Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Georges Zeller-Meier

Frontière minimale pour des algèbres de fonctions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 3, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A3_0>

FRONTIÈRE MINIMALE POUR DES ALGÈBRES DE FONCTIONS

par Georges ZELLER-MEIER

[d'après un article de Errett BISHOP (1)]

Soient C un compact et f une fonction continue à valeurs complexes sur C . On posera

$$S(f) = \{x \mid x \in C \,,\ |f(x)| = \|f\|\} \qquad S(f) \text{ est fermé} \quad .$$

Si A est un ensemble de fonctions continues à valeurs complexes sur C , $M \subset C$ sera dit <u>frontière pour</u> A , si

$$M \cap S(f) \neq \emptyset \,, \quad \forall \ f \in A \quad .$$

<u>Une frontière pour</u> A <u>sera dite minimale</u> si elle est contenue dans toute frontière pour A . Il résulte de la définition que si elle existe, elle est unique.

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> A <u>est une algèbre séparante de Banach de fonctions continues à valeurs complexes sur</u> C , <u>compact métrisable, il existe une frontière minimale pour</u> A :

$$M_0 = \{x \mid x \in C \,,\ \exists \ f \in A \,,\ S(f) = \{x\}\} \quad .$$

a. Toute frontière pour A contient nécessairement M_0 . Il suffit donc de montrer que M_0 est une frontière.

b. Montrons donc que $M_0 \cap S(f) \neq \emptyset$, $\forall$ $f \in A$.

Considérons

$$\Gamma = \{\gamma \mid \gamma \subset C \,,\ \exists \ f_\gamma \in A \,,\ S(f_\gamma) = \gamma\} \quad ;$$

c'est un ensemble de fermés de C .

Soit $f \in A$, considérons les sous-ensembles Γ' de Γ tels que

1° $S(f) \in \Gamma'$

2° Toute $\cap$ d'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma'$ est non vide.

(1) BISHOP (Errett). - A minimal boundary for function algebras, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 629-642.

Les Γ' étant ordonnés par inclusion, ils forment un ensemble ordonné inductif.

D'après le lemme de Zorn, $\exists\ \Gamma_0$ maximal, tel que

1° $S(f) \in \Gamma_0$.

2° Toute intersection d'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma_0$ est non vide.

C compact $\Longrightarrow$ $D = \bigcap_{\gamma\in\Gamma_0} \gamma \neq \emptyset$ et D compact.

C compact métrisable $\Longrightarrow$ $\exists$ une suite $\{\gamma_n\}_{n\in N}$ $\gamma_n \in \Gamma_0$ tel que $D = \bigcap_{n\in N} \gamma_n$.

Soit $x_0 \in D$. Posons

$$f_n = \frac{f\gamma_n}{f\gamma_n(x_0)} \quad ;$$

on a $f_n \in A$, et comme $x_0 \in S(f\gamma_n)$,

$$S(f_n) = \gamma_n \qquad f_n(x_0) = \|f_n\| = 1 \quad ;$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ converge uniformément sur C vers $g \in A$, et on a

$$\|g\| = g(x_0) = 1 \quad .$$

$\forall\ K \in N$, $\forall\ x \notin \gamma_K$, on a

$$|g(x)| \leqslant \sum_1^{\infty} \frac{|f_n(x)|}{2^n} < 1$$

car

$$\forall\ x\ ,\ |f_n(x)| \leqslant 1 \ \text{ et } \ x \notin \gamma_K \implies |f_K(x)| < 1 \quad .$$

Donc

$$S(g) \subset \bigcap_{n\in N} \gamma_n = D \quad .$$

Montrons que

$$S(g) = \{x_0\} \implies x_0 \in M_0$$

et comme $x_0 \in D \subset S(f)$

$$M_0 \cap S(f) \neq \emptyset$$

C. Q. F. D.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $S(g)$ ait plus d'un point.

A séparante $\Longrightarrow \exists\ h_1 \in A$, h_1 non constante sur $S(g)$, on peut supposer $|h_1| \leqslant 1$ sur $S(g)$ et $h_1 = 1$ en un point ; $h = h_1 + h_1^2$, $h \in A$ et $|h(x)| \leqslant 2$, $\forall\ x \in S(g)$ avec $|h(x)| = 2 \Longleftrightarrow h_1(x) = 1$.

Donc $\exists\ h \in A$, $|h|$ non constant sur $S(g)$.

Considérons

$$E = \{x \mid x \in S(g)\ ,\ |h(x)| = 2\}$$

E est fermé $\subset S(g)$ et $S(g) - E$ est non vide. Soit $x_1 \in E$. Posons

$$g_0 = \frac{g}{g(x_1)}\ ,\quad h_0 = \frac{h}{h(x_1)}\ ,\quad g_0\ ,\ h_0 \in A$$

et

$$\|g_0\| = g_0(x_1) = 1 \qquad S(g_0) = S(g)$$

$$h_0(x_1) = 1 \qquad |h_0(x)| \leqslant 1\ ,\ \forall\ x \in S(g)\ , \qquad |h_0(x)| < 1\ ,\ \forall\ x \in S(g) - E\ .$$

Posons

$$K = \|h_0\| \geqslant 1 \quad \text{et} \quad V_n = \{x \mid 1 + 2^{-n}(K-1) \leqslant |h_0(x)| \leqslant 1 + 2^{-n+1}(K-1)\}$$

$$x \in V_n \Longrightarrow |h_0(x)| > 1 \Longrightarrow V_n \cap S(g) = \emptyset \quad .$$

Donc $\forall\ x \in V_n$, $|g_0(x)| < 1$ et comme V_n est compact $\exists\ p_n \in N$ tel que

$$|g_0(x)|^{p_n} \leqslant \frac{1}{2}\ ,\quad \forall\ x \in V_n \quad .$$

Considérons maintenant

$$k = h_0 + 4(K-1)\sum_1^{\infty} \frac{g_0^{p_n}}{2^n} \qquad k \in A \quad \text{et} \quad k(x_1) = 1 + 4(K-1) \quad .$$

On a

$$\forall\ x \in S(g) - E \qquad |h_0(x)| < 1 \ , \quad |g_0(x)| = 1 \implies |k(x)| < 1 + 4(K-1)$$

$$\forall\ x \in C - \bigcup_n V_n \qquad |g_0(x)| \leqslant 1 \ , \quad |h_0(x)| \leqslant 1 \implies |k(x)| \leqslant 1 + 4(K-1)$$

$$\forall\ K \in N \ , \ \forall\ x \in V_K \qquad |h_0(x)| \leqslant 1 + 2^{-K+1}(K-1) \quad \text{et} \quad |g_0(x)|^{p_K} \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\implies |k(x)| \leqslant 1 + 4(K-1) \quad .$$

On a donc

$$k(x_1) = \|k\| \quad ,$$

donc

$$x_1 \in S(k) \cap D \neq \emptyset \qquad \text{et} \quad S(k) \cap (S(g) - E) = \emptyset \quad .$$

Or $S(k) \cap D \neq \emptyset \implies k \in \Gamma_0$ d'après l'hypothèse d'intersectionsfinies. D'où

$$(S(g) - E) \subset S(g) \subset D \subset S(k)$$

ce qui est contradictoire avec $S(k) \cap (S(g) - E) = \emptyset$.

THÉORÈME 2. - <u>Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème</u> 1 <u>et</u>

$$U_n = \{x \mid x \in C \ , \ \exists \ f \in A \ , \ \|f\| = 1 \ , \ |f(x)| > \frac{3}{4} \ , \ |f(y)| < \frac{1}{4} \ ,$$

$$\forall\ y \in D_n(x)\} \quad ,$$

<u>où</u> $D_n(x) = \{y \mid y \in C \ , \ d(x \ , y) \geqslant \frac{1}{n}\}$.

U_n <u>est ouvert et</u> $M_0 = \bigcap_{n \in N} U_n$. <u>La frontière minimale est donc un</u> G_δ .

a. $f \in A$. Posons

$$\sigma_n(f) = \{x \mid x \in C \ , \ |f(x)| > \frac{3}{4} \ , \ |f(y)| < \frac{1}{4} \ , \ \forall\ y \in D_n(x)\} \quad .$$

Si $x_0 \in \sigma_n(f)$, il ne peut exister une suite de points $y_1 , y_2 , \dots , y_p \dots$ tels que

$$d(x_0 \ , y_p) < \frac{1}{n} \ , \quad \forall\ p$$

$$\lim_{p\to\infty} d(x_0\ ,\ y_p) = \frac{1}{n}$$

$$|f(y_p)| \geqslant \frac{1}{4}\ ,\quad \forall\ p \qquad ,$$

car la boule : $\{y \mid y \in C\ ,\ d(x_0\ ,\ y) \leqslant \frac{1}{n}\}$ étant compacte, la suite $\{y_p\}_{p\in N}$ aurait une valeur d'adhérence y_0 pour laquelle $d(x_0\ , y_0) = \frac{1}{n} \implies y_0 \in D_n(x)$ et $|f(y_0)| \geqslant \frac{1}{4}$ ce qui est contradictoire avec $x_0 \in \sigma_n(f)$.

Donc $\exists\ D > 0$ tel que $|f(y)| < \frac{1}{4}$, $\forall\ y$, tel que $d(x\ ,\ y) \geq \frac{1}{n} - D$

$$\implies \text{la boule ouverte } \{x \mid x \in C\ ,\ d(x_0\ ,\ x) < D\} \subset \sigma_n(f) \quad .$$

Donc $\sigma_n(f)$ est ouvert et, comme $U_n = \bigcup\limits_{\substack{f\in A\\ \|f\|=1}} \sigma_n(f)$, U_n est ouvert.

b. $M_0 \subset \bigcup\limits_{n\in N} U_n$, car si $x \in M_0$, $\exists\ f \in A$, $S(f) = \{x\}$, et on peut supposer $\|f\| = |f(x)| = 1$. $\forall\ n \in N$, $D_n(x)$ est compact et comme $|f| < 1$ sur $D_n(x)$, $\exists\ p_n \in N$, $\forall\ y \in D_n(x)$, $|f(y)|^{p_n} < \frac{1}{4}$. Donc $\forall\ n \in N$,

$$x \in \sigma_n(f^{p_n}) \implies x \in U_n\ ,\ \forall\ n \quad .$$

C. Q. F. D.

c. $\bigcap\limits_{n\in N} U_n \subset M_0$.

Soit $x \in \bigcap\limits_{n\in N} U_n$, nous allons construire par récurrence une suite $\{g_n\}_{n\in N}$, $g_n \in A$ avec les 4 propriétés

(1) $\|g_{n+1} - g_n\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

(2) $\|g_n\| \leqslant 3(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$

(3) $g_n(x) = 3(1 - \frac{1}{2^n})$

(4) $|g_{n+1}(4) - g_n(4)| < \frac{1}{2^{n+1}}$, $\forall\ y \in D_n(x)$.

En effet

$$x \in U_1 \implies \exists\ f \in A\ ,\ \|f\| = 1\ ,\ x \in \sigma_1(f) \qquad ;$$

prenons $g_1 = \frac{3}{2}\frac{f}{f(x)}$

$$|f(x)| > \frac{3}{4} \implies \|g_1\| \leqslant \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} < 3(1 - \frac{1}{2^2}) \quad \text{et} \quad g_1(x) = 3(1 - \frac{1}{2}) \qquad .$$

Supposons g_K définie : $g_K(x) = 3(1 - 2^{-k})$.

$$g_K \text{ est continue} \implies \exists\ j > K\ ,\ j \in N \text{ tel que } \forall\ y \in C - D_j$$

$$|g_K(y)| < 3(1 - \frac{1}{2^K}) + \frac{1}{2^{K+2}}$$

$$x \in U_j \implies \exists\ f \in A\ ,\ \|f\| = 1\ ,\ |f(x)| > \frac{3}{4} \text{ et } |f(y)| < \frac{1}{4}\ ,$$

$$\forall\ y \in D_j(x) \qquad .$$

Posons

$$h = \frac{3}{2^{k+1}}\frac{f}{f(x)} \qquad ;$$

on a

$$h(x) = \frac{3}{2^{k+1}}\ ,\quad \|h\| \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}\ ,\quad |h(y)| < \frac{1}{2^{k+1}}\ ,\quad \forall\ y \in D_j(x) \supset D_K(x) \qquad .$$

En prenant $g_{K+1} = g_K + h$, on a bien $g_{K+1} \in A$ et les propriétés 1, 3, 4. Vérifions que l'on a la propriété 2 :

Si $y \in D_j(x)$,

$$|g_{K+1}(y)| \leqslant |g_K(y)| + |h(y)| \leqslant \|g_K\| + \frac{1}{2^{K+1}} \leqslant 3(1 - \frac{1}{2^{K+1}}) + \frac{1}{2^{K+1}} < 3(1 - \frac{1}{2^{K+2}}) \quad ;$$

et si $y \in C - D_j(x)$,

$$|g_{K+1}(y)| \leqslant 3(1 - \frac{1}{2^K}) + \frac{1}{2^{K+2}} + \|h\| \leqslant 3(1 - \frac{1}{2^{K+2}}) \qquad .$$

Or

(1) $\Longrightarrow$ g_n converge uniformément dans A vers g ;
(2) $\Longrightarrow$ $\|g\| \leqslant 3$;
(3) $\Longrightarrow$ $g(x) = 3$;
(4) $\Longrightarrow$ si $y \in D_n(x)$, $|g(y)| \leqslant \|g_n\| + \sum_{K \geqslant n} |g_{K+1}(y) - g_K(y)| < 3(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$

$$+ \sum_{K \geqslant n} \frac{1}{2^{K+1}} < 3 \quad .$$

Donc $S(g) = \{x\} \Longrightarrow x \in M_0$.

C. Q. F. D.

Remarques.

1° Si C n'est pas métrisable, il peut ne pas exister de frontière minimale.

Considérons $I = [0 , 1]$, $C = I^J$, J ensemble d'indices α non dénombrable. A = algèbre des fonctions continues sur C ne dépendant que d'une infinité dénombrable de variables.

A est une algèbre séparante de fonctions, elle est de Banach pour la convergence uniforme car si $f_n \to f$, on a $f = f_0 + \sum_{n \geqslant 0} (f_{n+1} - f_n)$ ce qui montre que f ne dépend que d'une infinité dénombrable de variables.

(Le théorème de Stone-Weierstrass montre que A est l'ensemble des fonctions continues sur C .)

Or

$$N_1 = \{x \mid x \in C \ , \ x_\alpha = 0 \ \text{ sauf pour une infinité dénombrable d'indices}\}$$

est une frontière de A ;

$$N_2 = \{x \mid x \in C \ , \ x_\alpha = 1 \ \text{ sauf pour une infinité dénombrable d'indices}\}$$

est une autre frontière de A et

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset \quad .$$

2° La frontière minimale peut être plus petite que la frontière de Šilov.

Considérons

$C = \{z \mid z \in \underset{\sim}{C} \ , \ |z| = 1\}$.

A = ensemble des fonctions continues f sur C telles qu'il existe $\hat{f}$ sur

$|z| \leq 1$ avec $f = \hat{f}$ sur C , $\hat{f}$ holomorphe sur $|z| < 1$ et $\hat{f}(0) = \hat{f}(1)$.

A est une algèbre séparante de Banach.

La frontière de Šilov est C ; la frontière minimale est $C - \{1\}$ (principe du maximum).