U_1), (U_3).

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des parties V de $E \times E$ contenant la diagonale Δ ordonné par la relation d'inclusion et muni de la loi de composition des parties de $E \times E$. Muni de ces structures, l'ensemble $\mathfrak{D}$ est isomorphe au demi-groupe réticulé des relations binaires réflexives sur E. Soient $\mathfrak{D}^*$ l'ensemble des parties non vides de $\mathfrak{D}$ filtrantes à gauche et $\hat{\mathfrak{D}}$ l'ensemble des parties non vides de $\mathfrak{D}$ filtrantes à gauche et héréditaires à droite. L'ensemble $\mathfrak{D}^*$ est l'ensemble des bases de préfiltres de $\mathfrak{D}$ et l'ensemble $\hat{\mathfrak{D}}$ est l'ensemble des préfiltres de $\mathfrak{D}$ qui sont des filtres sur $E \times E$ appelés "filtres diagonaux".

Les axiomes (F_I), (F_{II}), (U_1) expriment que $\mathcal{V}$ est un filtre diagonal, c'est-à-dire un élément de $\hat{\mathfrak{D}}$. L'axiome (U_2) caractérise les filtres diagonaux dits "symétriques" et l'axiome (U_3) caractérise les filtres diagonaux dits "pré-idempotents".

DÉFINITION 5.2. - <u>Une structure pré-uniforme sur un ensemble</u> E <u>est déterminée par la donnée d'un filtre diagonal</u> $\mathcal{V}$ <u>appelé filtre de pré-entourages.</u>

<u>Une structure faiblement uniforme sur un ensemble</u> E <u>est déterminée par la donnée d'un filtre diagonal</u> $\mathcal{V}$ <u>symétrique appelé filtre des entourages faibles.</u>

En bref, une structure uniforme [resp. faiblement uniforme ou quasi uniforme] est une structure pré-uniforme dont le filtre de pré-entourages $\mathcal{V}$ est symétrique et pré-idempotent [resp. symétrique ou pré-idempotent].

Soit $\mathcal{E}'$ le demi-groupe réticulé des E-applications parfaites qui est un sous-demi-groupe de $\mathcal{E}$, mais qui n'est pas un sous-treillis du treillis $\mathcal{E}$.

PROPOSITION 5.1. - <u>Il existe une bijection canonique</u> v <u>de</u> $\mathcal{E}'$ <u>sur</u> $\mathfrak{D}$ <u>qui est</u> :

1° <u>Un anti-isomorphisme pour les structures d'ensembles ordonnés.</u> (Si $V_1 = v(\rho_1)$ et $V_2 = v(\rho_2)$, $\rho_1 \subset \rho_2$ est équivalent à $V_1 \supset V_2$.)

2° Un isomorphisme pour les structures de demi-groupe. (Si $V_1 = v(\rho_1)$, $V_2 = v(\rho_2)$ et $V = v(\rho)$, $\rho = \rho_2 \circ \rho_1$ est équivalent à $V = V_2 \circ V_1$.)

Cette bijection est caractérisée par les conditions suivantes :

a. A toute E-application parfaite ρ, l'application v associe l'élément de $\mathcal{V}$ $V = v(\rho)$ constitué par le graphe de la restriction à l'ensemble E de la relation de proximité δ associée à ρ.

b. A tout élément V de $\mathcal{V}$, l'application $\overset{-1}{v}$ associe la E-application parfaite $\rho = \overset{-1}{v}(V)$ caractérisée par l'une des conditions suivantes :

- La E-application ρ est associée à la relation de proximité δ caractérisée par : $Y \delta X$ est équivalent à l'existence de points $y \in Y$ et $x \in X$ tels que $(x, y) \in V$.

- La E-application ρ est de la forme $\rho = \rho_0 \circ \Pi$ dans laquelle l'application Π de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ est définie par l'égalité $\Pi(X) = V(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

La condition (b) de la proposition 3.2 et la condition (f) de la proposition 3.4 montrent qu'une E-application ρ est parfaite si et seulement si la relation de proximité δ associée vérifie la condition suivante :

" $Y \delta X$ est équivalent à l'existence de points $y \in Y$ et $x \in X$ tels que $y \delta x$ ".

Compte tenu de l'axiome $(E_2^!)$ cette propriété montre que le graphe V de la restriction à E de la relation de proximité δ est un élément de $\mathcal{V}$. Réciproquement, tout élément V de $\mathcal{V}$ est le graphe de la restriction à E de la relation unique δ déterminée par la première partie de la condition (b) et qui est la relation de proximité associée à une E-application parfaite. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, les parties de E ρ-proches de X étant celles qui rencontrent la partie

$$V(X) = \bigcup_{x \in X} V(x) \qquad ,$$

le plus petit ρ-voisinage de X est donc $V(X)$, ce qui entraîne la seconde partie de la condition (b). Les propriétés 1 et 2 découlent immédiatement de la formule $\rho = \rho_0 \circ \Pi$ avec la condition $\Pi(X) = V(X)$ où $V = v(\rho)$ et $\rho = \overset{-1}{v}(V)$.

Soient $\mathcal{E}'^*$ l'ensemble des parties non vides de $\mathcal{E}'$ filtrantes à droite et $\hat{\mathcal{E}}'$ l'ensemble des parties non vides de $\mathcal{E}'$ filtrantes à droites et héréditaires à gauche. L'ensemble $\mathcal{E}'^*$ est l'ensemble des bases de copréfiltres de $\mathcal{E}'$ et l'ensemble $\hat{\mathcal{E}}'$ est l'ensemble des copréfiltres de $\mathcal{E}'$.

LEMME 5.1. - L'application v de $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{D}$ admet pour extension une application de $\mathcal{P}[\mathcal{E}']$ sur $\mathcal{P}[\mathcal{D}]$ qui détermine un isomorphisme v^* de $\mathcal{E}'^*$ sur $\mathcal{D}^*$ et un isomorphisme $\hat{v}$ de $\hat{\mathcal{E}}'$ sur $\hat{\mathcal{D}}$.

Cette affirmation résulte immédiatement de la propriété 1 de la proposition 5.1.

THÉORÈME 5.1. - Il y a identité des structures suivantes :

a. Les structures pré-uniformes déterminées par un filtre de pré-entourages $\mathcal{V}$.

b. Les structures générales parfaites (S) déterminées par une base S constituée de E-applications parfaites.

L'identification est realisée par les conditions suivantes : $v^*(S)$ est une base du filtre $\mathcal{V}$ et $\hat{v}^{-1}(\mathcal{V})$ est une base de la structure générale parfaite (S).

Par définition, les structures générales parfaites (S) sont les structures générales qui admettent une base S constituée par des E-applications parfaites c'est-à-dire une base de copréfiltre de $\mathcal{E}$ qui est une base de copréfiltre de $\mathcal{E}'$. D'après le lemme 5.1, deux bases de copréfiltres de $\mathcal{E}'$ équivalentes sont associées à deux bases de filtres diagonaux qui déterminent un même filtre diagonal. Il en résulte immédiatement le théorème.

Remarque. - Si S est une base d'une structure générale parfaite (S), celle-ci est déterminée par le copréfiltre $\hat{S}$ de $\mathcal{E}$ et par le copréfiltre $S' = \hat{S} \cap \mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}'$. La structure pré-uniforme correspondante est déterminée par le filtre $\mathcal{V}$ de pré-entourages ayant pour base $v^*(S)$ et identique à $\hat{v}(S')$.

LEMME 5.2. - Soit $\mathcal{V}$ le filtre diagonal ayant pour base l'élément $v^*(S)$ de $\mathcal{D}^*$ associé à une base de copréfiltre S de $\mathcal{E}'$.

1° Pour que $\mathcal{V}$ soit un filtre diagonal symétrique, il faut et il suffit que S soit équivalent à une base de copréfiltre de $\mathcal{E}'$ constituée de E-applications parfaites symétriques.

2° Pour que $\mathcal{V}$ soit un filtre diagonal pré-idempotent, il faut et il suffit que S vérifie l'axiome (S_2) des structures générales pré-idempotentes.

Pour qu'un filtre diagonal soit symétrique, il faut et il suffit qu'il admette une base symétrique. La première affirmation résulte alors du fait qu'une E-application parfaite ρ est symétrique si et seulement si l'élément $V \in \mathcal{D}$

associé est symétrique. La seconde affirmation découle immédiatement des propriétés 1 et 2 de la proposition 5.1.

THÉORÈME 5.2. - Il y a identité des structures suivantes :

a. Les structures quasi-uniformes [resp. faiblement uniformes] déterminées par un filtre de quasi-entourages [resp. d'entourages faibles] $\mathcal{V}$.

b. Les structures générales parfaites, pré-idempotentes [resp. symétriques] déterminées par une base S constituée de E-applications parfaites, vérifiant l'axiome (S_2) [resp. symétriques].

L'identification est réalisée par les conditions suivantes : $v^*(S)$ est une base du filtre $\mathcal{V}$ et $\hat{v}^{-1}(\mathcal{V})$ est une base de la structure générale (S).

Ces résultats sont des conséquences immédiates du théorème 5.1 et des deux parties du lemme 5.2.

THÉORÈME 5.3. - Il y a identité des structures suivantes :

a. Les structures uniformes déterminées par un filtre d'entourage $\mathcal{V}$.

b. Les structures générales parfaites, symétriques, pré-idempotentes (S) déterminées par une base S constituée de E-applications parfaites, symétriques et vérifiant l'axiome (S_2).

L'identification est réalisée par les conditions suivantes : $v^*(S)$ est une base du filtre $\mathcal{V}$ et $\hat{v}^{-1}(\mathcal{V})$ est une base de la structure générale (S).

Ce résultat découle de la conjonction des deux affirmations du théorème 5.2.

Remarque. - Une structure générale parfaite (S) déterminée par une base S est aussi déterminée par les bases $\hat{S}$ et $S' = \hat{S} \cap \mathcal{E}'$, cette dernière étant la plus grande des bases formées de E-applications parfaites. Le filtre de pré-entourages $\mathcal{V}$ associé est l'image de S' par l'application $\hat{v}$. Les éléments $\rho \in S'$ et $V \in \mathcal{V}$ sont liés par la relation : $\rho(X) = \{Y ;\ Y \supset V(X)\}$ qui montre l'identité des notions d'ordre ρ et des notions d'ordre V qui se présentent par exemple dans les structures uniformes.

6. Relations entre les structures générales, les structures simples et les structures ponctuelles.

DÉFINITION 6.1. - Etant donnée une E-structure (S), la E-structure (S') de type (T) engendrée par (S) est, si elle existe, la moins fine des

E-structures de type (T) plus fines que (S) .

Structure simple engendrée par une structure générale. - Etant donnée une structure générale (S) déterminée par une base S constituée par une famille $\{\rho_i\}_{i\in I}$ de E-applications, il est immédiat que la structure simple (S_p) , engendrée par (S) , est déterminée par la E-application p indépendante du choix de la base S et caractérisée par la relation : $p = \bigcup_{i\in I} \rho_i$, c'est-à-dire $p(X) = \bigcup_{i\in I} \rho_i(X)$ pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$.

PROPOSITION 6.1. - L'application σ_p qui, à toute structure générale (S) , associe la structure simple (S_p) engendrée par (S) , est un projecteur isotone de l'ensemble $\mathbb{S}$ des structures générales sur l'ensemble $\mathbb{S}_0$ des structures simples.

Cette affirmation est une conséquence immédiate des définitions.

LEMME 6.1. - Soit (S_p) la structure simple engendrée par une structure générale (S) .

1° Si (S) est pré-idempotente, (S_p) est idempotente.

2° Si (S) est symétrique, (S_p) est symétrique.

3° Si (S) est $\cap$-semi-parfaite [resp. $\cup$-semi-parfaite], (S_p) est $\cap$-semi-parfaite [resp. $\cup$-semi-parfaite].

La relation $Z \in p(X)$ implique l'existence d'un indice $i_1 \in I$ tel que $Z \in \rho_{i_1}(X)$. Si (S) est pré-idempotente, d'après l'axiome (S_2), il existe un indice $i_2 \in I$ tel que $\rho_{i_1} \subset \rho^2_{i_2}$, ce qui entraîne $Z \in \rho^2_{i_2}(X)$. Il existe donc un élément $Y \in \mathcal{P}(E)$ tel que $Z \in \rho_{i_2}(Y)$ et $Y \in \rho_{i_2}(X)$. Ces deux relations impliquent $Z \in p(Y)$ et $Y \in p(X)$ ce qui prouve l'idempotence de la E-application p .

Si δ est la relation de proximité associée à la E-application p et si δ_i sont les relations de proximité associées aux E-applications ρ_i , il est immédiat que la relation $p = \bigcup_{i\in I} \rho_i$ est équivalente à la relation $\delta = \bigcap_{i\in I} \delta_i$. La symétrie des E-applications ρ_i entraîne donc la symétrie de la E-application p .

Les relations $Y_1 \in p(X)$ et $Y_2 \in p(X)$ impliquent l'existence d'indices i_1 et i_2 tels que $Y_1 \in \rho_{i_1}(X)$ et $Y_2 \in \rho_{i_2}(X)$. D'après l'axiome (S_1), il existe un indice i_3 tel que $\rho_{i_1} \subset \rho_{i_3}$ et $\rho_{i_2} \subset \rho_{i_3}$. Il en résulte les relations $Y_1 \in \rho_{i_3}(X)$ et $Y_2 \in \rho_{i_3}(X)$ qui entraînent $Y_1 \cap Y_2 \in \rho_{i_3}(X)$ si (S) est $\cap$-semi-parfaite. Il en résulte donc $Y_1 \cap Y_2 \in p(X)$ qui prouve que (S_p) est $\cap$-semi-parfaite.

Les relations $Y \in p(X_1)$ et $Y \in p(X_2)$ impliquent l'existence d'indices i_1 et i_2 tels que $Y \in \rho_{i_1}(X_1)$ et $Y \in \rho_{i_2}(X_2)$. D'après l'axiome (S_1), il existe un indice i_3 tel que $\rho_{i_1} \subset \rho_{i_3}$ et $\rho_{i_2} \subset \rho_{i_3}$. Il en résulte les relations $Y \in \rho_{i_3}(X_1)$ et $Y \in \rho_{i_3}(X_2)$ qui entraînent $Y \in \rho_{i_3}(X_1 \cup X_2)$ si (S) est $\cup$-semi-parfaite. Il en résulte donc $Y \in p(X_1 \cup X_2)$ qui prouve que (S_p) est $\cup$-semi-parfaite.

LEMME 6.2. - Soit (S_p) la structure simple engendrée par une structure générale (S).

1° Si (S) est une structure pré-uniforme, (S_p) est une structure simple semi-parfaite.

2° Si (S) est une structure quasi-uniforme, (S_p) est une structure simple semi-parfaite idempotente.

3° Si (S) est une structure faiblement uniforme, (S_p) est une structure simple semi-parfaite symétrique.

4° Si (S) est une structure uniforme, (S_p) est une structure simple semi-parfaite symétrique idempotente.

Une structure parfaite étant en particulier semi-parfaite, ces affirmations découlent immédiatement des théorèmes 5.1, 5.2, 5.3 et du lemme 6.1.

THÉORÈME 6.1. - La structure simple (S_p) engendrée par une structure uniforme (S) [resp. une structure faiblement uniforme] est une structure de proximité [resp. une structure de proximité faible].

Ces affirmations résultent des deux dernières propriétés du lemme 6.2, du théorème 4.3, du lemme 4.3 et de la définition 4.1.

Structure ponctuelle engendrée par une structure simple. - Etant donnée une structure simple (S_p) déterminée par une E-application p, il est immédiat que la structure ponctuelle simple (S_t) engendrée par (S_p) est déterminée par la E-application ponctuelle t caractérisée par la condition :

$$t(X) = \bigcap_{x \in X} p(x) \quad \text{pour toute partie non vide } X \text{ de } E \quad .$$

PROPOSITION 6.2. - L'application σ_t qui, à toute structure simple (S_p), associe la structure simple ponctuelle (S_t) engendrée par (S_p), est un projecteur isotone de l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des structures simples sur l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des structures simples ponctuelles.

Cette affirmation est une conséquence immédiate des définitions.

LEMME 6.3. - Soit (S_t) la structure ponctuelle engendrée par une structure simple (S_p).

1° Si (S_p) est idempotente, (S_t) est idempotente.

2° Si (S_p) est $\cap$-semi-parfaite, (S_t) est $\cap$-semi-parfaite.

Tout d'abord, si (S_p) est $\cap$-semi-parfaite, pour tout point x de E, $p(x)$ est un filtre, ce qui entraîne que, pour toute partie non vide X de E, $t(X)$ est un filtre. Il en résulte que (S_t) est $\cap$-semi-parfaite.

Si (S_p) est idempotente, la relation $Z \in t(x)$, équivalente à la relation $Z \in p(x)$, implique l'existence d'un élément $Y \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $Z \in p(Y)$ et $Y \in p(x)$. La première relation implique $Z \in p(y)$ pour tout $y \in Y$. Ainsi la relation $Z \in t(x)$ implique l'existence d'un élément $Y \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $Y \in t(x)$ et tel que, pour tout $y \in Y$, $Z \in t(y)$. Ce résultat montre que la E-application t vérifie l'axiome (V_4) et d'après la condition (c) de la proposition 4.2, la structure ponctuelle (S_t) est idempotente.

LEMME 6.4. - Soit (S_t) la structure simple ponctuelle engendrée par une structure simple (S_p).

1°. Si (S_p) est une structure simple $\cap$-semi-parfaite, (S_t) est une structure pré-topologique.

2° Si (S_p) est une structure simple $\cap$-semi-parfaite idempotente, (S_t) est une structure topologique.

Ces affirmations résultent du lemme 6.3, des théorèmes 4.1 et 4.2.

THÉORÈME 6.2. – La structure simple ponctuelle (S_t) engendrée par une structure de proximité (S_p) [resp. une structure de proximité faible] est une structure topologique [resp. une structure pré-topologique].

Ces affirmations résultent du lemme 6.4, du théorème 4.3 et de la définition 4.1.

Structure ponctuelle engendrée par une structure générale.

PROPOSITION 6.3. – L'application $\sigma_t \circ \sigma_p$ est un projecteur isotone de l'ensemble $\mathbb{S}$ des structures générales sur l'ensemble $\mathbb{S}_1$ des structures simples ponctuelles. Pour toute structure générale (S), la structure simple ponctuelle $(S_t) = \sigma_t \circ \sigma_p$ est engendrée par (S).

Ce résultat est une conséquence immédiate des propositions 6.1 et 6.2.

LEMME 6.5. – Soit (S_t) la structure ponctuelle engendrée par une structure générale (S).

1° Si (S) est $\cap$-semi-parfaite, (S_t) est une structure pré-topologique.

2° Si (S) est $\cap$-semi-parfaite idempotente, (S_t) est une structure topologique.

Ces affirmations résultent des lemmes 6.1 et 6.4.

THÉORÈME 6.3. – La structure simple ponctuelle (S_t) engendrée par une structure quasi-uniforme (S) [resp. une structure pré-uniforme] est une structure topologique [resp. une structure pré-topologique].

Ces affirmations résultent du lemme 6.5 ou des lemmes 6.2 et 6.4.

THÉORÈME 6.4. – La structure simple ponctuelle (S_t) engendrée par une structure uniforme (S) [resp. une structure faiblement uniforme] est une structure topologique [resp. une structure pré-topologique].

Ce résultat découle du théorème 6.3 ou des théorèmes 6.1 et 6.2.

DÉFINITION 6.2. – Une E-structure est séparée si deux points distincts de E admettent des voisinages d'un même ordre disjoints.

PROPOSITION 6.4. - Pour qu'une structure simple symétrique idempotente soit séparée, il faut et il suffit que deux points distincts soient éloignés. En particulier, pour qu'une structure de proximité soit séparée, il faut et il suffit que deux points distincts soient éloignés.

Ce résultat est une conséquence de la propriété 5 du lemme 4.3.

PROPOSITION 6.5. - Une structure générale (S) et la structure simple $(S_p) = \sigma_p[(S)]$ sont simultanément séparées. Une structure simple (S_p) et la structure simple ponctuelle $(S_t) = \sigma_t[(S_p)]$ sont simultanément séparées.

Ce résultat découle immédiatement des définitions.

COROLLAIRE 6.1. - Une structure uniforme (S), la structure de proximité $(S_p) = \sigma_p[(S)]$ associée et la structure topologique $(S_t) = \sigma_t[(S_p)]$ associée sont simultanément séparées.

7. Structures générales et structures simples.

Structures pré-uniformes de type fini.

DÉFINITION 7.1. - Une E-application de type fini est une E-application parfaite à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathcal{H}$.

Une E-structure est de type fini si elle admet une base constituée de E-applications de type fini.

Naturellement, toute E-structure de type fini est en fait une structure pré-uniforme.

PROPOSITION 7.1. - Soit ρ une E-application parfaite et V l'élément de Ω associé. Pour que la E-application ρ soit de type fini, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1° L'ensemble des éléments $\rho(x)$ pour $x \in E$ est constitué par un nombre fini d'éléments distincts.

2° L'élément V de Ω est de la forme :

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [X_k \times Z_k]$$

<u>dans laquelle les parties</u> X_k <u>de</u> E <u>constituent les éléments d'une partition finie de</u> E <u>et les parties distinctes</u> Z_k <u>vérifient</u> : $X_k \subset Z_k$.

Ces affirmations résultent immédiatement de la définition.

Dans l'ensemble $\mathcal{E}'$ des E-applications parfaites, pour toute famille $\{\rho_i\}_{i\in I}$, la E-application parfaite notée $\rho = \bigvee_{i\in I} \rho_i$ est la moins fine des E-applications parfaites plus fines que les E-applications parfaites ρ_i . D'après la proposition 5.1, si les éléments V_i de $\mathcal{Q}$ sont associés aux E-applications parfaites ρ_i , l'élément $V = \bigcap_{i\in I} V_i$ de $\mathcal{Q}$ est associé à la E-application parfaite $\rho = \bigvee_{i\in I} \rho_i$.

PROPOSITION 7.2. - <u>Si</u> $\{\rho_i\}_{i\in I}$ <u>est une famille finie de</u> E-<u>applications de type fini, la</u> E-<u>application</u> $\rho = \bigvee_{i\in I} \rho_i$ <u>est de type fini</u>.

Ce résultat découle immédiatement de la remarque précédente et de la proposition 7.1.

PROPOSITION 7.3. - <u>Si</u> $\{\rho_i\}_{i\in I}$ <u>est une famille finie de</u> E-<u>applications de type fini, si</u> $\rho = \bigvee_{i\in I} \rho_i$ <u>et si</u> p <u>est une</u> E-<u>application semi-parfaite, les relations</u> $\rho_i \subset p$ <u>impliquent la relation</u> : $\rho \subset p$.

La démonstration de cette proposition se ramène au cas où : $I = \{1 , 2\}$.

Soient V_1 , V_2 et V les éléments de $\mathcal{Q}$ associés respectivement aux E-applications de type fini ρ_1 , ρ_2 et $\rho = \rho_1 \vee \rho_2$. Soient A_k les éléments d'une partition finie de E plus fine que les partitions finies de E associées à V_1 et V_2 par la proposition 7.1. La relation $V = V_1 \cap V_2$ implique

$$V(x) = V_1(x) \cap V_2(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E ,$$

ce qui entraîne

$$V(A_k) = V_1(A_k) \cap V_2(A_k) .$$

Les relations $\rho_1 \subset p$ et $\rho_2 \subset p$ entraînent

$$V_1(A_k) \in p(A_k) \quad \text{et} \quad V_2(A_k) \in p(A_k)$$

qui impliquent

$$V(A_k) \in p(A_k)$$

puisque p est semi-parfaite. Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$

$$V(X) = \bigcup_{x \in X} V(x) = \bigcup_k V(X \cap A_k) \quad \text{avec} \quad V(\emptyset) = \emptyset$$

et

$$V(X \cap A_k) \in p(X \cap A_k)$$

car si $X \cap A_k = \emptyset$, la relation est évidente et si $X \cap A_k \neq \emptyset$, elle résulte de l'égalité $V(X \cap A_k) = V(A_k)$. Il en résulte alors les relations $V(X) \in p(X \cap A_k)$ qui impliquent

$$V(X) \in \bigcap_k p(X \cap A_k) = p[\bigcup_k (X \cap A_k)] = p(X)$$

puisque p est semi-parfaite et qu'il n'y a qu'un nombre fini de parties A_k. La relation $V(X) \in p(X)$, valable pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, implique alors $\rho \subset p$.

Structures pré-uniformes et structures simples semi-parfaites.

DÉFINITION 7.2. - Une E-structure (S_1) d'un type (T_1) qui engendre une E-structure (S_2) d'un type (T_2) est dite compatible avec (S_2).

THÉORÈME 7.1. - L'application σ_p est une application surjective de l'ensemble $\mathcal{S}_{pu}$ des structures pré-uniformes sur l'ensemble $\mathcal{S}_{sp}$ des structures simples semi-parfaites.

Pour toute structure simple semi-parfaite (S_p), la classe $\sigma_p^{-1}[(S_p)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_p constituée par l'ensemble des structures pré-uniformes compatibles avec (S_p) admet un plus petit élément (S') qui est l'unique structure pré-uniforme de type fini de cette classe. Le filtre $\mathcal{V}$ des pré-entourages de (S') admet les caractérisations suivantes :

1° Si $(Z_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in A}$ désigne la famille des couples d'éléments Z_α et X_α tels que Z_α soit un p-voisinage de X_α, les intersections finies d'éléments

$$V_\alpha = [X_\alpha \times Z_\alpha] \cup [\complement X_\alpha \times E]$$

constituent une base du filtre $\mathcal{V}$.

2° Le filtre $\mathcal{V}$ admet une base constituée par les éléments de la forme :

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [A_k \times B_k]$$

dans laquelle les B_k sont des p-voisinages arbitraires des éléments A_k d'une partition finie $(A_k)_{k\in[1,n]}$ quelconque de E .

D'après le lemme 6.2, l'application σ_p de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}_0$ détermine une application de $\mathbb{S}_{pu}$ dans $\mathbb{S}_{sp}$ notée également σ_p .

Soit $(Z_\alpha , X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ la famille des couples d'éléments Z_α et X_α tels que Z_α soit un p-voisinage de X_α . Soit ρ_α la E-application de type fini associéeà l'élément

$$V_\alpha = [X_\alpha \times Z_\alpha] \cup [\complement X_\alpha \times E] \quad .$$

Il est immédiat que ρ_α est la moins fine des E-applications ρ vérifiant $Z_\alpha \in \rho(X_\alpha)$. En particulier : $\rho_\alpha \subset p$. D'autre part, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ et tout Y tel que $Y \in p(X)$, il existe un indice $\alpha \in \Lambda$ tel que $Y \in \rho_\alpha(X)$. Il en résulte donc la relation

$$p = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha \quad .$$

Soit K l'ensemble des parties finies J de Λ . Soit $S' = \{\rho_J\}_{J\in K}$ la famille des E-applications ρ_J caractérisées par les relations

$$\rho_J = \bigvee_{\alpha\in J} \rho_\alpha \quad .$$

Naturellement, si $J = \{\alpha\}$, $\rho_J = \rho_\alpha$. Si ρ_{J_1} et ρ_{J_2} sont deux éléments de S' , $J = J_1 \cup J_2 \in K$ et la E-application ρ_J vérifie : $\rho_{J_1} \subset \rho_J$ et $\rho_{J_2} \subset \rho_J$. La famille S' vérifie donc l'axiome (S_1) et détermine une structure générale (S') .

D'après la proposition 7.2, les E-applications ρ_J sont de type fini ce qui montre que (S') est une structure pré-uniforme de type fini.

D'après la proposition 7.3 les relations $\rho_\alpha \subset p$ impliquent les relations $\rho_J \subset p$. Compte tenu de la relation

$$p = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \rho_\alpha$$

il en résulte la relation

$$p = \bigcup_{J\in K} \rho_J$$

qui exprime que la structure pré-uniforme de type fini (S') engendre la structure simple semi-parfaite (S_p).

Soit $S = \{\rho_i\}_{i\in I}$ une base d'une structure pré-uniforme (S) compatible avec (S_p). La relation

$$p = \bigcup_{i\in I} \rho_i$$

implique que pour tout $\alpha \in \Lambda$ il existe un indice $i(\alpha) \in I$ tel que

$$Z_\alpha \in \rho_{i(\alpha)}(X_\alpha) \qquad ,$$

ce qui entraîne

$$\rho_\alpha \subset \rho_{i(\alpha)} \qquad .$$

Pour tout $J \in K$,

$$\rho_J = \bigvee_{\alpha\in J} \rho_\alpha \subset \bigvee_{\alpha\in J} \rho_{i(\alpha)} \qquad .$$

et d'après l'axiome (S_1), il existe un indice i tel que $\rho_{i(\alpha)} \subset \rho_i$ pour tout $\alpha\in J$, ce qui entraîne

$$\bigvee_{\alpha\in J} \rho_{i(\alpha)} \subset \rho_i \qquad .$$

Ainsi tout élément ρ_J de S' est majoré par un élément ρ_i de S. La structure pré-uniforme (S) est donc plus fine que (S') . L'application σ_p de $\mathbb{S}_{pu}$ dans $\mathbb{S}_{sp}$ est donc surjective, et pour toute structure simple semi-parfaite (S_p) , la classe $\overset{-1}{\sigma}_p[(S_p)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_p constituee par l'ensemble des structures pré-uniformes compatibles avec (S_p) admet donc un plus petit élément (S') qui est une structure pré-uniforme de type fini dont le filtre $\mathcal{V}$ des pré-entourages est déterminé par la première caractérisation du théorème.

Soit S" l'ensemble des E-applications parfaites ρ associées à des éléments V de la forme indiquée dans la seconde caractérisation du théorème. Il est immédiat que tout élément $\rho \in S''$ est un élément $\rho_J \in S'$. Il en résulte la relation $S'' \subset S'$. D'autre part, l'ensemble S" est constitué par les E-applications de type fini ρ vérifiant $\rho \subset p$. Il en résulte la relation $S' \subset S''$ qui entraîne $S' = S''$. Cette égalité montre l'équivalence des deux caractérisations et que toute structure pré-uniforme de type fini compatible avec (S_p) doit être moins fine que (S') , donc identique à (S') . La structure pré-uniforme (S') est donc la seule structure pré-uniforme de type fini compatible avec (S_p).

COROLLAIRE 7.1. - L'application σ' qui, à toute structure simple semi-parfaite (S_p) , associe la structure pré-uniforme $(S') = \sigma'[(S_p)]$ compatible avec (S_p) , est une bijection isotone entre l'ensemble $\mathbb{S}_{sp}$ des structures simples semi-parfaites et l'ensemble $\mathbb{S}_{puf}$ des structures pré-uniformes de type fini. En outre, l'application $\sigma_p \circ \sigma'$ est l'identité sur l'ensemble $\mathbb{S}_{sp}$ et l'application $\sigma' \circ \sigma_p$ est un projecteur isotone de $\mathbb{S}_{pu}$ sur $\mathbb{S}_{puf}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 7.1.

Structures faiblement uniformes et structures de proximité faible.

LEMME 7.1. - Pour toute structure de proximité faible (S_p) , la structure pré-uniforme $(S') = \sigma'[(S_p)]$ est une structure faiblement uniforme.

Une structure de proximité faible (S_p) est une structure simple semi-parfaite symétrique. Avec les notations du théorème 7.1, à tout V_α est associé un élément $V_{\alpha'}$ symétrique de V_α et correspondant au couple

$$X_{\alpha'} = CZ_\alpha \quad \text{et} \quad Z_{\alpha'} = CX_\alpha \quad .$$

Les éléments symétriques

$$W_\alpha = V_\alpha \cap V_{\alpha'} = [CX_\alpha \times CX_\alpha] \cup [CX_{\alpha'} \times CX_{\alpha'}]$$

constituent une base du filtre $\mathcal{V}$ d'entourages faibles de la structure faiblement uniforme (S').

THÉORÈME 7.2. - Pour qu'une structure simple semi-parfaite (S_p) soit une structure de proximité faible, il faut et il suffit que la structure pré-uniforme de type fini associée $(S') = \sigma'[(S_p)]$ soit une structure faiblement uniforme.

L'application σ_p est une application surjective de l'ensemble $\mathcal{S}_{fu}$ des structures faiblement uniformes sur l'ensemble $\mathcal{S}_{pf}$ des structures de proximité faible.

Pour toute structure de proximité faible (S_p), la classe $\sigma_p^{-1}[(S_p)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_p constituée par l'ensemble des structures faiblement uniformes compatibles avec (S_p) admet un plus petit élément (S') qui est l'unique structure faiblement uniforme de type fini de cette classe. Le filtre $\mathcal{V}$ des entourages faibles de (S') admet les caractérisations suivantes :

1° Si $(Y_\alpha, X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ désigne la famille des couples d'éléments Y_α et X_α p-éloignés, les intersections finies d'éléments

$$V_\alpha = [C Y_\alpha \times CY_\alpha] \cup [C X_\alpha \times C X_\alpha]$$

constituent une base du filtre $\mathcal{V}$.

2° Le filtre $\mathcal{V}$ admet une base constituée par les éléments de la forme :

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [A_k \times B_k]$$

dans laquelle les B_k sont des p-voisinages arbitraires des éléments A_k d'une partition finie $(A_k)_{k\in[1,n]}$ quelconque de E.

D'après le théorème 6.1, l'application σ_p de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}_0$ détermine une application de $\mathcal{S}_{fu}$ dans $\mathcal{S}_{pf}$ notée également σ_p. Le théorème 7.2 résulte immédiatement du théorème 7.1 et du lemme 7.1.

COROLLAIRE 7.2. - L'application σ' est une bijection isotone entre l'ensemble $\mathcal{S}_{pf}$ des structures de proximité faible et l'ensemble $\mathcal{S}_{fuf}$ des structures faiblement uniformes de type fini. En outre l'application $\sigma_p \circ \sigma'$ est l'identité sur l'ensemble $\mathcal{S}_{pf}$ et l'application $\sigma \circ \pi_p$ est un projecteur isotone de $\mathcal{S}_{fu}$ sur $\mathcal{S}_{fuf}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 7.2.

Structures quasi-uniformes et structures simples semi-parfaites idempotentes.

DÉFINITION 7.3. - Soit ρ une E-application parfaite et V l'élément de $\mathcal{Q}$ associé. Une partie A de E est petite d'ordre ρ ou d'ordre V si $A \times A \subset V$.

Un recouvrement de E d'ordre V est un recouvrement dont les éléments sont petits d'ordre V .

Une structure pré-uniforme (S) est totalement bornée si, pour tout pré-entourage V de cette structure, il existe un recouvrement fini de E petit d'ordre V .

LEMME 7.2. - Toute structure pré-uniforme de type fini est totalement bornée. Pour qu'une structure quasi-uniforme soit totalement bornée, il faut et il suffit qu'elle soit de type fini.

Si une structure pré-uniforme (S) est de type fini, tout pré-entourage V contient un pré-entourage de la forme caractérisée dans la proposition 7.1 et les conditions $X_k \subset Z_k$ entraînent les relations $X_k \times X_k \subset V$ qui montrent que la partition d'éléments X_k constitue un recouvrement fini de E d'ordre V . Ainsi, toute structure pré-uniforme de type fini est donc totalement bornée.

Soit (S) une structure quasi-uniforme totalement bornée. Pour tout quasi-entourage V , il existe un recouvrement fini de E d'ordre V d'éléments A_k . Il est immédiat qu'il en résulte au moins une partition finie de E dont les éléments X_k sont petits d'ordre V . En posant

$$Z_k = V(X_k) \quad \text{et} \quad V' = \bigcup_k [X_k \times Z_k] \qquad ,$$

la relation $(x , z) \in V'$ implique l'existence d'un indice k tel que $x \in X_k$ et $z \in Z_k$, ce qui implique l'existence d'un point y vérifiant $(x , y) \in V$ et $(y , z) \in V$. Il en résulte la relation

$$V \dot{\subset} V' \subset V^2 \qquad .$$

Puisque les éléments V et V^2 constituent des bases de la structure quasi-uniforme (S) , les éléments V' constituent une base de type fini de (S) qui est donc de type fini. Ainsi toute structure quasi-uniforme totalement bornée est de type fini.

Ce résultat et la première partie du lemme entraînent la seconde partie.

THÉORÈME 7.3. - Pour qu'une structure simple semi-parfaite (S_p) soit idempotente, il faut et il suffit que la structure pré-uniforme de type fini associée $(S') = \sigma'[(S_p)]$ soit une structure quasi-uniforme qui est alors totalement bornée.

L'application σ_p est une application surjective de l'ensemble $\mathbb{S}_{qu}$ des structures quasi-uniformes sur l'ensemble $\mathbb{S}_{spi}$ des structures simples semi-parfaites idempotentes.

Pour toute structure simple semi-parfaite idempotente (S_p), la classe $\sigma_p^{-1}[(S_p)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_p constituée par l'ensemble des structures quasi-uniformes compatibles avec (S_p) admet un plus petit élément (S') qui est l'unique structure quasi-uniforme totalement bornée de cette classe. Le filtre $\mathcal{V}$ des quasi-entourages de (S') admet les caractérisations du théorème 7.1.

D'après le lemme 6.2 l'application σ_p de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{S}_0$ détermine une application de $\mathbb{S}_{qu}$ dans $\mathbb{S}_{spi}$ notée également σ_p. Le théorème 7.3 résulte immédiatement du théorème 7.1 et du lemme 7.2.

COROLLAIRE 7.3. - L'application σ' est une bijection isotone entre l'ensemble $\mathbb{S}_{spi}$ des structures simples semi-parfaites idempotentes et l'ensemble $\mathbb{S}_{quf}$ des structures quasi-uniformes de type fini ou totalement bornées. En outre l'application $\sigma_p \circ \sigma'$ est l'identité sur l'ensemble $\mathbb{S}_{spi}$ et l'application $\sigma' \circ \sigma_p$ est un projecteur isotone de $\mathbb{S}_{qu}$ sur $\mathbb{S}_{quf}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 7.3.

Structures uniformes et structures de proximité.

DÉFINITION 7.4. - Dans une E-structure simple déterminée par une E-application ρ, un ρ-recouvrement de E est constitué par une famille $\{B_k\}_{k\in K}$ de parties de E telle qu'il existe un recouvrement de E par une famille $\{A_k\}_{k\in K}$ de parties de E vérifiant la condition : pour tout $k \in K$, B_k est un ρ-voisinage de A_k. Le pré-entourage du ρ-recouvrement est le pré-entourage

$$V = \bigcup_{k\in K} [B_k \times B_k] \quad .$$

Il est immédiat qu'une famille finie $\{B_k\}_{k\in K}$ de parties de E constitue un ρ-recouvrement fini de E, si et seulement si les éléments B_k sont les p-voisinages des éléments A_k d'une partition finie de E.

LEMME 7.3. - Le filtre $\mathcal{V}$ des entourages d'une structure uniforme totalement bornée (S) compatible avec une structure de proximité (S_p) admet une base constituée par les pré-entourages des p-recouvrements finis de E.

Si la structure uniforme totalement bornée (S) est compatible avec une structure de proximité (S_p), d'après le théorème 7.1, le filtre $\mathcal{V}$ admet une base constituée par les éléments de la forme

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [A_k \times B_k]$$

dans laquelle les B_k sont des p-voisinages arbitraires des éléments A_k d'une partition finie $(A_k)_{k\in[1,n]}$ quelconque de E. Pour tout entourage symétrique W, il existe un entourage V vérifiant $V \subset W$. La relation $(x, y) \in B_k \times B_k$ implique l'existence de deux points x' et y' de A_k vérifiant

$$(x, y') \in W \quad \text{et} \quad (x', y) \in W$$

puisque

$$B_k = V(A_k) \subset W(A_k) \quad .$$

Puisque A_k est petit d'ordre V, il en résulte la relation

$$(x', y') \in W$$

qui entraîne

$$(x, y) \in W^3 \quad .$$

Il en résulte la relation

$$B_k \times B_k \subset W^3 \quad .$$

En posant

$$V' = \bigcup_{k=1}^{k=n} [B_k \times B_k]$$

il en résulte la relation :

$$V \subset V' \subset W^3 \quad .$$

Puisque les éléments V et W^3 constituent des bases du filtre $\mathcal{V}$, les éléments V' constitués par les pré-entourages des p-recouvrements finis constituent une base du filtre $\mathcal{V}$.

THÉORÈME 7.4. - Pour qu'une structure simple semi-parfaite (S_p) soit une structure de proximité, il faut et il suffit que la structure pré-uniforme de type fini associée $(S') = \sigma'[(S_p)]$ soit une structure uniforme qui est alors totalement bornée.

L'application σ_p est une application surjective de l'ensemble $\mathcal{S}_u$ des structures uniformes sur l'ensemble $\mathcal{S}_p$ des structures de proximité.

Pour toute structure de proximité (S_p), la classe $\sigma_p^{-1}[(S_p)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_p constituée par l'ensemble des structures uniformes compatibles (S_p) admet un plus petit élément (S') qui est l'unique structure uniforme totalement bornée de cette classe.

Le filtre $\mathcal{V}$ des entourages de (S') admet les caractérisations suivantes :

1° Si $(Y_\alpha , X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ désigne la famille des couples d'éléments Y_α et X_α p-éloignés, les intersections finies d'éléments

$$V_\alpha = [\complement Y_\alpha \times \complement Y_\alpha] \cup [\complement X_\alpha \times \complement X_\alpha]$$

constituent une base du filtre $\mathcal{V}$.

2° Le filtre $\mathcal{V}$ admet une base constituée par les éléments de la forme

$$V = \bigcup_{k=1}^{k=n} [A_k \times B_k]$$

dans laquelle les B_k sont des p-voisinages arbitraires des éléments A_k d'une partition finie $(A_k)_{k\in[1,n]}$ quelconque de E.

3° Le filtre $\mathcal{V}$ admet une base constituée par les pré-entourages des p-recouvrements finis de E.

D'après le théorème 6.1, l'application σ_p de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}_0$ détermine une application de $\mathcal{S}_u$ dans $\mathcal{S}_p$ notée également σ_p. Le théorème 7.4 résulte des théorèmes 7.2, 7.3 et du lemme 7.3.

COROLLAIRE 7.4. - L'application σ' est une bijection isotone entre l'ensemble $\mathcal{S}_p$ des structures de proximité et l'ensemble $\mathcal{S}_{uf}$ des structures uniformes de type fini ou totalement bornées [1]. En outre l'application $\sigma_p \circ \sigma'$ est l'identité sur $\mathcal{S}_p$ et l'application $\sigma' \circ \sigma_p$ est un projecteur isotone de $\mathcal{S}_u$ sur $\mathcal{S}_{uf}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 7.4.

COROLLAIRE 7.5. - Pour qu'une topologie soit uniformisable, il faut et il suffit qu'elle soit "proximisable" c'est-à-dire engendrée par au moins une structure de proximité : En outre toute topologie uniformisable est engendrée par au moins une structure uniforme totalement bornée.

Ce résultat est une conséquence de la proposition 6.3 et du théorème 7.4.

8. Structures simples et structures ponctuelles.

Structures de proximité faible et structures pré-topologiques. - Etant donnée une structure pré-topologique ou topologique (S_t) déterminée par une E-application t, par convention la t-adhérence $\alpha(X)$ est notée $\overline{X}$.

PROPOSITION 8.1. - Pour toute structure pré-topologique ou topologique (S_t), les E-relations δ_1 et δ_2 caractérisées par les conditions suivantes :

1° $Y \,\overline{\delta}_1\, X$ est équivalent à $\overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$,

2° $Y \,\overline{\delta}_2\, X$ est équivalent à $\overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$,

déterminent respectivement des structures de proximité faible (S_{ρ_1}) et (S_{ρ_2}) dites universelle et canonique.

D'après la proposition 3.5, il est immédiat que les relations δ_1 et δ_2 vérifient les quatre premières conditions du lemme 4.3 et déterminent donc des structures de proximité faible.

DÉFINITION 8.1. – Une structure pré-topologique ou topologique (S_t) est dite faiblement proximisable si elle est engendrée par au moins une structure de proximité faible.

THÉORÈME 8.1. – Pour toute structure pré-topologique ou topologique (S_t) la structure de proximité faible universelle (S_{ρ_1}) associée est la plus fine des structures de proximité faible moins fines que (S_t).

Les structures de proximité faible (S_{ρ_2}) et (S_{ρ_1}) vérifient

$$(S_{\rho_2}) \subset (S_{\rho_1}) \subset (S_t) \quad .$$

Pour qu'une structure pré-topologique ou topologique (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. La relation binaire sur E caractérisée par $y \in \{\overline{x}\}$ est symétrique.

2. La structure de proximité faible universelle (S_{ρ_1}) associée à (S_t) est compatible avec (S_t).

En outre, si (S_t) est une structure topologique, ces conditions sont équivalentes aux conditions équivalentes suivantes :

1'. Les adhérences distinctes des points de E constituent une partition de E.

3. La structure de proximité faible canonique (S_{ρ_2}) associée à (S_t) est compatible avec (S_t).

La relation de proximité d associée à (S_t) est caractérisée par la condition $Y \overline{d} X$ est équivalent à $\overline{Y} \cap X = \emptyset$. Soit δ la relation de proximité associée à une structure de proximité faible (S_ρ) déterminée par une E-application ρ vérifiant la condition $\rho \subset t$ équivalente à la condition $\overline{\delta} \subset \overline{d}$. La condition $Y \overline{\delta} X$ équivalente à $X \overline{\delta} Y$ implique donc $Y \overline{d} X$ et $X \overline{d} Y$ qui s'écrit aussi $\overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset$ c'est-à-dire $Y \overline{\delta}_1 X$. Il en résulte la relation $\overline{\delta} \subset \overline{\delta}_1$ équivalente à la relation $\rho \subset \rho_1$ qui montre que (S_{ρ_1}) est la plus fine des structures de proximité faible moins fines que (S_t). Il en résulte immédiatement la relation :

$$(S_{\rho_2}) \subset (S_{\rho_1}) \subset (S_t) \quad .$$

Si (S_t) est faiblement proximisable, il existe une structure de proximité faible (S_ρ) compatible avec (S_t). La relation $\rho \subset \rho_1 \subset t$ et les relations $\rho(x) = t(x)$, pour tout $x \in E$, impliquent les relations $\rho_1(x) = t(x)$ pour tout $x \in E$ qui montrent que la structure de proximité faible universelle (S_{ρ_1}) est compatible avec (S_t). Réciproquement, si (S_{ρ_1}) est compatible avec (S_t), cette structure est faiblement proximisable. Ainsi pour que (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que (S_{ρ_1}) soit compatible avec (S_t).

Les E-applications t et ρ_1 sont caractérisées par les conditions suivantes:

$$t(X) = \{Z \; ; \; Z = \complement Y \, , \; \overline{Y} \cap X = \emptyset\} \; ; \qquad \rho_1(X) = \{Z \; ; \; Z = \complement Y \, , \; \overline{Y} \cap X = Y \cap \overline{X} = \emptyset\} .$$

Pour que (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que (S_{ρ_1}) soit compatible avec (S_t) c'est-à-dire que, pour tout $x \in E$, la relation $t(x) = \rho_1(x)$ soit satisfaite. Cette condition est équivalente à la condition suivante

$$\overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset \text{ implique } Y \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$$

c'est-à-dire aussi à la condition

$$Y \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset \text{ implique } x \in \overline{Y} \quad .$$

Cette condition entraîne la condition

$$y \in \overline{\{x\}} \text{ implique } x \in \overline{\{y\}} \quad ;$$

et réciproquement, si cette dernière condition est satisfaite, la relation $Y \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset$, qui entraîne l'existence d'un point $y \in Y$ tel que $y \in \overline{\{x\}}$, implique $x \in \overline{\{y\}} \subset \overline{Y}$, donc aussi $x \in \overline{Y}$. Ainsi pour que (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que la relation binaire sur E caractérisée par $y \in \overline{\{x\}}$ soit symétrique.

Pour toute structure topologique (S_t) la relation $y \in \overline{\{x\}}$ est reflexive et transitive. Si (S_t) est faiblement proximisable, la condition 1 du théorème montre que cette relation est une relation d'équivalence pour laquelle l'ensemble $\overline{\{x\}}$ est la classe d'équivalence du point x et que les adhérences distinctes des points de E constituent une partition de E. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, la relation $y \in \overline{\{x\}}$, qui entraîne $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, implique $\overline{\{y\}} = \overline{\{x\}}$, donc aussi $x \in \overline{\{y\}}$. La condition 1 est donc satisfaite et la structure topologique (S_t) est faiblement proximisable. Ainsi pour qu'une structure topologique (S_t) soit faiblement proximisable il faut et il suffit que la relation $y \in \overline{\{x\}}$ soit une relation d'équivalence ou que les adhérences distinctes des points de E constituent une partition de E.

Si (S_t) est une structure topologique et si (S_{ρ_2}) est compatible avec (S_t), cette structure est faiblement proximisable. Réciproquement, soient (S_t) une structure topologique faiblement proximisable et (S_{ρ_2}) la structure de proximité faible canonique associée déterminée par la E-application ρ_2 caractérisée par la condition :

$$\rho_2(X) = \{Z \ ; \ Z = \complement Y, \ \overline{Y} \cap \overline{\{x\}} = \emptyset\} \qquad .$$

La relation $\overline{Y} \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ implique $\overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset$. La relation $\overline{Y} \cap \overline{\{x\}} \neq \emptyset$ entraîne l'existence d'un point y vérifiant $y \in \overline{Y}$ et $y \in \overline{\{x\}}$. La dernière relation entraîne $x \in \overline{\{y\}}$ et, puisque $\{y\} \subset \overline{Y}$, il en résulte $x \in \overline{Y}$ qui implique $\overline{Y} \cap \{x\} \neq \emptyset$. L'équivalence des conditions $\overline{Y} \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ et $\overline{Y} \cap \{x\} = \emptyset$ entraîne les relations $t(x) = \rho_2(x)$ pour tout $x \in E$ qui montrent que (S_{ρ_2}) est compatible avec (S_t). Ainsi pour qu'une structure topologique (S_t) soit faiblement proximisable, il faut et il suffit que (S_{ρ_2}) soit compatible avec (S_t).

<u>Remarque</u>. – Si d est la relation de proximité associée à une structure prétopologique (S_t), la relation $y \in \overline{\{x\}}$ est équivalente à la relation $x \, d \, y$. La condition 1 du théorème exprime que la restriction à E de la relation de proximité est symétrique et la condition 1' du théorème exprime que la restriction à E de la relation de proximité est une relation d'équivalence sur E.

COROLLAIRE 8.1. - Si σ_{ρ_1} est l'application qui, à toute structure pré-topologique (S_t), associe la structure de proximité faible universelle (S_{ρ_1}), l'application $\sigma_t \circ \sigma_{\rho_1}$ est un projecteur isotone de l'ensemble $\mathbb{S}_{pt}$ des structures pré-topologiques sur l'ensemble $\mathbb{S}_{ptfp}$ des structures pré-topologiques faiblement proximisables.

Pour toute structure pré-topologique (S_t), la structure pré-topologique $\sigma_t \circ \sigma_{\rho_1}[(S_t)]$ est la plus fine des structures pré-topologiques faiblement proximisables moins fines que (S_t).

Structures de proximité et structures topologiques.

DÉFINITION 8.2. - Pour tout entier positif n, les ensembles J_n, J'_n, K_n, A sont caractérisés par

$$J_n = [0 , 2^n + 1] , \quad J'_n = [1 , 2^n] , \quad K_n = [0 , 2^n] ,$$

$$A = \{\alpha = (n , j) , \quad j \in J_n\} .$$

Etant données deux parties de E disjointes Y et X, une famille dyadique (ω), d'extrémités Y et X, est déterminée par des éléments $\omega_j^n = \omega_\alpha$ $(\alpha \in A)$ vérifiant les conditions suivantes :

1° Pour tout entier positif n, $\omega_0^n = Y$ et $\omega_{2^n+1}^n = X$.

2° Pour tout entier positif n, les éléments ω_j^n $(j \in J_n)$ sont disjoints et constituent un recouvrement de l'ensemble E.

3° Pour tout entier positif n et tout $j \in J'_n$:

$$\omega_j^n = \omega_{2j-1}^{n+1} \cup \omega_{2j}^{n+1} .$$

Pour tout entier positif n et tout $q \in K_n$, les éléments Ω_q^n et Ω'^n_q sont définis par les conditions :

$$\Omega_q^n = \bigcup_{j=0}^{j=q} \omega_j^n \quad \text{et} \quad \Omega'^n_q = \bigcup_{j=q+1}^{j=2^n+1} \omega_j^n .$$

PROPOSITION 8.2. - Soit δ la relation de proximité associée à une structure de proximité (S_p). Pour tout couple de parties de E, Y et X p-éloignées, il existe au moins une famille dyadique (ω) vérifiant les conditions équivalentes suivantes :

1° Pour tout entier positif n et tout couple d'éléments q et q' de K_n vérifiant $q < q'$

$$\Omega_q^n \ \bar{\delta} \ \Omega'^n_{q'} \qquad .$$

2° Pour tout entier positif n et tout couple d'éléments i et j de J_n non consécutifs :

$$\omega_i^n \ \bar{\delta} \ \omega_j^n \qquad .$$

D'après le lemme 4.3, deux parties Y et X p-éloignées admettent des p-voisinages U_Y et V_X disjoints. Il est toujours possible de supposer en outre que ces p-voisinages constituent un recouvrement de E, en remplaçant éventuellement l'un d'eux par le complémentaire de l'autre. En outre, ces p-voisinages vérifient les relations

$$Y \ \bar{\delta} \ V_X \quad \text{et} \quad U_Y \ \bar{\delta} \ X \qquad .$$

La famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X est définie par récurrence. Tout d'abord l'équivalence des deux conditions de la proposition est immédiate d'après le lemme 4.3. Pour $n = 1$, les éléments ω_j^n avec $j \in J_n$ sont définis par les conditions

$$\omega_0^1 = Y \ , \quad \omega_1^1 = U_Y - Y \ , \quad \omega_2^1 = V_X - X \ , \quad \omega_{2+1}^1 = X$$

et vérifient la seconde condition de la proposition. Les éléments Ω_q^n et Ω'^n_q avec $q \in K_n$ sont définis par les conditions :

$$\Omega_0^1 = Y \ , \quad \Omega_1^1 = U_Y \ , \quad \Omega_2^1 = E - X \ , \quad \Omega'^1_0 = E - Y \ , \quad \Omega'^1_1 = V_X \ , \quad \Omega'^1_2 = X$$

et vérifient la première condition de la proposition. Si la famille dyadique (ω)

est déterminée jusqu'au rang n , les éléments ω_j^m , avec $j \in J_m$ de rang $m = n + 1$, sont définis par les conditions suivantes. Tout d'abord $\omega_0^m = Y$ et $\omega_{2^m+1}^m = X$. Pour $q \in J'_n$, les éléments disjoints Ω_{q-1}^n , ω_q^n , Ω'^n_q constituent un recouvrement de l'ensemble E et, d'après l'hypothèse de récurrence, les éléments Ω_{q-1}^n et Ω'^n_q sont p-éloignés. En leur appliquant une construction analogue à celle qui a été utilisée pour les éléments p-éloignés $\omega_0^1 = Y$ et $\omega_{2+1}^1 = X$, il est possible de trouver des éléments ω_{2q-1}^{n+1} et ω_{2q}^{n+1} jouant des rôles analogues à ceux des éléments ω_1^1 et ω_2^1 . Il en résulte les relations

$$\omega_q^n = \omega_{2q-1}^{n+1} \cup \omega_{2q}^{n+1}$$

qui expriment la troisième condition de la définition 8.2. Les éléments ω_j^m $(j \in J_m)$ ainsi définis satisfont aux conditions de la définition 8.2. Les relations

$$\Omega_{q-1}^n \ \bar{\delta}\ \omega_{2q}^{n+1} \quad \text{et} \quad \omega_{2q-1}^{n+1} \ \bar{\delta}\ \Omega'^n_q$$

impliquent les relations

$$\Omega_{2(q-1)}^m \ \bar{\delta}\ \Omega'^m_{2q-1} \quad \text{et} \quad \Omega_{2q-1}^m \ \bar{\delta}\ \Omega'^m_{2q}$$

qui entraînent les relations

$$\Omega_q^m \ \bar{\delta}\ \Omega'^m_{q'} \quad \text{pour} \quad q \in K_m \quad \text{et} \quad q' \in K_m \quad \text{avec} \quad q < q' \quad .$$

La première condition de la proposition est donc satisfaite jusqu'au rang $m = n + 1$. Il existe donc une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X satisfaisant aux conditions équivalentes de la proposition.

DÉFINITION 8.3. - Une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X est continue pour une structure topologique (S_t) si pour tout entier positif n et tout élément $q \in J'_n$, les éléments Ω_{q-1}^n et Ω'^n_q admettent des voisinages disjoints.

PROPOSITION 8.3. - Pour qu'une famille dyadique (ω) d'extrémité Y et X soit continue, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1° Pour tout entier positif n et tout élément $q \in J'_n$, l'élément Ω^n_q est un voisinage de Ω^n_{q-1} et Ω'^n_{q-1} est un voisinage de Ω'^n_q. (Cette condition est équivalente à la condition : $\overline{\Omega^n_{q-1}} \subset \Omega^n_q$ et $\overline{\Omega'^n_q} \subset \Omega'^n_{q-1}$.)

2° En posant $\omega^n_{-1} = \omega^n_{2^n+2} = \emptyset$, pour tout entier positif et tout élément $q \in J_n$, l'élément $\omega^n_{q-1} \cup \omega^n_q \cup \omega^n_{q+1}$ est un voisinage de l'élément ω^n_q.

Ces résultats sont des conséquences immédiates de la définition d'une famille dyadique continue.

DÉFINITION 8.4. - Deux parties disjointes Y et X sont normalement séparées dans une structure topologique (S_t) s'il existe au moins une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X qui est continue pour la structure topologique (S_t).

PROPOSITION 8.4. - Pour toute structure topologique (S_t), la E-relation δ' caractérisée par la condition

$$Y \,\bar{\delta}'\, X \quad \text{signifie que Y et X sont normalement séparés dans } (S_t) \quad ,$$

détermine une structure de proximité $(S_{p'})$ dite universelle.

L'application σ'_p qui, à toute structure topologique (S_t), associe la structure de proximité universelle $(S_{p'})$, est une application isotone de l'ensemble $\mathcal{S}_t$ des structures topologiques dans l'ensemble $\mathcal{S}_p$ des structures de proximité.

Il est immédiat que la relation δ' vérifie les conditions 1, 3 et 4 du lemme 4.3. La relation $(Y_1 \cup Y_2) \,\bar{\delta}'\, X$ implique les relations $Y_1 \,\bar{\delta}'\, X$ et $Y_2 \,\bar{\delta}'\, X$. Réciproquement les relations $Y_1 \,\bar{\delta}'\, X$ et $Y_2 \,\bar{\delta}'\, X$ impliquent l'existence de deux familles dyadiques (ω') et (ω'') continues pour (S_t). Il est immédiat que les éléments Ω^n_q obtenus par réunion des éléments ayant les mêmes indices dans les familles (ω') et (ω'') caractérisent une famille dyadique (ω) d'extrémités $Y_1 \cup Y_2$ et X qui est aussi continue pour (S_t). Ainsi la relation δ' vérifie la condition 2 du lemme 4.3. Si Y et X sont deux parties normalement séparées par une famille dyadique (ω) en posant $U_Y = \Omega^1_1$ et $V_X = \Omega'^1_1$, il est immédiat que Y et V_X sont normalement séparés ainsi que U_Y et X.

Les éléments U_Y et V_X disjoints sont donc respectivement des p'-voisinages de Y et X, ce qui montre que la relation δ' vérifie la condition 5 du lemme 4.3. La relation de proximité δ' détermine donc une structure de proximité $(S_{p'}) = \sigma'_p[(S_t)]$. La dernière partie de la proposition résulte du fait que deux parties Y et X normalement séparées pour une structure topologique (S_t) sont aussi normalement séparées pour toute structure topologique plus fine que (S_t).

THÉORÈME 8.2. - Pour que deux parties Y et X de E soient normalement séparées dans une structure topologique (S_t), il faut et il suffit qu'il existe une application f de E dans l'intervalle $[0, 1]$ continue pour la structure topologique (S_t) et telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in Y$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Soient Y et X deux parties de E normalement séparées par une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X continue pour la structure topologique (S_t). Pour tout entier positif n, les éléments ω_q^n $(q \in J_n)$ sont disjoints et constituent un recouvrement de l'ensemble E. Pour tout point $x \in E$ et tout entier positif n, il existe donc un entier unique $q(n, x)$ tel que $x \in \omega^n_{q(n,x)}$. En posant

$$A_n(x) = \left[\frac{q(n, x) - 1}{2^n}, \frac{q(n, x)}{2^n}\right] ,$$

la condition 3 de la définition 8.2 implique la relation

$$A_{n+1}(x) \subset A_n(x) .$$

Pour tout $x \in E$, la suite décroissante des fermés $A_n(x)$, de diamètre $1/2^n$, constitue une base de filtre qui converge vers un nombre réel $y = f(x)$, caractérisé par la condition : $y = f(x) \in A_n(x)$ pour tout entier positif n. Puisque

$$A_n(x) \subset \left[\frac{-1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^n}\right] ,$$

il en résulte

$$y = f(x) \in [0, 1] .$$

Ce procédé détermine donc une application f de E dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier positif n, l'ensemble

$$V_n(x) = \left[\omega^n_{q(n,x)-1} \cup \omega^n_{q(n,x)} \cup \omega^n_{q(n,x)+1}\right]$$

est, d'après la proposition 8.3, un voisinage de $\omega^n_{q(n,x)}$, donc aussi du point x. La définition de l'application f montre que l'ensemble $f[V_n(x)]$ a un diamètre inférieur ou égal à $3/2^n$. Pour tout point $x \in E$, il existe donc une suite de voisinages $V_n(x)$ tels que l'ensemble $f[V_n(x)]$ ait un diamètre inférieur ou égal à $3/2^n$. L'application f de E dans $[0, 1]$ est donc continue pour la structure topologique (S_t). Si $x \in Y$,

$$A_n(x) = \left[\frac{-1}{2^n}, 0\right] \quad \text{entraîne} \quad f(x) = 0$$

et si $x \in X$,

$$A_n(x) = \left[1, 1 + \frac{1}{2^n}\right] \quad \text{entraîne} \quad f(x) = 1 \qquad .$$

Il existe donc une application f de E dans $[0, 1]$ continue pour la structure topologique (S_t) et telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in Y$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Réciproquement s'il existe une telle application f, soient ω^n_j $(j \in J_n)$ les éléments définis par les conditions suivantes : pour tout entier positif n,

$$\omega^n_0 = Y \;;\quad \omega^n_1 = f^{-1}([0, \frac{1}{2^n}[) - Y \;;\quad \omega^n_{2^n} = f^{-1}([\frac{2^n - 1}{2^n}, 1]) - X \;;\quad \omega^n_{2^n+1} = X$$

et si q vérifie $2 \leq q \leq 2^n - 1$,

$$\omega^n_q = f^{-1}([\frac{q-1}{2^n}, \frac{q}{2^n}[) \qquad .$$

Il est immédiat que les éléments ω^n_j $(j \in J_n)$ ainsi déterminés constituent les éléments d'une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X et continue pour (S_t).

Remarque. - Ce théorème montre que la condition de séparation normale introduite coïncide avec la notion ordinaire définie à l'aide des fonctions numériques continues et qui se présente par exemple dans les espaces normaux.

LEMME 8.1. - Si une structure de proximité (S_p) engendre une structure topologique (S_t), pour que deux éléments Y et X soient p-éloignés, il faut et il suffit que leurs adhérences $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ pour (S_t) soient p-éloignées et alors ils sont normalement séparés dans (S_t).

Soit (S_p) une structure de proximité qui engendre une structure topologique (S_t). Si δ est la relation de proximité associée à (S_p), la condition $Y \bar{\delta} X$ entraîne l'existence d'une famille dyadique (ω) d'extrémités Y et X vérifiant les conditions de la proposition 8.2 et en particulier les conditions

$$\Omega^n_{q-1} \, \bar{\delta} \, \Omega'^n_q \quad \text{pour tout} \quad q \in J'_n \quad .$$

D'après le lemme 4.3, les éléments Ω^n_{q-1} et Ω'^n_q p-éloignés possèdent des p-voisinages disjoints qui sont aussi des voisinages dans la structure topologique (S_t) plus fine que (S_p). Il en résulte que la famille dyadique (ω) est continue dans (S_t) c'est-à-dire que les éléments Y et X sont normalement séparés dans (S_t). D'après la proposition 8.3, les adhérences $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ dans (S_t) vérifient les relations

$$\overline{Y} = \overline{\Omega^n_0} \subset \Omega^n_1 \quad \text{et} \quad \overline{X} = \overline{\Omega'^n_{2^n}} \subset \Omega'^n_{2^n-1}$$

qui montrent que la relation $Y \bar{\delta} X$ entraîne $\overline{Y} \, \bar{\delta} \, \overline{X}$. La relation $\overline{Y} \, \bar{\delta} \, \overline{X}$ implique naturellement $Y \bar{\delta} X$. Ainsi les relations $Y \bar{\delta} X$ et $\overline{Y} \, \bar{\delta} \, \overline{X}$ sont équivalentes et impliquent que les éléments Y et X sont normalement séparés dans (S_t), ainsi que $\overline{Y}$ et $\overline{X}$ d'ailleurs.

Remarque. - Ce lemme montre que la relation de proximité δ associée à une structure de proximité (S_p) est caractérisée par sa restriction aux ensembles fermés dans la structure topologique (S_t) engendrée par (S_p).

THÉORÈME 8.3. - Pour toute structure topologique (S_t) la structure de proximité universelle $(S_{p'}) = \sigma'_p[(S_t)]$ associée est la plus fine des structures de proximité moins fines que (S_t).

Pour qu'une structure topologique (S_t) soit proximisable ou uniformisable, il faut et il suffit que soit vérifiée l'une des conditions équivalentes suivantes :

1° Tout point x est normalement séparé des complémentaires de ses voisinages.

2° La structure de proximité universelle $(S_{p'})$ associée à (S_t) est compatible avec (S_t).

Tout d'abord d'après le corollaire 7.5, il y a identité des structures topologiques proximisables et uniformisables.

Soient (S_t) une structure topologique et $(S_{p'}) = \sigma'_p[(S_t)]$ la structure de proximité universelle associée. Soit (S_p) une structure de proximité moins fine que (S_t). Deux parties Y et X p-éloignées sont normalement séparées dans la structure topologique engendrée par (S_p), d'après le lemme 8.1. Elles sont donc normalement séparées dans la structure topologique (S_t) qui est plus fine, et par suite elles sont p'-éloignées. Il en résulte que (S_p) est moins fine que $(S_{p'})$, c'est-à-dire que $(S_{p'})$ est la plus fine des structures de proximité moins fines que (S_t).

Si la structure topologique (S_t) est proximisable, elle est engendrée par une structure de proximité (S_p) moins fine que $(S_{p'})$, ce qui montre qu'elle est aussi engendrée par $(S_{p'})$. Ainsi pour que (S_t) soit proximisable, il faut et il suffit que $(S_{p'})$ soit compatible avec (S_t).

Soit $(S_{t'}) = \sigma_t[(S_{p'})]$ la structure topologique engendrée par $(S_{p'})$. La structure de proximité universelle associée à $(S_{t'})$ est moins fine que $(S_{p'})$ d'après la proposition 8.4, et plus fine que $(S_{p'})$ d'après la première partie du théorème : elle est donc identique à $(S_{p'})$. Dans la structure topologique $(S_{t'})$ les voisinages de tout point x sont les complémentaires des parties p'-éloignées de x, c'est-à-dire des parties normalement séparées de x dans (S_t). La seconde condition du théorème, qui exprime l'égalité de (S_t) et de $(S_{t'})$, est équivalente à la relation $(S_t) \subset (S_{t'})$ qui se traduit donc par la première condition du théorème.

COROLLAIRE 8.2. - L'application $\sigma'_t = \sigma_t \circ \sigma'_p$ est un projecteur isotone de l'ensemble $\mathcal{S}_t$ des structures topologiques sur l'ensemble $\mathcal{S}_{tu}$ des structures topologiques proximisables ou uniformisables. Pour toute structure topologique (S_t) la structure topologique $\sigma'_t[(S_t)]$ est la plus fine des structures topologiques uniformisables moins fines que (S_t).

L'application σ_t est une application surjective de l'ensemble $\mathcal{S}_p$ des structures de proximité sur l'ensemble $\mathcal{S}_{tu}$ des structures topologiques uniformisables.

Pour toute structure topologique uniformisable (S_t) , la classe $\sigma_t^{-1}[(S_t)]$ de l'équivalence canonique associée à σ_t constituée par les structures de proximité compatibles avec (S_t) admet un plus grand élément $(S_{p'}) = \sigma_p'[(S_t)]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALPHEN (E. M.) and FENSTAD (J. E.). - On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures, Math. Scand., t. 7, 1959, p. 353-360.