Claude Chevalley

Les classes d’équivalence rationnelle, II

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. nº 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A3_0>

5 mai 1958

LES CLASSES D'ÉQUIVALENCE RATIONNELLE, II.

par Claude CHEVALLEY

1. Grassmaniennes.

Soit P un espace projectif de dimension $N > 0$. Pour $0 \leq n \leq N$, nous désignerons par G_n l'ensemble des variétés linéaires de dimension n de P. On définit sur G_n une structure de variété comme suit. L'espace P étant supposé être l'espace des sous-espaces de dimension 1 d'un vectoriel V de dimension $N+1$, G_n peut s'identifier à l'ensemble dessous-espaces de dimension $n+1$ de V. Soit W la puissance extérieure $(n+1)$-ième de V ; il y a correspondance biunivoque entre G_n et l'ensemble des sous-espaces de dimension 1 de W qui sont engendrés par des éléments décomposables. Or l'ensemble des éléments décomposables de W est fermé. C'est évident si $n = N$. Si $n < N$, soit W' la puissance extérieure $(n+2)$-ième de V ; pour qu'un élément w de W soit décomposable, il faut et suffit que le rang de l'application linéaire $y \longrightarrow y \wedge w$ de V dans W' soit $\leq N - n$; or les éléments de la matrice qui représente cette application par rapport à des bases fixes de V et W' sont des fonctions linéaires de w ; il en résulte bien que l'ensemble des éléments décomposables est fermé. Si Q est l'espace projectif associé à W, G_n s'identifie à une partie fermée de Q. L'ensemble G_n est de plus irréductible, car les opérations du groupe projectif de l'espace P fournissent un groupe d'automorphismes de Q qui permute transitivement entre eux les points de G_n.

Donnons-nous une base $(e_1, \dots, e_{N+1})$ de V, et soit A le sous-espace engendré par $e_{n+2}, \dots, e_{N+1}$; A définit une variété linéaire de dimension $N - n - 1$ dans P, soit A'. Si X est un sous-espace de dimension $n+1$ de W tel que $X \cap A = \{0\}$, X admet une base $(x_1, \dots, x_{n+1})$ et une seule telle que $x_i \equiv e_i \pmod A$ $(1 \leq i \leq n+1)$. Réciproquement, si on a $n+1$ éléments $x_i \in V$ tels que $x_i \equiv e_i \pmod A$, $Kx_1 + \dots + Kx_{n+1}$ est un espace de dimension $n+1$ qui n'a que 0 en commun avec A ; si nous désignons la variété linéaire correspondante de P par $L(x_1, \dots, x_{n+1})$, il est clair que l'application $(y_1, \dots, y_{n+1}) \longrightarrow L(e_1 + y_1, \dots, e_{n+1} + y_{n+1})$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel A^{n+1} sur un morceau affine de G_n qui se compose des variétés linéaires de dimension n de P qui ne rencontrent pas A'. Il en résulte en particulier que G_n est une variété spéciale.

Nous désignerons par J_n l'ensemble des couples $(L, x) \in G_n \times P$ tels que $x \in L$. Cet ensemble est fermé, comme il résulte tout de suite du fait que l'ensemble des $(w, y) \in W \times V$ tels que $w \wedge y = 0$ est fermé. Nous désignerons par p_n et q_n les restrictions à J_n des projections de $G_n \times P$ sur son premier et son second facteur. On va montrer que J_n est irréductible et que p_n est un morphisme fibrant. Utilisons les mêmes notations que ci-dessus et désignons par G_n^A l'ensemble des éléments $L \in G_n$ qui ne rencontrent pas A'. Soit $P(K^{n+1})$ l'espace projectif associé à K^{n+1}. Soit t l'application qui fait correspondre à tout couple formé d'un point $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in A^{n+1}$ et d'un point $z \in P(K^{n+1})$ de coordonnées homogènes $(c_1, \dots, c_{n+1})$ le couple formé de l'élément $L(e_1 + y_1, \dots, e_{n+1} + y_{n+1})$ de G_n^A et de l'élément $K(c_1(e_1 + y_1) + \dots + c_{n+1}(e_{n+1} + y_{n+1}))$ de $L(e_1 + y_1, \dots, e_{n+1} + y_{n+1})$. Il est clair que t est une bijection de $A^{n+1} \times P(K^{n+1})$ sur $\overset{-1}{p_n}(G_n^A)$, et est un isomorphisme de la variété $A^{n+1} \times P(K^{n+1})$ sur une sous-variété de $G_n \times P$. On en conclut que $\overset{-1}{p_n}(G_n^A)$ est une variété, et qu'il y a un isomorphisme t' de $G_n^A \times P(K^{n+1})$ sur $\overset{-1}{p_n}(G_n^A)$ tel que $p_n(t'(L, z)) = L$ pour tout $L \in G_n^A$ et tout $z \in P(K^{n+1})$; nos assertions résultent immédiatement de là.

Soit Ω le complémentaire de J_n par rapport à $G_n \times P$; c'est l'ensemble des couples (L, x) tels que $x \notin L$. A chaque point (L, x) de Ω on peut faire correspondre la variété linéaire $f(L, x)$ de P, de dimension $n + 1$, engendrée par L et x. L'application f ainsi définie est un morphisme de Ω dans G_{n+1}, comme il résulte tout de suite du fait que $(w, y) \to w \wedge y$ est un morphisme de $W \times V$ dans la puissance extérieure $(n + 2)$-ième W' de V. En particulier, pour un L fixe, l'application $x \to f_L(x)$ qui fait correspondre à tout $x \in P - L$ la variété linéaire engendrée par L et x est un morphisme de $P - L$ dans G_{n+1}. De plus, G_{n+1} étant plongé dans l'espace projectif Q' associé à W', f_L est une application projective de $P - L$ dans l'espace Q', comme il résulte du fait que, pour w fixe, $y \to w \wedge y$ est une application linéaire de V dans W'.

Nous utiliserons aussi le fait bien connu que, si U est une sous-variété fermée de dimension $n < N$ de P, l'ensemble des variétés linéaires de dimension $N - n - 1$ qui rencontrent pas U est ouvert et non vide dans G_{N-n-1}.

2. Définition d'une opération sur les cycles.

Nous désignerons dans ce qui suit par P un espace projectif de dimension N et par U une sous-variété fermée de dimension $n < N$ de P, Si L est une variété linéaire de dimension $N - n - 1$ de P qui ne rencontre pas U, nous désignerons par f_L le morphisme de $P - L$ dans G_{N-n} qui fait correspondre à tout $x \in P - L$ la variété linéaire engendrée par x et L.

Soit A une sous-variété fermée de dimension a de U. Le cône projetant de A d'arête L est par définition la réunion des $f_L(x)$ pour $x \in A$; nous le désignerons par $\Theta_L(A)$. Montrons que c'est une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de P. Utilisant les notations introduites au n° 1, il est clair que l'on a $\Theta_L(A) = q_{N-n}(\overset{-1}{p}_{N-n}(f_L(A)))$. Puisque $L \cap U = \emptyset$, $f_L(x)$ n'a, pour tout $x \in U$, qu'un nombre fini de points communs avec U, de sorte que $\overset{-1}{f}_L(f_L(x))$ est fini ; il en résulte que $f_L(A)$ est une sous-variété fermée de dimension a de G_{N-n}. Comme p_{N-n} est une application fibrante, $\overset{-1}{p}_{N-n}(f_L(A))$ est une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de J_{N-n}. Montrons que la restriction de q_{N-n} à cette variété est un morphisme birationnel de $\overset{-1}{p}_{N-n}(f_L(A))$ sur $\Theta_L(A)$. Comme q_{N-n} est un morphisme propre, $\Theta_L(A)$ est une sous-variété fermée de P, manifestement $\neq L$. Il est clair que, si $(M, y) \in \overset{-1}{p}_{N-n}(f_L(A))$, $y \notin L$, on a $f_L(y) = M$ puisque $L \subset M$. Il en résulte que q_{N-n} induit une application bijective de $\overset{-1}{p}_{N-n}(f_L(A)) \cap (G_{N-n} \times (P - L))$ sur $\Theta_L(A) \cap (P - L)$, et que l'application réciproque de cette bijection est la restriction à $\Theta_L(A) \times (P - L)$ du morphisme $y \rightarrow (f_L(y), y)$ de $P - L$ dans J_{N-n}, ce qui établit notre assertion. L'ensemble $\Theta_L(A)$ est donc bien une sous-variété fermée de dimension $N - n + a$ de P.

Toute composante irréductible A' de $\Theta_L(A) \cap U$ est de dimension $\geq (N - n + a) + n - N = a$; par ailleurs, il est clair que le cône projetant $\Theta_L(A')$, de dimension $N - n + \dim A'$, est contenu dans $\Theta_L(A)$, d'où $\dim A' \leq a$, $\dim A' = a$. On déduit de là que l'intersection $\Theta_L(A).U$ est définie. Il est clair que A intervient avec un coefficient > 0 dans cette intersection.

Il résulte de ce que nous avons dit que, pour tout cycle X porté par U, $q_{N-n;}\ (\overset{-1}{p}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(X))).U$ est défini ; nous poserons

$$\rho_L(X) = q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\overset{-1}{p}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(X))).U - X .$$

L'opération ρ_L est un endomorphisme du groupe des cycles portés par U, qui transforme tout cycle en un cycle de la même dimension. Si $X = A$, où A est une sous-variété fermée de U, on a $f_{L;\mathfrak{Z}}(A) = d_L(A)A$, où $d_L(A)$ est un entier > 0 égal au degré du morphisme de A sur $f_L(A)$ induit par f_L ; soit par ailleurs $e_L(A)$ la multiplicité avec laquelle A intervient dans $\Theta_L(A).U$. Comme p_{N-n} est un morphisme fibrant, on a $p^{-1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_L(A)) = \bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))$; comme la restriction de q_{N-n} à $\bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))$ est un morphisme birationnel de cette variété sur $\Theta_L(A)$, on a $q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{-1}_{N-n}(f_L(A))) = \Theta_L(A)$. On en conclut que le coefficient de A dans $\Theta_L(A)$ est $d_L(A)\, e_L(A) - 1$. En particulier, ρ_L transforme tout cycle $\geqslant 0$ en un cycle $\geqslant 0$.

Soit $\mathfrak{X}$ une famille algébrique de cycles tous portés par U, paramétrée par une variété T. Soit par ailleurs G^U_{N-n-1} l'ensemble des $L \in G_{N-n-1}$ qui ne rencontrent pas U ; c'est une sous-variété ouverte de G_{N-n-1}. La famille $(t, L) \longrightarrow \rho_L(\mathfrak{X}(t))$ est alors une famille algébrique paramétrée par $T \times G^U_{N-n-1}$. Tenant compte des résultats de l'exposé précédent, et représentant $\mathfrak{X}$ comme différence de deux familles algébriques positives, on voit qu'il suffit de montrer que $(t, L) \longrightarrow f_{L;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique de cycles de G_{N-n}. L'ensemble M des $(x, L) \in P \times G_{N-n-1}$ tels que $x \notin L$ est une sous-variété ouverte de $P \times G_{N-n-1}$, et l'application $\tilde{f} : (x, L) \longrightarrow f_L(x)$ est un mprphisme de M dans G_{N-n}. Il est clair que l'on a, si $t \in T$, $L \in G^U_{N-n-1}$,

$$F_{L;\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t)) = f_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t) \times \{L\}) .$$

Or, $(t, L) \longrightarrow \mathfrak{X}(t) \times \{L\}$ est une famille algébrique de cycles de M paramétrée par $T \times G^U_{N-n-1}$. Soit Z une composante irréductible du support de son cycle de définition ; elle est contenue dans la sous-variété N de $M \times T \times G^U_{N-n-1}$ composée des (x, L, t, L) tels que $x \in U$, $L \in G^U_{N-n-1}$. Comme U est une variété complète, on voit tout de suite que la restriction à N de l'application $(z, t, L) \longrightarrow (\tilde{f}(z), t, L)$ $(z \in M)$ est un morphisme propre de N dans $G_{N-n} \times T \times G^U_{N-n-1}$. Tenant compte de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5 de l'exposé précédent, on voit que $(t, L) \longrightarrow f_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{X}(t) \times \{L\})$ est une famille algébrique de cycles de G_{N-n}, ce qui démontre notre assertion.

Nous désignerons dans ce qui suit par $C(L)$ le contour apparent de U relativement à L ; c'est l'ensemble des points $x \in U$ tels que la variété linéaire tangente à U en x rencontre L. Cet ensemble contient tous les points singuliers de U, puisque, si x est un point singulier, la variété linéaire tangente à U en x est de dimension $> n$. Soit U_1 l'ensemble des points simples de U ; l'application qui fait correspondre à tout $x \in U_1$ la variété linéaire tangente à U en x est un morphisme de U_1 dans G_n. Par ailleurs, l'ensemble des $(M, L) \in G_n \times G_{N-n-1}$ tels que $M \cap L \neq \emptyset$ est fermé ; il en résulte que l'ensemble des $(x, L) \in U_1 \times G_{N-n-1}$ tels que $x \in C(L)$ est relativement fermé dans $U_1 \times G_{N-n-1}$, et par suite que l'ensemble des $(x, L) \in U \times G_{N-n-1}$ tels que $x \in C(L)$ est fermé.

LEMME 1. - Soit X un cycle porté par U, et soit x_o un point de $\operatorname{Supp} \rho_L(X)$ (où $L \in G^U_{N-n-1}$) ; ou bien $f_L(x_o) \cap \operatorname{Supp} X$ contient un point $\neq x_o$ ou bien $x_o \in C(L) \cap \operatorname{Supp} X$.

Désignons par E_o l'ensemble des couples $(x, x') \in U \times U$ tels que $x' \neq x$ et que la droite joignant x à x' rencontre L, i.e. que $x' \in f_L(x)$. Soit E l'adhérence de E_o ; comme f_L induit un morphisme de U dans G_{N-n}, on a $x' \in f_L(x)$ pour tout $(x, x') \in E$. Montrons que, si $x_1 \in U$ est tel que $(x_1, x_1) \in E$, on a $x_1 \in C(L)$. Le point (x_1, x_1) appartient à une composante irréductible E' de E ; comme E est l'adhérence de E_o, E' est l'adhérence d'une composante irréductible E'_o de E'. L'application $(x, x') \to f_L(x).U - x - x'$ est une famille algébrique de cycles de dimension 0 paramétrée par E' (proposition 4 de l'exposé précédent) ; de plus, on a $f_L(x).U - x - x' \geq 0$ pour tout $(x, x') \in E'_o$; il en résulte que cette relation est encore vraie pour tout $(x, x') \in E'$ (corollaire 2 à la proposition 1 de l'exposé précédent), donc que $f_L(x_1).U - 2x_1 \geq 0$. Tenant compte du critère de multiplicité 1, cela signifie que ou bien x_1 est singulier sur U (d'où $x_1 \in C(L)$) ou bien x_1 est simple sur U et $f_L(x_1)$ a une intersection de dimension ≥ 0 avec la variété linéaire tangente à U en x_1, ce qui implique que cette dernière rencontre L.

L'ensemble $E \cap (\operatorname{Supp} X \times U)$ est une partie fermée de E ; soit H son image par la projection de $U \times U$ sur son second facteur. Il est clair que H contient tout point $x \in U$ tel que $f_L(x) \cap \operatorname{Supp} X$ contienne un point $\neq x$, et que, si $x \in H$, ou bien $f_L(x) \cap \operatorname{Supp} X$ contient un point $\neq x$ ou bien $x \in C(L)$.

Ceci étant, il suffira évidemment de démontrer le lemme 1 dans le cas où X est une sous-variété fermée A de U. Le lemme 1 est vrai si $x_o \in H$; supposons donc que x_o n'appartienne pas à H. Soit A' une composante irréductible de $\mathrm{Supp}\ r_L(A)$ passant par x_o ; l'ensemble $A' - A' \cap H$ est relativement ouvert dans A' (car H est fermé) ; si x appartient à cet ensemble, $f_L(x)$ rencontre $\mathrm{Supp}\ X = A$ (puisque $x \in \mathrm{Supp}\ r_L(A) \subset \Theta_L(A)$) mais n'a aucun point $\neq x$ en commun avec A (puisque $x \notin H$) ; il en résulte que $f_L(x) \cap A = \{x\}$. On a donc $A' - A' \cap H \subseteq A$, d'où $A' = A$ (puisque $\dim A' = \dim A$). On en conclut que A intervient avec un coefficient > 0 dans $r_L(A)$, donc que l'un au moins des nombres $d_L(A)$, $e_L(A)$ (cf. ci-dessus) est > 1.

Supposons d'abord que $d_L(A) > 1$. Ce nombre est le degré du morphisme de A sur $f_L(A)$ induit par f_L ; soit f_L^A ce morphisme. Pour tous les points $x \in A - A \cap H$, l'image réciproque de $f_L(x)$ par f_L^A se compose du seul point x, puisque $f_L(x) \cap A = \{x\}$; le morphisme f_L^A ne peut donc être de degré > 1 que s'il est radiciel. Dans ce cas, si x est un point simple de A, l'application dérivée $D_x f_L^A$ de f_L^A en x a un noyau $\neq \{0\}$, ce qui signifie que le noyau $D_x f_L$ de l'application dérivée de f_L en x a des éléments $\neq 0$ en commun avec l'espace vectoriel tangent à A en x. Or, la variété G_{N-n} étant plongée dans un espace projectif Q au moyen des coordonnées plückeriennes, f_L est une application projective de $P - L$ dans Q ; il en résulte immédiatement que le noyau de $D_x f_L$ n'est autre que l'espace tangent à $f_L(x)$ en x. Comme ce noyau a des éléments $\neq 0$ en commun avec l'espace tangent à A en x, donc a fortiori avec l'espace tangent à U en x, on voit que la variété linéaire tangente à U en x a une intersection de dimension > 0 avec $f_L(x)$, donc rencontre L. Comme tous les points simples de A sont dans $C(L)$, on a $A \subset C(L)$, $x_o \in C(L)$.

Supposons maintenant que $e_L(A) > 1$. L'ensemble A_1 des points $x \in A$ qui sont simples sur la variété $\Theta_L(A)$ est relativement ouvert dans A. Montrons qu'il n'est pas vide. Soit y un point simple de $\Theta_L(A)$ n'appartenant pas à L ; comme $y \in \Theta_L(A)$, il y a un point $x \in A$ et un point $z \in L$ tel que x, y, z soient alignés. Comme $\Theta_L(A)$ est un cône de sommet z, x est simple sur $\Theta_L(A)$. Ceci étant, soit $x \in A_1$; supposons que x soit simple sur U. Il résulte du critère de multiplicité 1 et du fait que $e_L(A) > 1$ que la variété linéaire T_U tangente à U en x a une intersection de dimension $> \dim A$ avec la variété linéaire $T_{\Theta_L(A)}$ tangente à $\Theta_L(A)$ en x. Cette dernière est de dimension $\dim A + N - n$ et contient L ; il en résulte que

$T_U \cap L \neq \emptyset$; on a donc $A_1 \subset C(L)$, d'où $A \subset C(L)$, ce qui achève la démonstration du lemme 1 .

Nous supposerons données dans ce qui suit un certain nombre de sous-variétés $B_1 , \ldots , B_m$ (non nécessairement fermées) de U qui ne rencontrent pas l'ensemble des points singuliers de U , ainsi que des nombres $\beta_1 \geq 0 , \ldots , \beta_m \geq 0$; nous poserons $b_i = \dim B_i$. Si A est une sous-variété de U , nous noterons $e(A)$ le plus grand des nombres $\dim A \cap B_i - (\dim A + b_i - n) - \beta_i$ pour tous les i tels que $A \cap B_i \neq \emptyset$ (si tous les $A \cap B_i$ sont vides, nous posons $e(A) = 0$).

Si X est un cycle porté par U , nous désignerons par $e(X)$ le plus grand des nombres $e(A)$ pour toutes les variétés A qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans X . Soit $\mathfrak{X}$ une famille algébrique de cycles portés par U , paramétrée par une variété T ; montrons qu'il existe un nombre e et un seul tel que $e(\mathfrak{X}(t)) = e$ pour tous les points d'une partie ouverte non vide de T . L'unicité de e est évidente. Posons $\mathfrak{X} = \sum_i c_i \mathfrak{X}_i$, les $\mathfrak{X}_i$ étant des familles irréductibles et les c_i des entiers $\neq 0$; il résulte de la proposition 1 de l'exposé précédent qu'il y a une partie ouverte non vide T_1 de T telle que, pour $t \in T_1$, les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans $\mathfrak{X}(t)$ soient exactement toutes celles qui interviennent avec un coefficient $\neq 0$ dans l'un au moins de $\mathfrak{X}_i(t)$, de sorte que $e(\mathfrak{X}(t)) = \sup e(\mathfrak{X}_i(t))$. Ceci montre qu'on peut se ramener au cas où $\mathfrak{X}$ est irréductible, donc définie par une sous-variété fermée Z de $U \times T$. Les composantes irréductibles de $Z \cap (B_i \times T)$ sont des sous-variétés C_{ij} de $U \times T$. Soit h_{ij} la restriction à C_{ij} de la projection $U \times T \to T$. Pour tout i , on a

$$(\mathfrak{X}(t) \cap B_i) \times t = \bigcup_j \overset{-1}{h}_{ij}(t) \quad ;$$

il en résulte que, si a est la dimension commune des cycles $\mathfrak{X}(t)$, $e(\mathfrak{X}(t))$ est le plus grand des nombres $\dim \overset{-1}{h}_{ij}(t) - (a + b_i - n) - \beta_i$ pour ceux des $\overset{-1}{h}_{ij}(t)$ qui ne sont pas vides (0 si tous ces ensembles sont vides). Or, pour tout couple (i , j) , il y a une partie ouverte T_{ij} de T telle que ou bien $\overset{-1}{h}_{ij}(t) = \emptyset$ pour tous les $t \in T_{ij}$ ou bien, pour tous les $t \in T_{ij}$, $\overset{-1}{h}_{ij}(t)$ soit non vide et de dimension indépendante de t . L'intersection des T_{ij} est alors une partie ouverte non vide de T possèdant la propriété requise.

Nous noterons $e(\mathfrak{F})$ le nombre e dont nous venons d'établir l'existence et l'unicité ; nous l'appellerons l'excès de la famille $\mathfrak{F}$.

LEMME 2. - Soit X un cycle porté par U ; l'excès de la famille $L \to \rho_L(X)$, paramétrée par G^U_{N-n-1} , est $\leq \max(e(X) - 1 , 0)$.

L'excès d'une combinaison linéaire de familles algébriques est évidemment au plus égal au plus grand des excès de ces familles ; par ailleurs, il y a un sous-variété fermée A de U qui intervient dans X avec un coefficient $\neq 0$ telle que $e(A) = e(X)$ (si $X \neq 0$) ; on peut donc se borner au cas où $X = A$ est une sous-variété fermée de U . Nous désignerons par Ω_i l'ensemble des points $(x , y , L) \in A \times B_i \times G_{N-n-1}$ qui possèdent les propriétés suivantes : on a $x \neq y$ et L rencontre la droite qui joint x à y (i.e. $f_L(x) = f_L(y)$) . Pour toute droite δ , l'ensemble des $L \in G_{N-n-1}$ qui rencontrent δ est fermé et de dimension $\dim G_{N-n-1} - n$. Il en résulte que, si $\Omega_i \neq \emptyset$, cet ensemble est de dimension $\leq \dim A + b_i + \dim G_{N-n-1} - n$. Il existe donc une partie ouverte non vide C_i de G_{N-n-1} telle que, pour tout $L \in C_i$, l'ensemble des $(x , y) \in A \times B_i$ tels que $(x , y , L) \in \Omega_i$ soit vide ou de dimension $\dim A + b_i - n$; si $L \in C_i$, l'ensemble $B_i(L)$ des $y \in B_i$ tels que $f_L(y)$ rencontre A un point $\neq y$ est donc vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$. Or il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\operatorname{Supp} \rho_L(A) \cap B_i \subset B_i(L) \cup (A \cap B_i \cap C(L)) .$$

Choisissons un point dans chaque composante irréductible de $A \cap B_i$; soient $x_1 , \dots , x_s$ les points ainsi obtenus ; ils sont simples sur U . Il en résulte immédiatement qu'il y a une partie ouverte non vide C'_i de G^U_{N-n-1} telle que, pour $L \in C'_i$, aucun des points $x_1 , \dots , x_s$ n'appartienne à $C(L)$; si donc $L \in C'_i$, $A \cap B_i \cap C(L)$ est vide ou de dimension $< \dim (A \cap B_i)$. Si $L \in C_i \cap C'_i$, $(\operatorname{Supp} \rho_L(A)) \cap B_i$ est vide ou de dimension au plus égale au plus grand des nombres $\dim A + b_i - n$, $\dim(A \cap B_i) - 1$. Il en résulte que si L appartient à l'intersection des C_i , C'_i pour tous les i , on a

$$e(\rho_L(A)) \leq \max(e(A) - 1 , 0) .$$

Nous désignerons dans ce qui suit par Γ le groupe projectif de l'espace P , et par Σ l'ensemble des $(s , L) \in \Gamma \times G^U_{N-n-1}$ tels que $s(L)$ ne rencontre pas U ; c'est une sous-variété ouverte de $\Gamma \times G^U_{N-n-1}$. Montrons que, si

$(s, L) \in \Sigma$, et si A est une sous-variété fermée de U, l'intersection $s(\Theta_L(A)).U$ est définie. En effet, $s(\Theta_L(A))$ est un cône d'arête $s(L)$ et de dimension $N - n + \dim A$. Si A' est une sous-variété de U contenue dans $s(\Theta_L(A))$, $\Theta_{s(L)}(A')$ est,, comme on l'a vu, de dimension $\dim A' + N - n$ et est contenu dans $s(\Theta_L(A))$, d'où $\dim A' \leqslant \dim A$, ce qui démontre notre assertion. Pour tout cycle X porté par U et pour tout $(s, L) \in \Sigma$, nous poserons

$$\tau_{s,L}(X) = s_{\mathfrak{Z}}(q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{-1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(X)))).U .$$

Si $\mathfrak{X}$ est une famille algébrique de cycles portés par U, paramétrée par une variété T, $(s, L, t) \to \tau_{s,L}(\mathfrak{X}(t))$ est une famille algébrique paramétrée par $\Sigma \times T$. Pour le montrer, on peut évidemment se limiter au cas où $\mathfrak{X}$ est une famille $\geqslant 0$. Si $(s, L, t) \in \Sigma \times T$, posons

$$\mathfrak{Y}(s, L, t) = q_{N-n;\mathfrak{Z}}(\bar{p}^{-1}_{N-n;\mathfrak{Z}}(f_{L;\mathfrak{Z}}(t))) \quad ;$$

on sait déjà que $\mathfrak{Y}$ est une famille algébrique de cycles de P ; cette famille est positive, et $s_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}(s, L, t)).U$ est toujours défini. Il suffira donc de montrer que, si $\mathfrak{Y}$ est une famille algébrique de cycles de P paramétrée par une variété T', la famille $(s, t') \to s_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}(t'))$ est algébrique. Or, $(s, t') \to s \times \mathfrak{Y}(t')$ est évidemment une famille algébrique de cycles de $\Gamma \times P$. Comme $(s, x) \to (s, s(x))$ est un automorphisme de $\Gamma \times P$, la famille $(s, t') \to s \times s_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}(t'))$ est algébrique. Le support du graphe de cette famille est contenu dans l'ensemble des $(s, x, s', t') \in \Gamma \times P \times \Gamma \times T'$ tels que $s = s'$; il en résulte que la restriction à toute composante irréductible de ce support de l'application $(s, x, s', t') \to (X, s', t')$ est un isomorphisme de cette composante irréductible sur une sous-variété de $P \times \Gamma \times T'$; on en conclut alors en faisant usage de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5 de l'exposé précédent.

LEMME 3. - <u>Pour tout cycle</u> X <u>porté par</u> U, <u>l'excès de la famille</u> $(s, L) \to \tau_{s,L}(X)$, <u>paramétrée par</u> Σ, <u>est</u> $\leqslant 0$.

Si $L \in G^U_{N-n-1}$, soit Γ_L l'ensemble des $s \in \Gamma$ tels que $(s, L) \in \Sigma$.

Pour démontrer le lemme 3, on peut se limiter au cas où X est une sous-variété fermée A de U. Pour qu'un point $y \in B_i$ appartienne à $\tau_{s,L}(A)$, il faut et suffit qu'il existe un point $s \in \Theta_L(A)$ tel que $y = s(x)$. Soit Ω_i l'ensemble des points $(s, x, y) \in \Gamma \times \Theta_L(A) \times B_i$ tels que $s(x) = y$. Il est clair que cet ensemble est fermé de dimension $(\dim \Gamma - N) + \dim A + N - n + b_i$. Il en résulte qu'il y a une partie ouverte non vide $C_i(L)$ de Γ_L telle que, pour $s \in C_i(L)$, l'ensemble des $(x, y) \in \Theta_L(A) \times B_i$ tels que $(s, x, y) \in \Omega_i$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$. Soit $C(L)$ l'ensemble $\bigcap_i C_i(L)$; il est clair que, si $s \in C(L)$, $(\mathrm{Supp}\, \rho_{s,L}(A)) \cap B_i$ est vide ou de dimension $\leq \dim A + b_i - n$ pour tout i, d'où $e(\tau_{s,L}(A)) \leq 0$. L'ensemble des $(s, L) \in \Sigma$ tels que $e(\tau_{s,L}(A)) \leq 0$, contenant tous les $C(L) \times \{L\}$ pour $L \in G^U_{N-n-1}$, est évidemment dense dans Σ, ce qui démontre le lemme 3.

LEMME 4. - <u>Soit</u> $\mathfrak{X}$ <u>une famille algébrique de cycles portés par</u> U, <u>paramétrée par une variété</u> T. <u>Il existe alors une variété spéciale</u> R <u>et une famille algébrique</u> $\mathfrak{X}$ <u>de cycles portés par</u> U, <u>paramétrée par</u> $R \times T$, <u>qui possèdent les propriétés suivantes</u> : $\mathfrak{X}$ <u>est la différence de deux familles</u> $\mathfrak{Y}$ <u>et</u> $\mathfrak{Y}'$ <u>positives et algébriques telles que, pour tout</u> $t \in T$, <u>les excès de familles</u> $r \to \mathfrak{Y}(r, t)$, $r \to \mathfrak{Y}'(r, t)$ (<u>paramétrées par</u> R) <u>soient</u> ≤ 0 ; <u>pour tout</u> $t \in T$, <u>il existe deux familles algébriques positives</u> $\mathfrak{Z}^t$ <u>et</u> $\mathfrak{Z}'^t$ <u>d'excès</u> ≤ 0, <u>paramétrées par</u> R, <u>et un élément</u> r_t <u>de</u> R <u>tels que</u> $\mathfrak{Z}^t - \mathfrak{Z}'^t$ <u>soit la famille</u> $r \to \mathfrak{X}'(r, t)$, <u>que l'on ait</u> $\mathfrak{X}'(r_t, t) = \mathfrak{X}(t)$ <u>et</u>

$$\max(e(\mathfrak{Z}^t(r_t)), e(\mathfrak{Z}'^t(r_t))) \leq \max(e(\mathfrak{X}(t)), 0).$$

Soit A_h l'assertion qui se déduit de la précédente en remplaçant la condition que les excès des familles $r \to \mathfrak{Y}(r, t)$, $r \to \mathfrak{Y}'(r, t)$, $\mathfrak{Z}^t$, $\mathfrak{Z}'^t$ soient ≤ 0 par celle que ces excès soient $\leq n - h$. Comme on a $e(X) \leq n$ pour tout cycle X porté par U, A_o est vrai (on prend R composé d'un seul point r_o, $\mathfrak{X}'(r_o, t) = \mathfrak{X}(t)$ et pour $\mathfrak{Z}^t(r_o)$, $\mathfrak{Z}'^t(r_o)$ des cycles ≥ 0 dont la différence est $\mathfrak{X}(t)$ et tels que $\max(e(\mathfrak{Z}^t(r_o)), e(\mathfrak{Z}'^t(r_o))) = e(\mathfrak{X}(t)))$.
Supposons que A_h soit vrai ; soient R la variété, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ et (pour un certain $t \in T$) $\mathfrak{Z}^t$, $\mathfrak{Z}'^t$ les familles et r_t le point de R dont les existences sont affirmées par A_h. Posons $R' = \Sigma \times R$; comme Γ et G^U_{N-n-1} sont des variétés spéciales, il en est de même de Σ, donc de R'. Si $(s, L, r) \in R'$, nous posons

$$\mathfrak{Y}_1(s, L, r, t) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Y}(r, t)) + \rho_L(\mathfrak{Y}'(r, t))$$
$$\mathfrak{Y}_1'(s, L, r, t) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Y}'(r, t)) + \rho_L(\mathfrak{Y}(r, t))$$
$$\mathfrak{X}_1'(s, L, r, t) = \mathfrak{Y}_1(s, L, r, t) - \mathfrak{Y}_1'(s, L, r, t)$$
$$\mathfrak{Z}_1^t(s, L, r) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Z}^t(r)) + \rho_L(\mathfrak{Z}'^t(r))$$
$$\mathfrak{Z}_1'^t(s, L, r) = \tau_{s,L}(\mathfrak{Z}'^t(r)) + \rho_L(\mathfrak{Z}^t(r)).$$

Les familles $\mathcal{Y}_1$, $\mathcal{Y}'_1$, $\mathcal{Z}_1^t$, $\mathcal{Z}'^t_1$ sont algébriques et positives.

Pour tout $r \in R$, les excès des familles $(s, L) \to \tau_{s,L}(\mathcal{Z}^t(r))$, $(s,L) \to \tau_{s,L}(\mathcal{Z}'^t(r))$ sont ≤ 0 (lemme 3) ; ceux des familles $(s, L) \to \rho_L(\mathcal{Z}^t(r))$, $(s, L) \to \rho_L(\mathcal{Z}'^t(r))$ sont respectivement au plus égaux à $\max(e(\mathcal{Z}^t(r)) - 1, 0)$ et à $\max(e(\mathcal{Z}'^t(r)) - 1, 0)$ (lemme 2). Par ailleurs, il existe une partie ouverte non vide R_o de R telle que, pour $r \in R_o$, on ait

$$e(\mathcal{Z}^t(r)) = e(\mathcal{Z}^t) \leq \max(n - h, 0), \quad e(\mathcal{Z}'^t(r)) = e(\mathcal{Z}'^t) \leq \max(n - h, 0).$$

Si $r \in R_o$, il y a donc une partie ouverte $\Sigma(r)$ de Σ telle que, pour tout $(s, L) \in \Sigma(r)$, les nombres $e(\tau_{s,L}(\mathcal{Z}^t(r)))$, $e(\tau_{s,L}(\mathcal{Z}'^t(r)))$, $e(\rho_L(\mathcal{Z}^t(r)))$, $e(\rho_L(\mathcal{Z}'^t(r)))$ soient tous $\leq \max(n - h - 1, 0)$, ce qui entraîne que $e(\mathcal{Z}_1(s, L, r))$ et $e(\mathcal{Z}'_1(s, L, r))$ sont $\leq \max(n - h - 1, 0)$. La réunion des $\Sigma(r) \times \{r\}$ pour tous les $r \in R_o$ étant évidemment dense dans $\Sigma \times R$, on voit que $e(\mathcal{Z}_1)$ et $e(\mathcal{Z}'_1)$ sont $\leq \max(n - h - 1, 0)$. On vérifie exactement de la même manière que les excès des familles $(s, L, r) \to \mathcal{Y}_1(s, L, r, t)$, $(s, L, r) \to \mathcal{Y}'_1(s, L, r, t)$ (pour un t donné quelconque) sont $\leq \max(n - h - 1, 0)$. Il est clair que $\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z}'_1$ est la famille $(s, L, r) \to \mathfrak{X}'_1(s, L, r, t)$. Soit u l'élément neutre de Γ. Pour tout cycle X porté par U et tout $L \in G^U_{N-n-1}$, on a $\tau_{u,L}(X) = X + \rho_L(X)$. Il en résulte immédiatement que l'on a $\mathfrak{X}'_1(u, L, r_t, t) = \mathfrak{X}(t)$ pour tout $L \in G^U_{N-n-1}$. Il existe une partie ouverte non vide G'_{N-n-1} de G^U_{N-n-1} telle que, si $L \in G'_{N-n-1}$, on ait

$$e(\rho_L(\mathcal{Z}'^t(r_t))) \leq \max(e(\mathcal{Z}'^t(r_t)) - 1, 0) \leq \max(e(\mathfrak{X}(t)), 0)$$

et

$$e(\rho_L(\mathcal{Z}^t(r_t))) \leq \max(e(\mathcal{Z}^t(r_t)) - 1, 0) \leq \max(e(\mathfrak{X}(t)), 0).$$

Par ailleurs, on a

$$\rho_{u,L}(\mathcal{Z}^t(r_t)) = \mathcal{Z}^t(r_t) + \rho_L(\mathcal{Z}^t(r_t))$$

et

$$\rho_{u,L}(\mathcal{Z}'^t(r_t)) = \mathcal{Z}'^t(r_t) + \rho_L(\mathcal{Z}'^t(r_t)).$$

Soit L_t un élément de G'_{N-n-1}, et soit $r'_t = (u, L_t, r_t)$; il est clair que les nombres $e(\mathcal{Z}_1^t(r'_t))$, $e(\mathcal{Z}'^t_1(r_t))$ sont $\leq \max(e(\mathfrak{X}(t)), 0)$. Ceci démontre l'assertion A_{h+1} .

REMARQUE. - Les notations étant celles du lemme 4 , les excès des familles $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{X}'$ sont $\leqslant 0$. En effet, pour tout $t \in T$, il existe une partie ouverte non vide R_t de R telle que, pour tout $r \in R_t$, $e(\mathfrak{Y}(r , t))$ et $e(\mathfrak{Y}'(r , t))$ soient tous deux $\leqslant 0$; la réunion des ensembles $R_t \times \{t\}$ pour tous les $t \in T$ étant dense dans $R \times T$, notre assertion est établie.

3. Application à l'équivalence rationnelle.

PROPOSITION 1. - Soient $V_1 , \dots , V_h$ des variétés non singulières et U une variété quasi-projective non singulière. Pour tout i , soit f_i un morphisme de V_i dans U . Soit X un cycle de U ; il existe alors un cycle X' rationnellement équivalent à X tel que les $f^{-1}_{i;\mathfrak{Z}}(X')$ soient tous définis. Si les $f^{-1}_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ sont tous définis et si X est rationnellement équivalent à 0 , les $f^{-1}_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ sont rationnellement équivalents à 0 .

Nous poserons $n = \dim U$. On peut supposer que U est une sous-variété (non nécessairement fermée) d'un espace projectif P de dimension $N > n$. Nous désignerons par $\overline{U}$ l'adhérence de U dans P et par J l'application identique de U dans P . Il est clair que X peut toujours se mettre sous la forme $J^{-1}_{\mathfrak{Z}}(\overline{X})$, où $\overline{X}$ est un cycle de P porté par $\overline{U}$ (on notera que $J^{-1}_{\mathfrak{Z}}(\overline{X})$ est toujours défini si $\overline{X}$ est une cycle porté par $\overline{U}$). Montrons que, si X est rationnellement équivalent à 0 , on peut supposer qu'il existe une famille algébrique $\overline{\mathfrak{X}}$ de cycles de P portés par $\overline{U}$, paramétrée par K , telle que $\overline{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\overline{\mathfrak{X}}(1) = \overline{X}$ (en choisissant convenablement $\overline{X}$). Il existe par hypothèse une famille algébrique $\mathfrak{X}$ de cycles de U , paramétrée par K , telle que $\mathfrak{X}(0) = 0$, $\mathfrak{X}(1) = X$. Soit Z le cycle de définition de $\mathfrak{X}$, et soit $Z = \sum_i c_i Z_i$, les Z_i étant des sous-variétés fermées de $U \times K$ et les c_i des entiers $\neq 0$. Pour chaque i , désignons par $\overline{Z}_i$ l'adhérence de Z_i dans $P \times K$, qui est une sous-variété de $\overline{U} \times K$. L'image de Z_i par la projection $U \times K \longrightarrow K$ est dense dans K ; celle de $\overline{Z}_i$ par la projection $P \times K \longrightarrow K$ est donc également dense dans K , d'où il résulte que, pour tout $t \in K$, $\overline{Z}_i . (P \times t)$ est défini (dans $P \times K$). Posons $Z_i . (U \times t) = \mathfrak{X}_i(t) \times t$, $\overline{Z}_i . (P \times t) = \overline{\mathfrak{X}}_i(t) \times t$; $\overline{\mathfrak{X}}_i(t)$ est alors un cycle porté par $\overline{U}$. Montrons que $J^{-1}_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}_i(t)) = \mathfrak{X}_i(t)$. Il existe une partie ouverte non vide P_o de P telle que $P_o \cap \overline{U} = U$. Soient A une sous-variété fermée de U et $\overline{A}$ son adhérence dans $\overline{U}$. On a $\overline{Z}_i \cap (P_o \times K) = Z_i$; le coefficient de $\overline{A}$ dans $\overline{Z}_i . (P \times t)$ est égal à celui de A dans l'intersection $Z_i . (P_o \times t)$ dans $P_o \times K$ (en vertu du caractère local de la définition des multiplicités d'intersection) ; celui-ci est aussi égal au coefficient de A dans l'intersection $Z_i . (U \times t)$ dans $U \times K$, ce qui démontre notre assertion. Soit $\overline{\mathfrak{X}}'$ la famille $\sum_i c_i \overline{\mathfrak{X}}_i$; on a donc $J^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}'(t)) = \mathfrak{X}(t)$ pour tout $t \in T$. Il suffit alors de prendre $\overline{\mathfrak{X}}(t) = \overline{\mathfrak{X}}'(t) - \overline{\mathfrak{X}}'(0)$; $\overline{X} = \overline{\mathfrak{X}}'(1) - \overline{\mathfrak{X}}'(0)$.

Pour tout i, il existe des sous-variétés B_{ij} de U et des entiers $\beta_{ij} \geq 0$ qui possèdent les propriétés suivantes : si A est une sous-variété fermée de U, une condition nécessaire et suffisante pour que les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(A)$ soient définis est que, pour tout (i, j), $A \cap B_{ij}$ soit vide ou de dimension $\leq \dim A + \dim B_{ij} - n + \beta_{ij}$ (proposition de l'exposé précédent). Les B_{ij} sont des sous-variétés de $\overline{U}$ qui ne rencontrent pas l'ensemble des points singuliers de $\overline{U}$; utilisant ces variétés et les nombres β_{ij}, nous définissons une fonction $e(\overline{X})$ sur l'ensemble des cycles portés par $\overline{U}$ de la manière indiquée au n° 2. Il est alors clair que, si $\overline{X}$ est un cycle porté par $\overline{U}$ tel que $e(\overline{X}) \leq 0$, les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{X}))$ sont tous définis. Soit $\overline{\mathfrak{X}}$ une famille algébrique positive de cycles portés par $\overline{U}$ telle que $e(\overline{\mathfrak{X}}) \leq 0$, paramétrée par une variété spéciale T. Soit T' l'ensemble des t tels que les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}(t)))$ soient définis ; T' est alors dense dans T. Les cycles $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(\bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}(t)))$, pour $t \in T'$, sont alors tous rationnellement équivalents entre eux, comme il résulte d'une double application du lemme 1 de l'exposé précédent. Par ailleurs, si $\overline{\mathfrak{X}}$ est une famille (positive ou non) de cycles protés par $\overline{U}$, paramétrée par une variété spéciale T, les cycles de la famille $t \longrightarrow \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{\mathfrak{X}}(t))$ sont tous rationnellement équivalents, comme on le voit en représentant $\overline{\mathfrak{X}}$ comme différence de deux familles positives.

Ceci étant, appliquons le lemme 4 du n° 2 à la famille $\overline{\mathfrak{X}}$ paramétrée par une variété composée d'un seul point t_o et définie par $\overline{\mathfrak{X}}(t_o) = \overline{X}$. On voit qu'il existe une famille $\overline{\mathfrak{X}}'$ paramétrée par une variété spéciale R et un point $r_o \in R$ tels que $e(\overline{\mathfrak{X}}') = 0$ et que $\overline{\mathfrak{X}}'(r_o) = \overline{X}$. Soit r un point de R tel que $e(\overline{\mathfrak{X}}'(r)) \leq 0$; posons $\overline{X}' = \overline{\mathfrak{X}}'(r)$, $X = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\overline{X}')$. Il résulte alors de ce que nous avons dit que X' est rationnellement équivalent à X et que les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X')$ sont définis. Ceci démontre la première assertion de la proposition 1.

Supposons maintenant que X soit rationnellement équivalent à 0. Soit $\overline{\mathfrak{X}}$ une famille algébrique de cycles portés par $\overline{U}$, paramétrée par K, telle que $\overline{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\overline{\mathfrak{X}}(1) = \overline{X}$. Appliquons le lemme 5, n° 2 à cette famille : on voit qu'il existe une famille $\overline{\mathfrak{X}}'$ de cycles portés par $\overline{U}$, paramétrée par le produit $R \times K$ d'une variété spéciale R par K, qui possède les propriétés suivantes : $\overline{\mathfrak{X}}'$ est la différence de deux familles algébriques positives $\overline{\mathfrak{Y}}$ et $\overline{\mathfrak{Y}}'$ d'excès ≤ 0 telles que, pour tout $t \in K$, les familles $r \longrightarrow \overline{\mathfrak{Y}}(r\,,\,t)$, $r \longrightarrow \overline{\mathfrak{Y}}'(r\,,\,t)$ soient d'excès nuls ; pour tout $t \in T$, il existe un $r_t \in R$ et des familles algébriques positives $\mathfrak{Z}^t$ et $\mathfrak{Z}'^t$ paramétrées par R telles que $e(\mathfrak{Z}^t)$ et $e(\mathfrak{Z}'^t)$ soient ≤ 0, que $\mathfrak{Z}^t(r) - \mathfrak{Z}'^t(r) = \overline{\mathfrak{X}}'(r\,,\,t)$ pour tout $r \in R$, que $\overline{\mathfrak{X}}'(r_t\,,\,t) = \overline{\mathfrak{X}}(t)$ et que $e(\mathfrak{Z}^t(r_t))$ et $e(\mathfrak{Z}'^t(r_t))$ soient tous deux $\leqslant \max(e(\overline{\mathfrak{X}}(t))\,,\,0)$. Supposons de plus que les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis. Pour toute variété A qui intervient dans X avec un coefficient $\neq 0$, chaque $A \cap B_{ij}$ est vide ou de dimension $\leqslant \dim A + b_{ij} - n + \beta_{ij}$; comme les B_{ij} sont contenus dans U, il en résulte que $e(\overline{X}) \leqslant 0$; on a alors $e(\overline{\mathfrak{X}}(0)) \leqslant 0$, $e(\overline{\mathfrak{X}}(1)) \leqslant 0$, et par suite $e(\mathfrak{Z}^t(r_t)) \leqslant 0$, $e(\mathfrak{Z}'^t(r_t)) \leqslant 0$ si $t = 0$ ou 1.

Il y a des éléments r'_0, r'_1 de R tels que les nombres $e(\mathfrak{Z}^0(r'_0))$, $e(\mathfrak{Z}'^0(r'_0))$, $e(\mathfrak{Y}(r'_0\,,\,0))$, $e(\mathfrak{Y}'(r'_0\,,\,0))$, $e(\mathfrak{Z}^1(r'_1))$, $e(\mathfrak{Z}'^1(r'_1))$, $e(\mathfrak{Y}(r'_1\,,\,1))$, $e(\mathfrak{Y}'(r'_1\,,\,1))$ soient tous $\leqslant 0$. Posons

$$Z^t = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}^t(r_t))\,, \quad Z'^t = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}'^t(r_t))\,, \quad Z^t_* = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}^t(r'_t))\,, \quad Z'^t_* = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z}'^t(r'_t))$$

($t = 0$ ou 1). Les images réciproques par les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}$ de tous ces cycles sont définies ; les excès des familles $\mathfrak{Z}^t$ étant ≤ 0, les cycles $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^t_* - Z^t)$, $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z'^t_* - Z'^t)$ ($t = 0$ ou 1) sont rationnellement équivalents à 0. Comme $\overline{\mathfrak{X}}(0) = 0$, $\overline{\mathfrak{X}}(1) = \overline{X}$, on a $Z^0 = Z'^0$, $Z^1 - Z'^1 = X$; pour chaque i, $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^0_* - Z'^0_*)$ est donc rationnellement équivalent à 0 et $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^1_* - Z'^1_*)$ est rationnellement équivalent à $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$. Posons $Y^t = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}(r'_t\,,\,t))$, $Y'^t = \bar{J}^1_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Y}'(r'_t\,,\,t))$ ($t = 0$ ou 1) ; les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y^t)$, $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y'^t)$ sont donc définis. On a $Y^t - Y'^t = Z^t_* - Z'^t_*$; de plus, les excès des familles $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ étant ≤ 0, les $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y^1 - Y^0)$, $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Y'^1 - Y'^0)$ sont rationnellement équivalents à 0. Il en résulte que, pour tout i, $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^1_* - Z'^1_*)$ est rationnellement équivalent à $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(Z^0_* - Z'^0_*)$, donc à 0, ce qui montre que $\bar{f}^1_{i;\mathfrak{Z}}(X)$ est rationnellement équivalent à 0 et démontre la proposition 1.

4. L'anneau de Chow.

Si U est une variété non singulière quasi-projective, les classes d'équivalence rationnelle de cycles de U forment un groupe additif ; nous désignerons ce groupe par $\mathfrak{C}(U)$.

Soient U et V des variétés non singulières quasi-projectives et f un morphisme de V dans U . Si $C \in \mathfrak{C}(V)$, la classe dans $C(U)$ de l'image par $f_{\mathfrak{Z}}$ d'un cycle $Y \in C$ ne dépend que de C , comme il résulte de la proposition 8 de l'exposé précédent ; nous désignerons cette classe par $f_*(C)$. Il est clair que f_* est un homomorphisme de $\mathfrak{C}(V)$ dans $\mathfrak{C}(U)$.

Soient maintenant V et U des variétés projectives non singulières et f un morphisme quelconque de V dans U . Soit C un élément de $\mathfrak{C}(U)$; il existe au moins un cycle $X \in C$ tel que $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini et, si X , X' sont deux cycles de C possédant cette propriété, $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ et $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X')$ sont rationnellement équivalents (proposition 1). Nous désignerons par $f^{-1}_*(C)$ la classe d'équilence rationnelle de V qui contient les $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ pour tous les $X \in C$ tels que $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ soit défini. Il est clair que f^{-1}_* est un homomorphisme de $\mathfrak{C}(U)$ dans $\mathfrak{C}(V)$.

Soient U et V des variétés quasi-projectives non singulières, C un élément de $\mathfrak{C}(U)$ et D un élément de $\mathfrak{C}(V)$. Si $X \in C$, $Y \in D$, la classe du cycle $X \times Y$ dans $U \times V$ ne dépend que de C et D , comme il résulte tout de suite de la proposition 3 de l'exposé précédent. Nous désignerons par $C \times D$ la classe d'équivalence rationnelle de $U \times V$ qui contient les $X \times Y$ pour $X \in C$, $Y \in D$. Il est clair que $(C , D) \longrightarrow C \times D$ est une application bilinéaire de $\mathfrak{C}(U) \times \mathfrak{C}(V)$ dans $\mathfrak{C}(U \times V)$.

Soient U , V et W des variétés quasi-projectives non singulières, f un morphisme de V dans U et g un morphisme de W dans V ; soit $h = f \circ g$. On a alors $h^{-1}_* = g^{-1}_* \circ f^{-1}_*$. Il existe en effet des variétés C_j en nombre fini et des morphismes $f_j : C_j \longrightarrow U$ qui possèdent les propriétés suivantes : pour tout cycle X de U tel $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ et les $f^{-1}_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis, $g^{-1}_{\mathfrak{Z}}(f^{-1}(X))$ et $h^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ sont définis et égaux (corollaire à la proposition 7 de l'exposé précédent). Notre assertion résulte alors immédiatement du fait que tout élément $C \in \mathfrak{C}(U)$ contient un cycle X tel que $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ et les $f^{-1}_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient définis (proposition 1). De plus, si f et g sont propres, on a $h_* = f_* \circ g_*$, car il résulte immédiatement de la définition de l'opération $f_{\mathfrak{Z}}$ sur les cycles que $h_{\mathfrak{Z}}(Z) = f_{\mathfrak{Z}}(g_{\mathfrak{Z}}(Z))$ pour tout cycle Z de W .

Soient U , U' , V , V' des variétés quasi-projectives non singulières, f un morphisme de U' dans U et g un morphisme de V' dans V . Désignons par h le morphisme $(x' , y') \longrightarrow (x , y)$ de $U' \times V'$ dans $U \times V$.

Si $A \in \mathfrak{C}(U)$, $B \in \mathfrak{C}(V)$, on a

$$\bar{h}^1_*(A \times B) = \bar{f}^1_*(A) \times \bar{g}^1_*(B) .$$

Soient en effet X et Y des cycles tels que $X \in A$, $Y \in B$ et que $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ et $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$ soient définis. On va montrer que $\bar{h}^1_{\mathfrak{Z}}(X \times Y)$ est défini et égal à $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X) \times \bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$. Soient $\bar{\Phi}$ et Γ les graphes de f et g ; comme $\bar{\Phi}.(X \times U')$ et $\Gamma.(Y \times V')$ sont définis, l'intersection $(\Phi \times \Gamma).(X \times U' \times Y \times V')$ dans $U \times U' \times V \times V'$ est définie et égale à $(\bar{\Phi}.(X \times U')) \times (\Gamma.(Y \times V'))$. L'isomorphisme canonique de $U \times U' \times V \times V'$ sur $U \times V \times U' \times V'$ transforme $\Phi \times \Gamma$ en le graphe Δ de h ; $\Delta.(X \times Y \times U' \times V')$ est donc défini et égal à l'image de $(\Phi.(X \times U')) \times (\Gamma.(Y \times V'))$. Or $\bar{\Phi}.(X \times U')$ s'applique sur $\bar{f}^1_{\mathfrak{Z}}(X)$ par l'isomorphisme naturel de $\bar{\Phi}$ sur U' et $\Gamma.(Y \times V')$ s'applique sur $\bar{g}^1_{\mathfrak{Z}}(Y)$ par l'isomorphisme naturel de Γ sur V' . Notre assertion résulte immédiatement de là.

Soient U , V des variétés quasi-projectives non singulières. Si s est l'isomorphisme $(x , y) \rightarrow (y , x)$ de $U \times V$ sur $V \times U$, il est clair que $s_*(x \times y) = y \times x$ si $x \in \mathfrak{C}(U)$, $y \in \mathfrak{C}(V)$. De même, si W est une troisième variété quasi-projective non singulière, et si a est l'isomorphisme $((x , y) , z) \rightarrow (x , (y , z))$ de $(U \times V) \times W$ sur $U \times (V \times W)$, on a $a_*((x \times y) \times z) = x \times (y \times z)$ si $x \in \mathfrak{C}(U)$, $y \in \mathfrak{C}(V)$, $z \in \mathfrak{C}(W)$. Il est donc correct de faire les identifications usuelles entre produits quand on considère des produits de classes d'équivalence.

Soit U une variété quasi-projective non singulière. Soit r l'application $x \rightarrow (x , x)$ de U dans $U \times U$; on définit une loi de composition $(x , y) \rightarrow x.y$ dans $\mathfrak{C}(U)$ en posant

$$x.y = \bar{r}^1_*(x \times y) .$$

Il est clair que $(x , y) \rightarrow x.y$ est une application bilinéaire de $\mathfrak{C}(U) \times \mathfrak{C}(U)$ dans $\mathfrak{C}(U)$. Si s est la symétrie dans $U \times U$, on a $s \circ r = r$; il en résulte que $x.y = y.x$. Montrons maintenant que la loi $(x , y) \rightarrow x.y$ est associative. On a

$$(x.y).z = \bar{r}^1_*(\bar{r}^1_*(x \times y) \times z) .$$

Désignons par t l'application $(u , v) \rightarrow ((u , u) , v)$ de $U \times U$ dans $U \times U \times U$; alors $(x.y).z = (\bar{r}^1_* \circ \bar{t}^1_*)(x \times y \times z)$. On a de même, en désignant par θ l'application $(u , v) \rightarrow (u , v , v)$, $x.(y.z) = (\bar{r}^1_* \circ \bar{\theta}^1_*)(x \times y \times z)$

notre assertion résulte alors de ce que l'on a $t \circ r = \theta \circ r$. Montrons enfin que la loi $(x , y) \rightarrow x.y$ comporte un élément unité. Nous désignerons par 1_U la classe d'équivalence du cycle U ; pour tout cycle de X de U, il est clair que $r^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X \times U) = X$; 1_U est donc élément unité pour notre loi de composition. Il en résulte que $\mathfrak{C}(U)$ se trouve muni d'une structure d'anneau commutatif.

On notera que, si des classes d'équivalence x et y sont représentées par des cycles X et Y tels que $X.Y$ soit défini, $X.Y$ appartient à la classe $x.y$; on sait en effet que l'on a alors $X.Y = r^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X \times Y)$. Par ailleurs, étant donnés des cycles quelconques X et Y, il y a toujours un cycle Y' rationnellement équivalent à Y tel que $X.Y'$ soit défini. Soient en effet B_j les sous-variétés de U qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans X, et soit f_j l'application identique de B_j dans U ; il y a un cycle Y' rationnellement équivalent à Y tel que les $f^{-1}_{j;\mathfrak{Z}}(Y')$ soient définie, ce qui démontre notre assertion.

Soient f un morphisme propre d'une variété quasi-projective non singulière V dans une variété quasi-projective non sigulière U, y un élément de $\mathfrak{C}(V)$ et x un élément de $\mathfrak{C}(U)$; on a alors

$$f_*(y.f^{-1}_*(x)) = f_*(y).x \ .$$

Soit en effet Y un élement quelconque de la classe y ; soient $B_1, \dots, B_m$ les variétés qui interviennent avec des coefficients $\neq 0$ dans Y, et f_j la restriction de f à B_j. On voit facilement que, si A est une sous-variété fermée de U telle que les $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(A)$, $f^{-1}_{j;\mathfrak{Z}}(A)$ soient tous définis, $Y.f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(A)$ et $f_{\mathfrak{Z}}(Y).A$ sont définis. On peut représenter x par un cycle X tel que les $f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$, $f^{-1}_{j;\mathfrak{Z}}(X)$ soient tous définis. Soient alors Φ le graphe de f et Y' le cycle de Φ qui correspond à Y par l'isomorphisme naturel de Φ sur V ; celui qui correspond à $M.f^{-1}_{\mathfrak{Z}}(X)$ est l'intersection $Y'.(X' \times V)$ prise dans $U \times V$. Soit p la projection de $U \times V$ sur son premier facteur, d'où $p_{\mathfrak{Z}}(Y') = f_{\mathfrak{Z}}(Y)$. Comme $Y'.(X \times V)$ et $p_{\mathfrak{Z}}(Y').X$ sont définis et comme p induit un morphisme propre de la variété Φ, qui contient $\operatorname{Supp} Y'$, il résulte de la formule des projections que $p_{\mathfrak{Z}}(Y').X = p_{\mathfrak{Z}}(Y'.(X \times V))$, ce qui démontre la formule.

Soit maintenant f un morphisme quelconque de V dans U ; alors f^{-1}_* est un homomorphisme de l'anneau $\mathfrak{C}(U)$ dans $\mathfrak{C}(V)$. Soient en effet r_U l'application $u \rightarrow (u , u)$ de U dans $U \times U$, r_V l'application $v \rightarrow (v , v)$

de V dans $V \times V$ et g l'application $(v, v') \to (f(v), f(v'))$ de $V \times V$ dans $U \times U$. On a $g \circ r_V = r_U \circ f$; si $x, y \in \mathfrak{C}(U)$, on a

$$\bar{f}^1_*(x.y) = \bar{f}^1_*((\bar{r}^1_U)_*(x \times y)) = (\bar{r}^1_V)_*(\bar{g}^1_*(x \times y)) = (\bar{r}^1_V)_*(\bar{f}^1_*(x) \times \bar{f}^1_*(y)) = \bar{f}^1_*(x).\bar{f}^1_*(y) ,$$

ce qui démontre notre assertion.

Soit U une variété quasi-projective non singulière. Pour tout d, soit $\mathfrak{C}^d(U)$ le groupe des classes d'équivalence rationnelle représentées par des cycles de codimension d ; $\mathfrak{C}(U)$ est alors la somme directe des $\mathfrak{C}^d(U)$, et le produit d'un élément de $\mathfrak{C}^d(U)$ par un élément de $\mathfrak{C}^{d'}(U)$ est dans $\mathfrak{C}^{d+d'}(U)$. Il en résulte que $\mathfrak{C}(U)$ est un anneau gradué. Il résulte tout de suite des définitions que, si m est un entier $\neq 0$, mU n'est pas rationnellement équivalent à 0 ; $\mathfrak{C}^0(U)$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$, de sorte que $\mathfrak{C}(U)$ est un anneau gradué augmenté. Si f est un morphisme d'une variété quasi-projective non singulière V dans U, $\bar{f}^1_*$ est homogène de degré 0. Si f est propre, f_* est une application additive homogène de degré $\dim U - \dim V$.