Philippe Courrège

# Ensembles uniformément intégrables de fonctions et compacité faible dans L1

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 1 (1962), exp. n° 2, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A2_0>

# ENSEMBLES UNIFORMÉMENT INTÉGRABLES DE FONCTIONS ET COMPACITÉ FAIBLE DANS $L^1$

par Philippe COURRÈGE

Notations. - Un espace mesuré est un triplet $(X, \mathcal{B}, \mu)$ où $\mathcal{B}$ est une tribu sur l'ensemble $X$, et $\mu$ une mesure positive sur $\mathcal{B}$. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré ; $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ désigne l'ensemble des classes de fonctions $\mu$-intégrables équivalentes pour $\mu$. Si $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, et si $\hat{f}$ est un représentant de la classe $f$, on désignera par $\int f \, d\mu$ l'intégrale $\int \hat{f} \, d\mu$ ($\int f \, d\mu$ étant indépendant du choix du représentant $\hat{f}$), et par $\int_A f \, d\mu$, l'intégrale $\int \hat{f} \, 1_A \, d\mu$, pour tout $A \in \mathcal{B}$. $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ désigne l'ensemble des classes de fonctions équivalentes bornées en mesures.

Remarque préliminaire. - Supposons que la mesure $\mu$ est bornée, et soit $H$ un sous-ensemble de $L^1$, borné dans $L^\infty$ (c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq M$ pour tout $f \in H$). $H$ a les deux propriétés suivantes :

a. $\lim_{a \to +\infty} \int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu = 0$ uniformément quand $f$ décrit $H$.

b. $H$ est faiblement relativement compact dans $L^1$ (c'est-à-dire que $H$ est relativement compact pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ sur $L^1$).

En effet, (a) est immédiat puisque $\int_{[|f| \geq a]} |f| \, d\mu = 0$ pour $a > M$ et $f \in H$.

On sait que la boule-unité $A^\infty$ de $L^\infty$ est compacte pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ ; d'autre part, l'injection canonique de $L^\infty$ dans $L^1$ est continue quand $L^\infty$ est muni de la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$, et $L^1$ de $\sigma(L^1, L^\infty)$. Il en résulte que $A^\infty$ est faiblement compacte dans $L^1$, d'où (b).

Nous allons montrer ci-dessous que, si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré convenable, les propriétés (a) et (b) ci-dessus sont équivalentes (théorème de Dunford-Pettis).

## 1. Ensembles uniformément intégrables. Définitions.

DÉFINITION 1. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un sous-ensemble $H$ de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu) = L^1$ est uniformément intégrable [1] (ou encore que $H$

[1] ou encore "équi-intégrable" (cf. [3]).

possède la propriété d'uniforme intégrabilité), si

$\mathcal{UI}(H)$ $$\lim_{a\to+\infty} \int_{[|f|\geq a]} |f| \, d\mu = 0$$

uniformément quand $f$ décrit $H$ [ce qui s'écrit aussi

$$\lim_{a\to+\infty} \left[\sup_{f\in H} \int_{[|f|\geq a]} |f| \, d\mu\right] = 0 \text{ .]}$$

DÉFINITION 2. - On dit qu'un sous-ensemble $H$ de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ a la propriété d'absolue continuité uniforme (par rapport à $\mu$) ([2]), si

$\mathcal{UC}(H)$ $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ A \in \mathcal{B},\ \forall\ f \in H,\ \mu(A) \leq \eta \implies \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon$ .

On dit qu'un sous-ensemble $H$ de $L^1$ est <u>latticiellement</u> borné, s'il existe $f \in L^1$, $f \geq 0$, tel que $|g| \leq f$ pour tout $g \in H$.

PROPOSITION 1. - <u>Tout sous-ensemble laticiellement borné</u> $H$ <u>de</u> $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ <u>(où</u> $(X, \mathcal{B}, \mu)$ <u>est un espace mesuré quelconque) possède les propriétés d'uniforme intégrabilité, et d'absolue continuité uniforme.</u>

En effet, si $|f| \leq g$ pour tout $f \in H$, on a :

$$\int_{[|f|\geq a]} d\mu \leq \int_{[g\geq a]} g \, d\mu \quad \text{pour tout} \quad f \in H \quad ;$$

l'uniforme intégrabilité résulte alors du théorème de Lebesgue appliqué à la famille $a \to 1_{[g\geq a]}\, g$, $(a \in R_+,\ a \to +\infty)$.

L'absolue continuité uniforme en résulte en écrivant

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A\cap[|f|\leq a]} |f| \, d\mu + \int_{A\cap[|f|\geq a]} |f| \, d\mu \leq a\mu(A) + \int_{[|f|\geq a]} |f| \, d\mu \quad .$$

COROLLAIRE 1. - <u>Tout sous-ensemble fini de</u> $L^1$ <u>possède les propriétés d'uniforme intégrabilité et d'absolue continuité uniforme.</u>

COROLLAIRE 2. - <u>Si la mesure</u> $\mu$ <u>est bornée, tout sous-ensemble</u> $H$ <u>de</u> $L^1$, <u>borné dans</u> $L^\infty$ <u>possède les propriétés d'uniforme intégrabilité et d'absolue continuité uniforme.</u>

---

([2]) ou encore que $H$ est "équi-continu" (cf. [3]).

PROPOSITION 2. - <u>La réunion d'une famille finie de sous-ensembles de</u> $L^1$, <u>ayant la propriété d'uniforme intégrabilité (resp. la propriété d'absolue continuité uniforme), a la même propriété.</u>

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> H <u>un sous-ensemble de</u> $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. <u>On a les relations</u>

1° $\mathcal{U}I(H) \Longrightarrow \mathcal{U}C(H)$

2° $\mathcal{U}C(H)$ <u>et</u> H <u>borné dans</u> $L^1 \Longrightarrow \mathcal{U}I(H)$.

Écrivons

$$\int_A |f| \, d\mu = \int_{A\cap[|f|\leqslant a]} |f| \, d\mu + \int_{A\cap[|f|\geqslant a]} |f| \, d\mu \quad ,$$

d'où

$$\int_A |f| \, d\mu \leqslant a\mu(A) + \int_{[|f|\geqslant a]} |f| \, d\mu \quad .$$

La 1° en résulte.

Inversement, on a

$$a 1_{[|f|\geqslant a]} \leqslant |f|$$

donc

$$\mu([|f| \geqslant a]) \leqslant \frac{1}{a} \int |f| \, d\mu \quad ;$$

d'où le 2°.

COROLLAIRE 1. - Si $\mu$ est une mesure bornée, on a :

$$\mathcal{U}I(H) \Longleftrightarrow \mathcal{U}C(H) \quad \text{et} \quad H \text{ borné dans } L^1 \quad .$$

En effet, si $\mu$ est une mesure bornée, $\mathcal{U}I(H) \Longrightarrow$ H borné dans $L^1$, car on peut écrire

$$\int |f| \, d\mu = \int_{[|f|\leqslant a]} |f| \, d\mu + \int_{[|f|\geqslant a]} |f| \, d\mu \leqslant a\mu(X) + \int_{[|f|\geqslant a]} |f| \, d\mu \quad .$$

Remarques.

a. Si $\mu$ n'est pas bornée, $\mathcal{UI}(H)$ n'implique pas nécessairement que $H$ est borné dans $L^1$ (cf. Appendice II, exemple 1).

b. Si $H$ n'est pas borné dans $L^1$, $\mathcal{UC}(H)$ n'implique pas nécessairement $\mathcal{UI}(H)$ (cf. Appendice II, exemple 2).

c. Si $H$ est borné dans $L^1$, $\mathcal{UC}(H)$ n'est pas nécessairement vérifié (cf. Appendice II, exemple 7).

Ceci montre qu'un ensemble $H \subset L^1$, équicontinu en tant qu'ensemble de formes linéaires continues sur l'espace de Banach $L^\infty$, ne possède pas nécessairement la propriété d'absolue continuité uniforme.

d. Par contre, soit $H$ un sous-ensemble de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ équicontinu en tant qu'ensemble de formes linéaires sur $L^\infty$ muni de la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ ; alors $H$ a la propriété d'absolue continuité uniforme.

En effet, sous les hypothèses, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie $f_1 \dots f_n$ de fonctions de $L^1$ et un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $g \in L^\infty$,

$$|\int f_K \, g \, d\mu| \in \eta \quad (K = 1, 2, \dots n) \quad \text{entraîne} \quad |\int fg \, d\mu| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad f \in H .$$

Soit alors $\eta_1 > 0$ tel que $\mu(A) \leq \eta_1$ entraîne $|\int_A f_K \, d\mu| \leq \eta$ pour $1 \leq K \leq n$ ($\eta$ existe d'après le corollaire 1 de la proposition 1).

On a alors

$$\mu(A) \leq \eta_1 \implies |\int_A f \, d\mu| \leq \varepsilon ,$$

pour tout $f \in H$, d'où la conclusion, puisque

$$\int_A |f| \, d\mu \leq |\int_{A\cap[f>0]} f \, d\mu| + |\int_{A\cap[f\leq 0]} f \, d\mu| .$$

2. Uniforme intégrabilité et compacité faible dans $L^1$.

PROPOSITION 4. - *Soit $(f_n)$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, la suite $n \to \int_A f_n \, d\mu$ est convergente dans $R$.*

*Alors, l'ensemble $H$ des $f_n$, $H = \{f_n \mid n \in N\}$, possède la propriété d'absolue continuité uniforme.*

a. Supposons d'abord que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\int_A f_n \, d\mu$ tend vers $0$.

Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\mu(A) \leqslant \eta \implies |\int_A f_n \, d\mu| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n$.

En effet, on a alors

$$\int_A |f_n| \, d\mu = \int_{A \cap [f_n > 0]} f_n \, d\mu - \int_{A \cap [f_n \leqslant 0]} f_n \, d\mu \leqslant 2\varepsilon \quad .$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde, et supposons que

$$\exists \ \varepsilon > 0 , \ \forall \ \eta > 0 , \ \exists \ A \in \mathcal{B} , \ \exists \ m , \ \mu(A) \leqslant \eta \ \text{ et } \ |\int_A f_m \, d\mu| > \varepsilon \quad .$$

D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il en résulte que

(h) $\exists \ \varepsilon > 0 , \ \forall \ \eta > 0 , \ \forall \ n , \ \exists \ A \in \mathcal{B} , \ \exists \ m , \ m \geqslant n , \ \mu(A) \leqslant \eta$

et

$$\int_A f_m \, d\mu > \varepsilon \quad .$$

Nous allons montrer qu'on peut, sous cette hypothèse, définir par récurrence une suite $(A_K)$ d'ensembles de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, et une suite strictement croissante $(n_K)$ d'entiers telles que

$$\int_{A_K} f_{n_K} \, d\mu \geqslant \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } K \quad ,$$

et

$$|\int_{A_j} f_{n_K} \, d\mu| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour tout } j \neq K \quad .$$

Supposons ce résultat établi, et soit $A = \bigcup_K A_K$ ; on a

$$\int_A f_{n_K} \, d\mu = \sum_{j \neq K} \int_{A_j} f_{n_K} \, d\mu + \int_{A_K} f_{n_K} \, d\mu$$

d'où

$$|\int_A f_{n_K} \, d\mu| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^K}\right) \geqslant \varepsilon/4 \quad \text{pour tout } K$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = 0 \quad .$$

Il reste à montrer l'existence des suites $(A_K)$ et $(n_K)$.

Supposons la construction faite jusqu'au rang $K$ ; on a

$$\int_{A_j} f_{n_j} \, d\mu \geqslant \varepsilon/2 \quad ,$$

$$\left|\int_{A_i} f_{n_j} \, d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i+j+1}}$$

et

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

pour $1 \leqslant i \leqslant K$, $1 \leqslant j \leqslant K$, $i \neq j$ et $n_1 < n_2 < \dots < n_K$.

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_j} f_n \, d\mu = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant K \quad ,$$

il existe $n_0$ tel que

$$m \geqslant n_0 \implies \left|\int_{A_j} f_m \, d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{K+K+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant K \quad .$$

D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il existe $\eta_0$ tel que

$$\mu(A) < \eta_0 \implies \left|\int_A f_{n_j} \, d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{K+K+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant K \quad .$$

En faisant alors $\eta = \eta_0$ et $n = n_0 + n_K + 1$ dans la relation (h), on obtient l'existence d'un ensemble $A \in \mathcal{B}$ et d'un entier $n_{K+1}$ tels que :

$$\left|\int_{A_j} f_{n_{K+1}} \, d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}}$$

$$\left|\int_A f_{n_j} \, d\mu\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+K+1}} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant K \quad ,$$

$$\int_A f_{n_{K+1}}\, d\mu > \varepsilon$$

et

$$n_{K+1} > n_K \quad .$$

En posant

$$A_{K+1} = A \setminus \bigcup_{j\leq K} A_j \quad ,$$

on obtient le résultat cherché.

b. Passons au cas général.

Montrons d'abord que

$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \eta > 0 \ , \ \exists \ n \ , \ \forall \ A \in \mathcal{B} \ , \ \forall \ p \ , q$

$$\mu(A) \leq \eta \ \text{ et } \ p \ , q \geq n \implies \left|\int_A |f_p - f_q|\, d\mu\right| \leq \varepsilon$$

En effet, autrement, on pourrait trouver deux suites $(p_K)$ , $(q_K)$ et une suite $(A_K)$ d'ensembles de $\mathcal{B}$ , tels que $\mu(A_K) \leq \frac{1}{K}$ , $p_K$ , $q_K \geq K$ et

$$\int_{A_K} |f_{p_K} - f_{q_K}|\, d\mu > \varepsilon$$

pour tout $K$ . Ceci contredit le résultat obtenu en (a), puisque la suite $(f_{p_K} - f_{q_K})$ est telle que

$$\lim_{K\to\infty} \int_A (f_{p_K} - f_{q_K})\, d\mu = 0$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$ d'après l'hypothèse.

Soient alors $\varepsilon > 0$ ; $\eta$ et $n$ tels que $\mu(A) \leq \eta$ et

$$p \ , q \geq n \implies \int_A |f_p - f_q|\, d\mu \leq \varepsilon/4 \quad .$$

On a d'abord, pour $\mu(A) \leq \eta$ et $p \ , q \geq n$ ,

$$\int_A |f_p - f_q|\, d\mu = \int_{A[(f_p-f_q)\geq 0]} (f_p - f_q)\, d\mu - \int_{A[f_p-f_q<0]} (f_p - f_q)\, d\mu$$

$$\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \quad .$$

Ensuite, d'après la proposition 1, il existe $\eta'$ tel que $\mu(A) < \eta'$ entraîne $\int_A |f_m|\, d\mu \leq \varepsilon/2$ pour tout $m \leq n$ .

Alors, pour $m \geq n$ et $\mu(A) \leq \inf(\eta , \eta')$ , on a

$$\int_A |f_m|\, d\mu \leq \int_A |f_n|\, d\mu + \int_A |f_m - f_n|\, d\mu \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. - Si $(f_n)$ est une suite d'éléments de $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ convergente pour la topologie $\sigma(L^1 , L^\infty)$ sur $L^1$ , alors l'ensemble $H$ des $f_n$ possède la propriété d'absolue continuité uniforme.

COROLLAIRE 2. - Supposons que $\mathcal{K}$ soit un sous-ensemble $\mathcal{B}$ ayant les propriétés suivantes :

1° $K_1 \in \mathcal{K}$ et $K_2 \in \mathcal{K} \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$ .

2° Pour tout $A \in \mathcal{B}$ , $\mu(A) = \sup_{K \subset A, K \in \mathcal{K}} \mu(K)$ .

Alors, (sous les hypothèses de la proposition 4) pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{CK} |f_n|\, d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $n$ .

En effet, on va se ramener au cas où $\mu$ est bornée ; pour cela, pour tout $n$ , soit $\mu_n$ la mesure $|f_n|\, \mu$ , on a

$$\mu_n(A) = \int_A |f_n|\, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad ,$$

et

$$\mu_n(X) = \int |f_n|\, d\mu \quad .$$

Soit $\nu$ la mesure bornée sur $(X , \mathcal{B})$ définie par

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \mu_n(X)}\, \mu_n(A) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad .$$

Montrons que l'on a encore

$$\nu(A) = \sup_{K \subset A,\, K \in \mathcal{K}} \nu(K) \quad .$$

D'abord, pour tout $f \in L^1$ , $f$ étagée positive, on a

$$\int_A f \, d\mu = \sup_{K \subset A} \int_K f \, d\mu \quad ,$$

en vertu du 1° et du 2°. On a donc, par passage à la limite croissante,

$$\int_A |f| \, d\mu = \sup_{K \subset A} \int_K |f| \, d\mu \quad \text{pour tout} \quad f \in L^1 \quad .$$

En particulier,

$$\mu_n(A) = \sup_{K \subset A} \mu_n(K) \quad ;$$

on en déduit que

$$\nu_p(A) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n \, \mu_n(X)} \, \mu_n(A) = \sup_{K \subset A} \nu_p(K) \quad ;$$

d'où

$$\nu(A) = \sup_p \nu_p(A) = \sup_p \left(\sup_{K \subset A} \nu_p(K)\right) = \sup_{K \subset A} \nu(K) \quad .$$

Posons alors, pour tout $n$ , $\lambda_n = f_n \cdot \mu$ ; $\lambda_n$ est une mesure bornée non nécessairement positive, et on a

$$|\lambda_n(A)| = \left|\int_A f_n \, d\mu\right| \leq \mu_n(A) \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B} \quad .$$

Comme $\nu(A) = 0 \implies \mu_n(A) = 0$ , on a aussi, $\nu(A) = 0 \implies \lambda_n(A) = 0$ . D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe donc, pour chaque $n$ , une fonction $g_n \in L^1(X \, , \, \mathcal{B} \, , \, \nu)$ telle que

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\mu = \int_A g_n \, d\nu \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B} \quad .$$

On va pouvoir appliquer alors la proposition 4 à la suite $(g_n)$ et à l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \nu)$, où $\nu$ est cette fois une mesure bornée.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\nu(A) \leqslant \eta$ entraîne $\int_A |g_n| \, d\nu \leqslant \varepsilon$ pour tout $n$.

$\nu$ étant bornée, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\nu(\complement K) \leqslant \eta$ ; donc $\int_{\complement K} |g_n| \, d\nu \leqslant \varepsilon$ pour tout $n$.

Pour tout $n$, on a alors

$$\int_{\complement K} |f_n| \, d\mu = \int_{\complement K \cap [f_n \geqslant 0]} f_n \, d\mu + \int_{\complement K \cap [f_n \leqslant 0]} (-f_n) \, d\mu$$

$$= \int_{\complement K \cap [f_n \geqslant 0]} g_n \, d\mu + \int_{\complement K \cap [f_n \leqslant 0]} (-g_n) \, d\mu \leqslant 2\varepsilon$$

d'où le résultat cherché.

Remarques.

a. Si $X$ est un espace localement compact, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$, et $\mu$ une mesure de Radon positive, on peut prendre pour $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $X$.

b. Si $\mu$ est une mesure $\sigma$-finie, on peut prendre pour $\mathcal{K}$ l'ensemble des $A \in \mathcal{B}$ tels que $\mu(A) < +\infty$.

COROLLAIRE 3 (Sous les hypothèses du corollaire 2). - Pour qu'une suite $(f_n)$ converge faiblement vers $0$ dans $L^1$, il faut et il suffit que, pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}$, la suite des nombres $\int_A f_n \, d\mu$ tende vers $0$.

La condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante :

L'hypothèse entraîne que $\lim\limits_{n \to \infty} \int fg \, d\mu = 0$ pour tout $g \in L^\infty$, $g$ étagée. Comme l'ensemble des fonctions étagées est partout dense dans $L^\infty$, il suffit de montrer que l'hypothèse entraîne que l'ensemble $H$ des $f_n$ est borné des $L^1$.

D'après le corollaire 2 de la proposition 4, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{\complement K} |f_n| \, d\mu \leqslant 1$ pour tout $n$.

Il nous reste à montrer que l'ensemble des $\int_K |f_n| \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, est borné.

Or, ceci va résulter du lemme suivant de théorie de la mesure :

LEMME. - Soit $\mu$ une mesure bornée sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{B})$. Pour tout $\eta > 0$, il existe une partition de $X$ en deux ensembles $A$ et $B$ tels que

1° Il existe une partition finie $(A_j)$ de $A$ formée d'atomes de $\mathcal{B}$ relatifs à la mesure $\mu$ (3).

2° Il existe une partition finie $(B_K)$ de $B$ formée d'ensembles de $\mathcal{B}$ de mesure $\leqslant \eta$.

[Pour une démonstration de ce lemme, cf. l'article de HALMOS (4).]

Soit alors, d'après la proposition 4, $\eta > 0$ tel que $\mu(A) \leqslant \eta \Longrightarrow \int_A |f_n| \, d\mu \leqslant 1$ pour tout $n$.

Appliquons le lemme à la restriction de $\mu$ à $K$

$$\int_K |f_n| \, d\mu = \sum_{j=1}^{p} \int_{A_j} |f_n| \, d\mu + \sum_{K=1}^{q} \int_{B_K} |f_n| \, d\mu \quad .$$

Comme $\mu(B_K) \leqslant \eta$, on a $\int_{B_K} |f_n| \, d\mu \leqslant 1$ pour tout $K$.

Comme $f_n$ garde un signe constant sur $A_j$, on a

$$\int_{A_j} |f_n| \, d\mu = \left|\int_{A_j} f_n \, d\mu\right|$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_j} |f_n| \, d\mu = 0 \quad ,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 1 [DUNFORD-PETTIS]. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré ayant les propriétés suivantes :

a. $L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ est le dual de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

b. Il existe un sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$ tel que :

---

(3) On dit que $E \in \mathcal{B}$ est un atome relatif à $\mu$, si pour tout $F \in \mathcal{B}$, $F \subset E \Longrightarrow \mu(F) = \mu(E)$ ou $\mu(F) = 0$ ; toute fonction $\mathcal{B}$ mesurable est presque partout constante sur un atome.

(4) HALMOS (Paul). - On the set of values of a finite measure, Bull. Amer. math. Soc., t. 53, 1947, p. 138-139.

1° $\mathcal{K}$ est stable par réunion finie ;

2° $\mu(A) = \sup_{K\in\mathcal{K}, K\subset A} \mu(K)$ ;

3° pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\mu(K) < +\infty$.

Alors, pour qu'un sous-ensemble $H$ de l'espace de Banach $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit qu'il possède les deux propriétés suivantes :

(A) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{CK} |f|\, d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$.

(B) $H$ est uniformément intégrable.

En outre, $H$ est alors borné dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

α. La condition est nécessaire.

Supposons que $H$ est faiblement relativement compact dans $L^1$.

- Pour montrer (A) raisonnons par l'absurde, en utilisant le corollaire 2 de la proposition 4.

Supposons donc que

(k) $$\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ K,\ \exists\ f \in H,\ \int_{CK} |f|\, d\mu > \varepsilon \quad .$$

On a vu dans la démonstration du corollaire 2 de la proposition 4 que

$$\int_A |f|\, d\mu = \sup_{K\subset A} \int_K |f|\, d\mu \quad \text{pour tout} \quad f \in L^1 \quad .$$

On construit alors par récurrence une suite $(K_n)$ d'éléments de $\mathcal{K}$ deux à deux disjoints, et une suite $(f_n)$ d'éléments de $H$ telles que $\int_{K_n} |f_n|\, d\mu > \varepsilon$ pour tout $n$.

D'après le théorème de Šmulian (Appendice I, lemme 3), il existe une sous-suite $(f_{n_p})$ de $(f_n)$ qui converge faiblement dans $L^1$ ; donc d'après le corollaire 2 de la proposition 4, il existe un ensemble $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{CK} |f_{n_p}|\, d\mu \leq \varepsilon/2$ pour tout $p$. On peut alors écrire,

$$\int_{K_m} |f_{n_p}|\, d\mu \leq \varepsilon/2 + \int_{K\cap K_m} |f_{n_p}|\, d\mu \quad .$$

Mais, les ensembles $K_m$ étant deux à deux disjoints, $\mu(K) \geq \sum_m \mu(K \cap K_m)$ ; donc, puisque $\mu(K) < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \mu(K \cap K_m) = 0$ ; donc, d'après la proposition 4, il existe un entier $m_0$ tel que

$$m \geqslant m_0 \implies \int_{K \cap K_m} |f_{n_p}| \, d\mu \leqslant \varepsilon/2 \quad .$$

Donc $\int_{K_m} |f_{n_p}| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout $m \geqslant m_0$ ce qui est absurde, puisque $\int_{K_{n_p}} |f_{n_p}| \, d\mu > \varepsilon$ pour tout $p$.

(A) est ainsi établi.

– Raisonnons aussi par l'absurde pour montrer (B) ; en supposant que $H$ n'est pas uniformément intégrable. D'après la proposition 3, puisque $H$ est borné dans $L^1$ (lemme 1, Appendice I), $\mathcal{UC}(H)$ ne serait pas vérifiée, c'est-à-dire

$$\exists \ \varepsilon > 0 \ , \quad \forall \ \eta > 0 \ , \quad \exists \ f \in H \ , \quad \exists \ A \in \mathcal{B} \qquad \mu(A) \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \int_A |f| \, d\mu > \varepsilon \quad .$$

On en déduit l'existence d'une suite $(A_n)$ d'ensembles de $\mathcal{B}$ et d'une suite $(f_n)$ de fonctions de $H$ telles que

$$\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \int_{A_n} |f_n| \, d\mu > \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad n \quad .$$

D'après le théorème de Šmulian, on peut extraire de $(f_n)$ une sous-suite $(f_{n_p})$ qui converge faiblement dans $L^1$ ; et cette suite mettrait en défaut la conclusion de la proposition 4. (B) est donc établi.

$\beta$. Inversement, la condition est suffisante.

Nous allons utiliser le lemme 2 (Appendice I).

Soit $\varepsilon > 0$, d'après (A) et (B), il existe $K \in \mathcal{K}$ et $a \in R_+$ tels que

$$\int_{CK} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \int_{[|f| \geqslant a]} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon/2$$

pour tout $f \in H$.

Écrivons alors

$$f = 1_{[|f|<a] \cap K} f + 1_{[|f|<a] \cap CK} f + 1_{[|f| \geqslant a]} f \quad .$$

Si on pose

$$f_1 = 1_{[|f|<a]\cap K}\, f \quad \text{et} \quad f_2 = 1_{[|f|<a]\cap \complement K}\, f + 1_{[|f|\geq a]}\, f$$

on a

$$f = f_1 + f_2 \,, \quad |f_1| \leq a 1_K \quad \text{et} \quad \int |f_2|\, d\mu \leq \varepsilon \quad .$$

En vertu du lemme 2 (Appendice I), il suffit de montrer que l'ensemble $M$ des fonctions $f$ telles que $|f| \leq a1_K$ est faiblement relativement compact dans $L^1$.

Montrons d'abord que $M$ est fermé dans $L^\infty$ pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$. Soit $f$ adhérent à $M$, et supposons que $f1_{\complement K} \neq 0$. Alors, $f1_{\complement K\cap[f\geq 0]} \neq 0$, par exemple, donc,

$$\int f1_{\complement K\cap[f\geq 0]}\, d\mu > 0 \quad .$$

Il existe donc $K_1 \in \mathcal{K}$, $K_1 \subset \complement K$ tel que $\int f1_{K_1}\, d\mu > 0$. Or ceci est absurde, puisque, $f$ étant adhérent à $M$, il existe un filtre $(f_i)$ sur $M$ tel que $\int f_i\, 1_{K_1}\, d\mu$ tende vers $\int f1_{K_1}\, d\mu$, et que $\int f_i\, 1_{K_1}\, d\mu = 0$ pour tout $i$.

Ainsi, l'adhérence de $M$ est contenue dans l'ensemble des fonctions p. p. nulles dans $\complement K$. Comme la boule-unité de $L^\infty$ est compacte pour $\sigma(L^\infty, L^1)$, cette boule-unité est faiblement fermée ; on en déduit que l'adhérence de $M$ est aussi contenue dans la boule de rayon $a$, donc égale à $M$ ; $M$ est donc fermée, et comme la boule-unité de $L^\infty$ est compacte pour $\sigma(L^\infty, L^1)$, $M$ est compact dans $L^\infty$.

Par ailleurs l'injection canonique de $M$ dans $L^1$ est continue lorsque $M$ est muni de la topologie induite par $\sigma(L^\infty, L^1)$ et $L^1$ de $\sigma(L^1, L^\infty)$. Il en résulte donc que $M$ est faiblement compact dans $L^1$.

γ. Si $H$ est relativement faiblement compact dans $L^1$, $H$ est faiblement bornée, donc fortement bornée, d'après le lemme 2 (Appendice I).

COROLLAIRE 0. – <u>Sous les hypothèses (a) et (b) du théorème 1, pour que</u> $H \subset L^1$ <u>soit faiblement relativement compact, il faut et il suffit que</u> $H$ <u>soit borné</u>

dans $L^1$, parré de la propriété d'absolue continuité uniforme, et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{CK} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ pour tout $f \in H$.

COROLLAIRE 1. - Soient $E$ un espace localement compact, et $\theta$ une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur $E$.

Pour qu'une partie $H$ de $L^1(E, \theta)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que

(A) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que

$$\int_{CK} |f| \, d\theta \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad f \in H$$

(B) $H$ est uniformément intégrable.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 en prenant $X = E$, $\mathcal{B} = \Lambda_E^\theta$ tribu des ensembles $\theta$-mesurables, $\mu = \overline{\theta}$, prolongement essentiel de $\theta$ à $\mathcal{B}$, et pour $\mathcal{K}$ la famille des compacts de $E$. On sait que (5)

$$L^1(E, \theta) = L^1(E, \mathcal{B}, \mu) \quad ,$$

$$L^\infty(E, \theta) = L^\infty(E, \mathcal{B}, \mu) \quad ,$$

que

$$L^\infty(E, \theta) \text{ est le dual de } L^1(E, \theta)$$

et que

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K) \quad .$$

COROLLAIRE 2. - Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que la mesure $\mu$ est $\sigma$-finie.

Pour qu'une partie $H$ de $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que

(A) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que

---

(5) cf. à ce sujet :

COURRÈGE (Philippe). - "Théorie de la mesure". - Paris, Centre de Documentation universitaire (à paraître).

$$\mu(A) < +\infty \quad \underline{\text{et}} \quad \int_{CA} |f| \, d\mu \leq \varepsilon \qquad .$$

(B) $H$ <u>est uniformément intégrable</u>.

Il suffit de prendre pour $\mathcal{K}$ la famille les ensembles de mesure $\mu$ finie.

On sait, d'autre part, que si $\mu$ est $\sigma$-finie, $L^\infty(X , \mathcal{B} , \mu)$ est le dual de $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ .

COROLLAIRE 3. - <u>Soit</u> $\mu$ <u>une mesure</u> bornée <u>sur l'espace mesurable</u> $(X , \mathcal{B})$ . <u>Pour qu'une partie</u> $H$ <u>de</u> $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ <u>soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que</u> $H$ <u>soit</u> uniformément intégrable.

En effet, si $\mu$ est bornée, la condition (A) du corollaire 2 est automatiquement satisfaite. [Cf. remarque (b) ci-dessous pour une démonstration directe.]

COROLLAIRE 4. - <u>Soit</u> $\mu$ <u>une mesure</u> bornée <u>sur l'espace mesurable</u> $(X , \mathcal{B})$ . <u>Pour qu'une partie</u> $H$ <u>de</u> $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ <u>soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit que</u> $H$ <u>soit bornée dans</u> $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ , <u>et parré de la propriété</u> d'absolue continuité uniforme [<u>définition 2</u>].

Ceci résulte du corollaire 3, et du corollaire 1 de la proposition 3.

<u>Remarques</u>.

a. Les conditions (A) et (B) du théorème 1 sont indépendantes (cf. Appendice II, exemples 4 et 5).

b. Le corollaire 3 donne, dans le cas où $\mu$ est bornée, un résultat agréable. Montrons directement la condition suffisante.

$$f \ \text{ s'écrit } \ f = 1_{[|f|<a]} f + 1_{[|f|\geq a]} f \qquad .$$

Si $B$ désigne la boule-unité de $L^\infty$ , on a $1_{[|f|<a]} f \in aB$ . Le résultat découle alors des remarques préliminaires et du lemme 2 (Appendice I).

c. Le théorème 1 entraîne que, si $H$ vérifie (A) et (B) , $H$ est borné dans $L^1$ . Ce résultat peut être montré directement sans utiliser les hypothèses (a) et (b).

Supposons donc que $H$ soit uniformément intégrable, et que, pour tout $\varepsilon > 0$ , il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\int_{CA} |f| \, d\mu \leq \varepsilon$ pour tout $f \in H$ . Alors, $H$ est borné dans $L^1$ .

En effet, on peut écrire

$$f = 1_{A\cap[|f|<a]}\, f + 1_{\complement A\cap[|f|<a]}\, f + 1_{[|f|\geq a]}\, f$$

d'où

$$\int |f|\, d\mu \leq a\mu(A) + \int_{\complement A} |f|\, d\mu + \int_{[|f|\geq a]} |f|\, d\mu \qquad ,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. - Sous les hypothèses du théorème 1 (ou des corollaires 1, 2, 3,), toute partie $H$ latticiellement bornée de $L^1$ est faiblement relativement compacte.

En effet, soit $h \in L^1$ telle que $|f| \leq h$ pour tout $f \in H$. On a $\int h\, d\mu = \sup_{K\in\mathcal{K}} \int_K h\, d\mu$ ; donc, comme $\int h\, d\mu < +\infty$, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $K \in \mathcal{K}$ tel que $\int_{\complement K} h\, d\mu \leq \varepsilon$. Il en résulte que $H$ vérifie (B) ; d'où le corollaire, puisque $H$ est uniformément intégrable (proposition 1).

COROLLAIRE 6. - Sous les hypothèses du théorème 1, (ou des corollaires 1, 2, 3,) dans l'espace $L^1$, toute suite de Cauchy faible, est faiblement convergente.

En effet, si $(f_n)$ est une suite de Cauchy faible, $n \to \int_A f_n\, d\mu$ converge pour tout $A \in \mathcal{B}$. Donc, d'après la proposition 4 et son corollaire 2, l'ensemble $H$ des $f_n$ a la propriété d'absolue continuité uniforme ainsi que la propriété (A). Comme $H$ est faiblement borné, $H$ est borné dans $L^1$ (lemme 1, Appendice I), donc d'après la proposition 3, $H$ vérifie aussi (c) ; $H$ est donc faiblement relativement compact. La suite $(f_n)$ a donc un point adhérent (pour la topologie faible), dans $L^1$, et puisqu'elle est de Cauchy, elle converge vers ce point.

## 3. Parties relativement compactes de $L^1$. Convergence faible et convergence en mesure.

Si $(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, nous désignerons par $M(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace des classes de fonctions mesurables équivalentes (pour $\mu$). [ $M(X, \mathcal{B}, \mu)$ est identique à l'espace quotient $\mathcal{M}(X, \mathcal{B}, \mu)/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des fonctions $\mu$-négligeables.]

Si on pose $\delta(f, g) = \inf\{\varepsilon \mid \mu[|f-g| \geqslant \varepsilon] \leqslant \varepsilon\}$, $\delta$ est une distance invariante par translation sur $M$, et induisant sur $M$ une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel de $M$, et appellée topologie de la convergence en mesure (pour $\mu$). Pour qu'un filtre $(f_i)$ sur $M$ converge vers $f$ pour cette topologie, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$i \to \mu[|f_i - f| \geqslant \varepsilon]$$

converge vers 0. On dit alors que le filtre $(f_i)$ converge vers $f$ "en mesure".

Sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ nous avons donc actuellement **trois** topologies: la topologie de la norme (ou forte [6]), la topologie faible, et la topologie de la convergence en mesure.

La topologie forte est plus fine que la topologie de la convergence en mesure. En effet $\varepsilon 1_{[|f| \geqslant \varepsilon]} \leqslant |f|$, donc

$$\mu[|f| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int |f| \, d\mu \quad .$$

Par contre, en général, les topologies faible et de la convergence en mesure ne sont pas comparables (cf. Appendice II, exemple 6).

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> $(X, \mathcal{B}, \mu)$ <u>un espace mesuré, et</u> $H$ <u>un sous-ensemble de</u> $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ <u>ayant les deux propriétés suivantes</u>

$(A_1)$ <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe</u> $A \in \mathcal{B}$ <u>tel que</u> $\mu(A) < +\infty$, <u>et</u> $\int_{CA} |f| \, d\mu \leqslant \varepsilon$ <u>pour tout</u> $f \in H$;

$(B_1)$ $H$ <u>possède la propriété d'absolue continuité uniforme</u>.

<u>Alors, sur</u> $H$, <u>les structures uniformes induites par la métrique de</u> $L^1$, <u>et par la métrique de la convergence en mesure, coïncident</u>.

Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$f \in H,\ g \in H \text{ et } \delta(f, g) \leqslant \eta \implies \int |f-g| \, d\mu \leqslant \varepsilon \quad .$$

---

[6] ou encore topologie de la convergence en moyenne.

Soit $\varepsilon > 0$ , $f$ , $g \in H$ , $a > 0$ et $A \in \mathcal{B}$ tel que

$$(A_1) \qquad \int_{CA} |f| \, d\mu \leq \varepsilon/4 \quad \text{pour tout} \quad f \in H$$

$$\int |f - g| \, d\mu = \int_{A \cap [|f-g|<a]} |f - g| \, d\mu + \int_{CA \cap [|f-g|<a]} |f - g| \, d\mu + \int_{[|f-g| \geq a]} |f - g| \, d\mu$$

$$\leq a\mu(A) + \int_{CA} \{|f| + |g|\} \, d\mu + \int_{[|f-g| \geq a]} \{|f| + |g|\} \, d\mu \qquad .$$

Soit $\eta_0 = \dfrac{\varepsilon}{4\mu(A)}$ ; pour $a \leq \eta_0$ , $a\mu(A) \leq \varepsilon/4$ .

D'après le choix de $A$ , le deuxième terme est $\leq \varepsilon/2$ .

Enfin, puisque $H$ a la propriété d'absolue continuité uniforme, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $\mu(B) \leq \eta_1 \implies \int_B |f| \, d\mu \leq \varepsilon/8$ pour tout $f \in H$ .

Posons $\eta = \inf(\eta_0 , \eta_1)$ .

Si $\delta(f , g) < \eta$ , il existe $a > 0$ tel que $a < \eta$ et $\mu[|f - g| \geq a] < \eta$ . On a alors

$$\int |f - g| \, d\mu \leq \varepsilon \qquad .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Soit $(X , \mathcal{B} , \mu)$ un espace mesuré satisfaisant aux hypothèses (a) et (b) du théorème 1 (§ 2), ou de ses corollaires 1, 2, 3. Alors, si $H$ est un sous-ensemble faiblement relativement compact de $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ , les structures uniformes de la convergence en moyenne et de la convergence en mesure coïncident sur $H$ .

COROLLAIRE 2. - Soit $(X , \mathcal{B} , \mu)$ un espace mesuré satisfaisant aux hypothèses (a) et (b) du théorème 1 (ou de ses corollaires 1, 2, 3). Alors

1° Pour qu'un sous-ensemble $H$ de $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ soit relativement compact pour la topologie forte, il faut et il suffit qu'il soit relativement compact pour la topologie faible, et pour la topologie de la convergence en mesure.

2° Pour qu'une suite $(f_n)$ d'éléments de $L^1(X , \mathcal{B} , \mu)$ converge fortement vers $f \in L^1$ , il faut et il suffit qu'elle converge faiblement, et qu'elle converge en mesure vers $f$ .

La propriété 2° résulte du corollaire 1, puisque, si $(f_n)$ est une suite faiblement convergente, l'ensemble des $(f_n)$ est faiblement compact.

Montrons 1°.

Soit $(f_n)$ une suite d'éléments de $H$. D'après le théorème de Šmulian (Appendice I, lemme 3) on peut en extraire une sous-suite $(f_{n_K})$ qui converge faiblement ; et de cette suite $(f_{n_K})$, on peut extraire une sous-suite $(f_{m_K})$ qui converge en mesure ; $(f_{m_K})$ converge fortement d'après 2° ; d'où le résultat d'après le critère de Bolzano-Weierstrass.

Remarque. - Sur un sous-ensemble uniformément intégrable de $L^1$ les topologies de la convergence en mesure et en moyenne ne coïncident pas nécessairement si la mesure n'est pas bornée. (cf. Appendice II, exemple 6).

## 4. Généralisations diverses.

Soient $((X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i))_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurés, et $(f_i)_{i\in I}$ un élément de $\prod_{i\in I} L^1(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$.

On dit que la famille $(f_i)$ est uniformément intégrable, si

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{[|f_i|\geq a]} |f_i| \, d\mu = 0$$

uniformément en $i$.

On dit que la famille $(f_i)$ possède la propriété d'absolue continuité uniforme si

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall i \in I, \forall A \in \mathcal{B}_i, \quad \mu_i(A) \leq \eta \implies \int_A |f_i| \, d\mu_i \leq \varepsilon .$$

Si tous les espaces mesurés $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ sont identiques, on retrouve le cas étudié au § 1.

PROPOSITION 6. - Supposons qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que $\mu_i(X_i) \leq M$ pour tout $i \in I$. Alors, pour que la famille $(f_i)_{i\in I}$ soit uniformément intégrable, il faut et il suffit qu'elle possède la propriété d'absolue continuité uniforme, et que l'ensemble des $\int |f_i| \, d\mu_i$ $(i \in I)$ soit borné dans $R$.

La condition est nécessaire ; en effet, on peut écrire

$$\int_A |f_i|\, d\mu_i = \int_{A\cap[|f_i|<a]} |f_i|\, d\mu_i + \int_{A\cap[|f_i|\geq a]} |f_i|\, d\mu_i$$

$$\leq a\mu_i(A) + \int_{[|f_i|\geq a]} |f_i|\, d\mu_i \quad .$$

Elle est suffisante, car

$$a 1_{[|f_i|\geq a]} \leq |f_i| \quad .$$

Donc

$$\mu[|f_i| \geq a] \leq \frac{1}{a}\int |f_i|\, d\mu \quad .$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. - Soient $((X_i\ \mathcal{B}_i\ ,\ \mu_i))_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurés, et $(f_i)_{i\in I}$ un élément de $\prod_{i\in I} L^1(X_i\ ,\ \mathcal{B}_i\ ,\ \mu_i)$ .

Pour que la famille $(f_i)_{i\in I}$ soit uniformément intégrable, il faut et il suffit qu'il existe une application $\varphi$ borélienne de $R_+$ dans $R_+$ telle que $\lim_{a\to+\infty} \frac{\varphi(a)}{a} = +\infty$ , et

$$\sup_{i\in I} \int \varphi \circ |f_i|\, d\mu_i < +\infty \quad .$$

On peut alors choisir $\varphi$ croissante.

- La condition est suffisante, en effet soit $L > 0$ tel que

$$\int \varphi \circ |f_i|\, d\mu_i \leq L \quad \text{pour tout} \quad i \in I \quad .$$

$\varepsilon > 0$ étant donné, il existe $n$ tel que $a \geq n \implies \varphi(a) \geq \frac{a}{\varepsilon}$ donc

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{[|f_i|\geq a]} |f_i|\, d\mu_i \leq \int_{[|f_i|\geq a]} \varphi\circ |f_i|\, d\mu_i \leq L \quad \text{si} \quad a \geq n$$

c'est-à-dire

$$\int_{[|f_i|\geq a]} |f_i|\, d\mu_i \leq \varepsilon L \quad \text{pour} \quad a \geq n \quad .$$

- <u>La condition est nécessaire</u>, en effet pour tout $a \in R_+$, soit

$$\Psi(a) = \sup_{i\in I} \int_{[|f_i|\geq a]} |f_i| \, d\mu_i$$

$\Psi$ est une fonction décroissante de $a$, et $\lim_{a\to\infty} \Psi(a) = 0$ d'après l'hypothèse d'uniforme intégrabilité.

Si $\exists\ a_0$, $\Psi(a_0) = 0$, il n'y a qu'à prendre $\varphi(n) = 0$ pour $n \leq a_0$ et $\varphi(n) = +\infty$ pour $n > a_0$.

Supposons $+\infty > \Psi(a) > 0$ pour tout $a$, et soit $\varphi(n) = \frac{x}{\Psi(n)}$ pour tout $n \in R_+$.

On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = +\infty \quad .$$

$$\int \varphi \circ |f_i| \, d\mu_i = \int \frac{|f_i(\omega)|}{\Psi(|f_i(\omega)|)} \, d\mu_i(\omega) \leq \frac{1}{\Psi(0)} \int |f_i| \, d\mu_i$$

puisque $\Psi$ est décroissante, d'où

$$\int \varphi \circ |f_i| \, d\mu_i \leq 1 \quad ,$$

puisque

$$\int |f_i| \, d\mu_i \leq \int_{[|f_i|\geq 0]} |f_i| \, d\mu_i \leq \Psi(0) \quad .$$

Enfin, si $\Psi(0) = +\infty$, il n'y a qu'à prendre $\varphi(n) = 0$ pour $n < \alpha$, et $\varphi(n) = \frac{x}{\Psi(n)}$ pour $n \geq \alpha$, où $\alpha \in R_+$ est tel que $+\infty > \Psi(\alpha) > 0$.

<u>Remarque</u>. - Soit $\nu_i$ la mesure $\geq 0$ sur l'espace mesurable $(R_+, \mathcal{B}_{R_+})$ image de $\mu_i$ par $|f_i|$ [ $\nu_i$ est une mesure de Radon si $\mu_i$ est une mesure bornée].

On a

$$\int \varphi \circ |f_i| \, d\mu_i = \int \varphi \, d\nu_i \quad .$$

Appendice I. - Quelques résultats sur les topologies faibles dans les espaces de Banach.

LEMME 1. - Soit $B$ un espace normé. Tout sous-ensemble de $B$ faiblement borné est fortement borné.

En effet, l'application qui, à tout $n \in B$, associe la forme linéaire $x' \to \langle n , x' \rangle$ sur $B'$ est une isométrie de $B$ dans $B''$ qui permet de considérer $B$ comme un sous-espace de $B''$ (muni de la topologie forte). Si $H \subset B''$ est faiblement borné, $H$ est équi-continu, puisque $B'$ est un espace de Banach, d'où le résultat, puisque toute partie équicontinue de $B''$ est fortement bornée.

LEMME 2. - Soient $B$ un espace de Banach et $U$ la boule-unité de $B$. Supposons que le sous-ensemble $H$ de $B$ soit tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $H_\varepsilon$ de $B$ faiblement relativement compact, tel que $H \subset H_\varepsilon + \varepsilon U$ ; alors $H$ est faiblement relativement compact.

Considérons, comme précédemment, $B$ comme un sous-espace de $B''$, et, pour tout $A \subset B''$, soit $\overline{A}$ l'adhérence faible de $A$ dans $B''$. Puisque $H$ est fortement borné dans $B$ (lemme 1), il suffit, de montrer que $\overline{H} \subset B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{H}_\varepsilon \subset B$, puisque $H_\varepsilon$ est faiblement relativement compact dans $B$. Par ailleurs $\overline{H}_\varepsilon + \varepsilon\overline{U}$ est faiblement fermé dans $B''$, puisque $\overline{H}_\varepsilon$ est compact, et $\varepsilon\overline{U}$ est fermé ; donc $\overline{H} \subset \overline{H}_\varepsilon + \varepsilon\overline{U} \subset B + \varepsilon\overline{U}$.

Par ailleurs, $\overline{U} \subset U''$, où $U''$ est la boule-unité de $B''$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{H} \subset B + \varepsilon U''$.

Il en résulte que $\overline{H}$ est contenu dans l'adhérence de $B$ dans $B''$ pour la topologie forte. D'où $\overline{H} \subset B$, puisque $B$ étant complet est fermé (fortement) dans $B''$.

LEMME 3 [théorème de Šmulian (7)]. - Soit $B$ un espace vectoriel normé (8) ; de toute suite faiblement relativement compacte de $B$, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Soit $U'$ la boule-unité de $B'$. $U'$ est compacte pour la topologie $\sigma(B' , B)$, et $B' = \bigcup_n nU'$.

---

(7) cf. [2], p. 376.

(8) ou, plus généralement, un espace vectoriel topologique métrisable.

Le lemme 3 résultera alors du lemme 4 ci-dessous.

LEMME 4. - <u>Soient $F$ un espace métrique, $E$ un espace topologique qui est réunion dénombrable de sous-espaces compacts, et $(f_n)$ une suite d'applications continues de $E$ dans $F$ relativement compacte dans $C(E, F)$ pour la topologie de la convergence simple. Alors il existe une suite extraite qui converge simplement.</u>

α. Supposons d'abord que $E$ est un espace compact métrisable ; soit $D$ une partie dénombrable de $E$ dense dans $E$, et $A$ l'adhérence de l'ensemble des $f_n$ dans $C(E, F)$ munis de la topologie de la convergence simple.

Sur $A$, la topologie de la convergence simple dans $E$ est identique à celle de la convergence simple dans $D$. Or, cette dernière est métrisable, puisque $D$ est dénombrable et $F$ métrisable. D'où le résultat dans ce cas.

β. Supposons seulement que $E$ soit compact.

Considérons la relation d'équivalence $R$ sur $E$ définie par $xRy \iff \forall\ n$, $f_n(x) = f_n(y)$, et soit $\varphi$ l'application canonique de $E$ sur $\hat{E} = E/R$. Pour tout $n$, il existe une application continue $\hat{f}_n$ et une seule de $\hat{E}$ dans $F$ telle que $f_n = \hat{f}_n \circ \varphi$. Les $\hat{f}_n$ séparent les points de $\hat{E}$, il en résulte que la topologie $\mathcal{T}$ sur $\hat{E}$ la moins fine rendant continues les $\hat{f}_n$ est séparée. Comme cette topologie $\mathcal{T}$ est moins finie que celle de $E/R$, il en résulte d'abord que cette dernière est séparée, et, ensuite, puisque $E$ est compact, qu'elle est compacte, donc identique à $\mathcal{T}$. Puisque l'ensemble $\hat{A}$ des $\hat{f}_n$ est dénombrable, et $F$ métrisable, on en déduit que $\hat{E}$ est un espace métrique compact.

Soit $B$ l'adhérence de l'ensemble $A$ des $f_n$ dans $C_S(E, F)$. On a $xRy$ et $f \in B \implies f(x) = f(y)$, par passage à la limite ; donc $xRy \iff f(x) = f(y)$ pour tout $f \in B$. On en déduit que, pour tout $f \in B$, il existe une application continue $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans $F$ telle que $\hat{f} \circ \varphi = f$. Soit $\hat{B}$ l'ensemble des $\hat{f}$ où $f \in B$. Considérons alors l'application $\theta$ qui, à tout $u \in C(\hat{E}, F)$, associe la fonction $u \circ \varphi$ de $C(E, F)$. Sa restriction à $\hat{B}$ est biunivoque, d'une part ; et, d'autre part, pour qu'un filtre $(u_i)$ converge dans $C_S(\hat{E}, F)$, il faut et il suffit que la base de filtre des $(u_i \circ \varphi)$ converge dans $C_S(E, F)$. On en déduit que la restriction de $\theta$ à $\hat{B}$ est un homéomorphisme de $\hat{B}$ sur $B$ pour les topologies induites par $C_S(\hat{E}, F)$ et $C_S(E, F)$ respectivement. Comme $B$ est compacte, il en est de même de $\hat{B}$. On conclut alors en utilisant (α) et le fait que $\hat{E}$ est métrisable.

$\gamma$. Envisageons, enfin, le cas où $E$ est réunion dénombrable de compacts. [ $\sigma$-compact, comme disent les Russes.] Soit $(K_p)$ une suite croissante de compacts telle que $E = \bigcup_p K_p$. Il résulte de $(\beta)$ qu'on peut extraire de la suite $(f_n)$ une sous-suite $(f_{n_{1,K}})$ qui converge en tout point de $K_1$, de celle-ci une sous-suite $(f_{n_{2,K}})$ qui converge en tout point de $K_2$, etc. Le procédé diagonal donne alors une suite extraite de $(f_n)$ qui converge en tout point de $E = \bigcup_p K_p$.

C. Q. F. D.

Appendice II. - Quelques contre-exemples.

EXEMPLE 1. - $X$ espace localement compact, non compact ; $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ tribu borélienne de $X$, et $\mu$ mesure de Radon $\geqslant 0$ non bornée sur $X$. Si $H = \{1_K \mid K \text{ compact de } X\}$, $H$ est borné dans $L^\infty$, donc uniformément intégrable, et cependant, $H$ n'est pas borné dans $L^1$.

EXEMPLE 2. - $X$ ensemble quelconque, $\neq \emptyset$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \varepsilon_b$ où $b \in X$, et, pour tout $n$, $f_n = n 1_{\{b\}}$.

Si $H$ est l'ensemble des $f_n$, $H$ vérifie $\mathcal{UC}(H)$, car :

$$\mu(A) < \frac{1}{2} \implies b \notin A \implies \mu(A) = 0 \implies \int_A |f| \, d\mu = 0$$

pour tout $f \in H$. Mais si $n \geqslant a$,

$$[|f_n| \geqslant a] = \{b\}$$

donc

$$\int_{[|f_n| \geqslant a]} |f_n| \, d\mu = n \qquad ;$$

ce qui montre que $H$ n'est pas uniformément intégrable.

EXEMPLE 3. - Reprenons l'exemple 2, en prenant pour $X$ un espace compact, et $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $X$. $H$ vérifie la condition : $\forall\, \varepsilon$, $\exists\, K$ compact tel que $\int_{\complement K} |f| \, d\mu < \varepsilon$ pour tout $f \in H$ [prendre $K = X$ !].

Cependant $H$ n'est pas borné dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, donc $H$ n'est pas relativement compact faiblement.

Ainsi $H$ vérifie les conditions (a) et (b) du théorème 1 de GROTHENDIECK ([2], p. 400), sans être faiblement relativement compact.

Pour rendre l'énoncé de ce théorème correct, il suffit d'ajouter la condition " $H$ borné dans $L^1$ ".

EXEMPLE 4. - $X = R$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R$ tribu borélienne de $R$, $\mu$ mesure de Lebesgue ;

$$f_n = 1_{[n,n+1]} \qquad H = \{f_n \mid n \in N\} \qquad .$$

$H$ est borné dans $L^\infty$, donc uniformément intégrable.

Cependant pour tout compact $K$, il existe $n$ tel que

$$\int_{CK} |f_n| \, d\mu = 1 \qquad ,$$

donc $H$ vérifie (B) et non (A).

EXEMPLE 5. - Reprendre l'exemple 2 ou l'exemple 3. $H$ vérifie évidemment (A), mais $H$ n'est pas uniformément intégrable.

EXEMPLE 6. - $X = R$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R$, $\mu$ mesure de Lebesgue. La topologie faible sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ n'est pas moins fine que la topologie de la convergence en mesure.

En effet, soit

$$f_n = \frac{1}{n} 1_{[0, n]} \qquad .$$

$(f_n)$ tend vers zéro en mesure, mais $\int f_n 1 \, d\mu = 1$ pour tout $n$, donc $(f_n)$ ne tend pas vers zéro faiblement, et ceci, bien que l'ensemble des $(f_n)$ soit uniformément intégrable et borné dans $L^1$.

EXEMPLE 7. - $\mu$ mesure bornée sur $(X, \mathcal{B})$ et $(A_K)$ suite d'ensembles de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints tels que $\mu(A_K) = 1/2^K$ pour tout $K$. Si on pose $f_K = 2^K 1_{A_K}$ pour tout $K$, et $H = \{f_K \mid K \in N\}$, $H$ est borné dans $L^1$ et ne satisfait pas $\mathcal{UC}(H)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (Jean). - Sur les espaces de Köthe, J. Anal., Jérusalem, t. 1, 1951, p. 81-115.

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Espaces vectoriels topologiques, 2e édition. - São Paulo, Sociedade de Matemática, 1958.

[3] NEVEU (Jacques). - Bases mathématiques du calcul des probabilités (Cours de 3e cycle. 1961/62).