J.-P. Serre

Espaces fibrés algébriques

Séminaire Claude Chevalley, tome 3 (1958), exp. n° 1, p. 1-37
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958__3__A1_0>

21 avril 1958

ESPACES FIBRÉS ALGÉBRIQUES

par J.-P. SERRE.

[Le texte qui suit, rédigé en septembre 1958, diffère sensiblement de l'exposé oral, ne serait-ce que par sa longueur].

SOMMAIRE

INTRODUCTION. - La définition des espaces fibrés algébriques donnés par WEIL [19] suppose ceux-ci <u>localement triviaux</u>. Cette hypothèse a certaines conséquences fâcheuses : un revêtement non ramifié n'est pas un espace fibré, un groupe algébrique n'est pas nécessairement fibré par un sous-groupe. Le but de cet exposé est de proposer une définition plus large, celle des espaces fibrés <u>localement isotriviaux</u>, qui échappe à ces inconvénients.

Dans tout ce qui suit, le corps de base k est supposé algébriquement clos, de caractéristique quelconque. Nous suivons la terminologie et les notations de FAC [15], à cela près que nous appelons "espaces algébriques" (resp. "morphismes") les "variétés algébriques" (resp. "applications régulières") de FAC ; pour nous conformer à l'usage du séminaire Chevalley, nous réservons le terme de "variété" au cas irréductible.

Il ne serait pas bien difficile d'étendre les résultats de cet exposé au cas d'un corps de base quelconque ; pour une base réduite à un point, on retrouverait la situation étudiée dans LANG-TATE [13]. Il serait plus intéressant de se placer dans le cadre de la théorie générale des <u>schémas</u> de GROTHENDIECK (cf. [12]) ; pour la théorie des revêtements (n° 1), c'est facile ; par contre dès qu'on aborde les espaces fibrés proprement dits, on se heurte à des difficultés sérieuses (en voici un exemple typique : si G est un schéma de groupes sur un schéma donné, et si H est un schéma de sous-groupes de G, peut-on définir un schéma quotient G/H ?).

1. Revêtements non ramifiés

1.1. Définition d'un espace entier sur un autre.

Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme d'un espace algébrique Y dans un espace algébrique X. Nous dirons que Y est entier sur X si la condition suivante est réalisée :

(E). - Il existe un recouvrement ouvert affine X_i de X tel que les $Y_i = \pi^{-1}(X_i)$ soient des ouverts affines de Y, et que, si A_i (resp. B_i) désigne l'anneau de coordonnées de X_i (resp. Y_i), l'anneau B_i soit un A_i-module de type fini.

(On dit aussi que Y est un revêtement de X).

Si Y est entier sur X, l'image directe $\pi(\underline{O}_Y)$ du faisceau des anneaux locaux de Y est un faisceau cohérent de $\underline{O}_X$-algèbres : c'est évident localement (avec les notations de (E), la faisceau $\pi(\underline{O}_Y)$ est défini, sur la variété affine X_i, par le A_i-module B_i). Inversement, tout faisceau cohérent de $\underline{O}_Y$-algèbres, dépourvu d'éléments nilpotents, correspond à un revêtement Y et à un seul. Si $x \in X$, les points de Y au-dessus de x correspondent aux idéaux maximaux de l'anneau semi-local $\pi(\underline{O}_Y)_x$, et leurs anneaux locaux ne sont autres que les localisés de cet anneau semi-local.

Si Y est entier sur X et si X est affine, il en est de même de Y. En effet, soit A l'anneau de coordonnées affines de X, et soit B l'ensemble des sections de $\pi(\underline{O}_Y)$; d'après les propriétés élémentaires des variétés affines, B est un A-module de type fini, donc est une algèbre affine. L'algèbre B correspond donc à une variété affine Y', entière sur X, et on vérifie facilement que Y' coïncide avec Y (par exemple à cause du fait que $\pi(\underline{O}_Y) = \pi(\underline{O}_{Y'})$).

Le résultat précédent montre que si Z est entier sur Y et Y entier sur X, alors Z est entier sur X.

REMARQUE. - La condition (E) entraîne que π est un morphisme propre (au sens de CHEVALLEY [8]) et que $\pi^{-1}(x)$ est fini pour tout $x \in X$. Inversement, ces deux conditions entraînent (E) (CHEVALLEY, non publié) ; comme nous n'aurons pas besoin de ce fait, nous nous bornerons à signaler qu'on peut le démontrer en utilisant le théorème des fonctions holomorphes de Zariski, sous la forme de GROTHENDIECK ([12], théorème 4).

1.2. Définition d'un revêtement non ramifié.

Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement. On dit que ce revêtement est non ramifié en un point $y \in Y$ ayant pour image $x = \pi(y)$ si la condition suivante est satisfaite :

(NR). - L'homomorphisme $\hat{\pi} : \hat{\underline{O}}_x \to \hat{\underline{O}}_y$ défini par π est un isomorphisme.

(De façon générale, on note $\hat{A}$ le complété d'un anneau local A pour la topologie définie par les puissances de son idéal maximal).

La condition (NR) se décompose en deux ; tout d'abord $\hat{\pi}$ doit être injective (ce qui signifie que l'application π est localement surjective, condition très large, vérifiées par exemple si X et Y sont irréductibles et de même dimension) ; ensuite, $\hat{\pi}$ doit être surjective, ce qui équivaut à dire que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_y$ de $\underline{O}_y$ est engendré par l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\underline{O}_x$. Lorsque X et Y sont irréductibles et de même dimension, on retrouve bien la définition de la non-ramification du séminaire CHEVALLEY [7], page 5-15.

[La condition (NR) n'est "raisonnable" que parce que le corps de base k est supposé algébriquement clos. Dans le cas général, il faudrait supposer que $\hat{\underline{O}}_y$ est un $\hat{\underline{O}}_x$-module libre (nécessairement de type fini), et que son discriminant est inversible dans $\hat{\underline{O}}_x$. Cette définition peut se mettre sous plusieurs formes équivalentes, mais nous n'insisterons pas là-dessus.]

Si x est un point de X, on dit que le revêtement $\pi : Y \to X$ est non ramifié en x s'il est non ramifié en tous les points de Y se projetant en x. Si ces points sont en nombre de n, le complété de l'anneau semi-local $\pi(\underline{O}_Y)_x$ est isomorphe à $(\hat{\underline{O}}_x)^n$; c'est donc un $\hat{\underline{O}}_x$-module libre de rang n, et son radical est engendré par $\mathfrak{m}_x$. En utilisant les propriétés agréables de la complétion dans un anneau local (cf. par exemple [4], exposé 18, ou GAGA [16], annexe), on voit qu'il en est de même pour $\pi(\underline{O}_Y)_x$. En d'autres termes :

(NR)'. - L'anneau semi-local $\pi(\underline{O}_Y)_x$ est un $\underline{O}_x$-module libre, et son radical est engendré par $\mathfrak{m}_x$.

Inversement, il est immédiat que (NR)' entraîne que Y est non ramifié en x.

Enfin, on dira que le revêtement $\pi : Y \to X$ est non ramifié s'il est non ramifié en tout point (de X ou de Y, c'est la même chose).

Si Y est non ramifié, le faisceau $\pi(\underline{O}_Y)$ est localement libre (la réciproque étant bien entendu inexacte) ; son rang est donc constant sur toute composante connexe de X ; on l'appelle le <u>degré</u> du revêtement (sur la composante connexe en question) ; en vertu de ce qui précède, c'est aussi le nombre de points de Y ayant pour image un point donné de X. Si ce rang est partout égal à 1, l'application π est un isomorphisme : c'est évident sur la condition (NR)'.

Si $\pi : Y \to X$ est un revêtement quelconque, l'ensemble des points $x \in X$ au-dessus desquels Y est non ramifié forme un <u>ouvert</u>. Si X et Y sont irréductibles et de même dimension, cet ouvert est non vide si et seulement si l'extension $k(Y)/k(X)$ est séparable (cf. [7], <u>loc. cit.</u>).

1.3. <u>Opérations sur les revêtements non ramifiés.</u>

Toutes les propriétés formelles des revêtements topologiques se laissent transposer. De façon précise :

a. <u>Transitivité des revêtements.</u> - Si $Z \to Y$ et $Y \to X$ sont des revêtements non ramifiés, le composé $Z \to X$ est un revêtement non ramifié.

C'est évident, puisqu'on sait déjà que Z est entier sur X (n° 1.1).

b. <u>Produit de deux revêtements.</u> - Si $Y \to X$ et $Y' \to X'$ sont des revêtements non ramifiés, le produit $Y \times Y' \to X \times X'$ est un revêtement non ramifié.

C'est évident.

c. <u>Revêtement induit sur un sous-espace.</u> - Soit $Y \to X$ un revêtement non ramifié, soit $X' \subset X$, et soit Y' son image réciproque. Alors $Y' \to X'$ est un revêtement non ramifié ; de plus, pour tout point $y \in Y'$ se projetant en $x \in X'$, l'idéal de Y' dans $\underline{O}_y$ est engendré par l'idéal de X' dans $\underline{O}_x$.

Soit α l'idéal de X' dans $\underline{O}_x$; posons $A_x = \pi(\underline{O}_Y)_x$, anneau semi-local de $\pi^{-1}(x)$ dans l'espace algébrique Y. D'après (NR)' l'anneau A_x est un $\underline{O}_x$-module libre, et son radical est engendré par $\mathfrak{m}_x$; il en est donc de même de l'anneau quotient $A_x/\alpha A_x$, considéré comme $\underline{O}_x/\alpha$-module. En particulier, le complété de cet anneau est isomorphe à $(\hat{\underline{O}}_x/\hat{\alpha})^n$, en notant n le degré en x du revêtement. D'après un théorème de CHEVALLEY [6] (voir aussi [4], exposé 19), cet anneau complété n'a pas d'éléments nilpotents, et il en est <u>a fortiori</u> de même de $A_x/\alpha A_x$. Ceci montre que αA_x n'est autre que l'idéal défini par Y' dans A_x, d'où le résultat cherché.

[On pourrait éviter d'employer le théorème de Chevalley (qui est spécial aux anneaux locaux de la géométrie algébrique), en montrant que tout anneau semi-local qui est non ramifié sur un anneau local sans éléments nilpotents n'a pas non plus d'éléments nilpotents.]

d. Image réciproque d'un revêtement. - Soit $Y \to X$ un revêtement non ramifié, soit $f : Z \to X$ un morphisme, et soit $Z \times_X Y$ l'image réciproque de Y par f. Alors $Z \times_X Y \to Z$ est un revêtement non ramifié.

D'après (b), le produit $Z \times Y$ est un revêtement non ramifié de $Z \times X$. On applique alors (c) au graphe de f, plongé dans $Z \times X$. (On peut d'ailleurs préciser (d) comme on l'a fait pour (c) ; nous laissons l'énoncé au lecteur).

e. Sections. - Soit $Y \to X$ un revêtement non ramifié et soit $s : X \to Y$ une section de ce revêtement. L'image $s(X)$ de s est alors ouverte et fermée dans Y, et la projection $s(X) \to X$ est un isomorphisme.

Le morphisme s est propre d'après [8], proposition 1. Son image $s(X)$ est donc fermée, et il est clair que $s(X) \to X$ est un isomorphisme. Si $y \in s(X)$ les anneaux locaux de Y et de $s(X)$ en y ont même complété (à savoir $\hat{\underline{O}}_x$) ; comme celui de $s(X)$ est quotient de celui de Y, ils coïncident, ce qui montre que $s(X)$ est égal à Y dans un voisinage de y, autrement dit que $s(X)$ est ouvert.

f. Unicité des relèvements. - Soit $Y \to X$ un revêtement non ramifié, soit Z un espace algébrique, et soient g_1, g_2 deux morphismes de Z dans Y. Si ces deux morphismes ont même projection $f : Z \to X$, et s'ils prennent la même valeur en un point $z \in Z$, ils coïncident en tout point de la composante connexe de z.

En prenant l'image réciproque de Y par $f : Z \to X$, on se ramène au cas où g_1 et g_2 sont deux sections ; on applique alors (e).

1.4. Revêtements galoisiens non ramifiés.

Soit Y un espace algébrique, et soit $\mathfrak{g}$ un groupe fini d'automorphismes de Y. L'espace quotient $Y/\mathfrak{g}$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace annelé ; on sait (cf. par exemple, [17], paragraphe 3, ou [18], chapitre III, n° 12) que c'est même un espace algébrique si (et seulement si, d'après le théorème de Chevalley cité au n° 1.1) la condition suivante est satisfaite :

(*) Toute orbite de $\mathfrak{g}$ est contenue dans un ouvert affine de Y.

Cette hypothèse montre que l'on peut recouvrir Y par des ouverts affines Y_i stables par $\mathfrak{g}$; si B_i désigne l'anneau de coordonnées de Y_i, le groupe

$\mathfrak{G}$ opère sur B_i , et l'anneau A_i des invariants de B_i est une algèbre affine. La structure d'espace algébrique de $Y/\mathfrak{G}$ peut alors être définie en "recollant" les variétés affines X_i correspondant aux A_i .

Comme de plus les B_i sont des A_i-modules de type fini ([18], loc. cit., lemme 10) on voit que Y est entier sur $Y/\mathfrak{G}$.

Posons $X = Y/\mathfrak{G}$, et soit $x \in X$. Soit $A_x = \pi(\underline{O}_Y)_x$ l'anneau semi-local de $\pi^{-1}(x)$ dans Y . Le groupe $\mathfrak{G}$ opère sur A_x , et on peut donc définir ses groupes de cohomologie $H^q(\mathfrak{G}, A_x)$; par définition, on a $H^0(\mathfrak{G}, A_x) = \underline{O}_x$.

Du fait que le couple $(\underline{O}_x , \hat{\underline{O}}_x)$ est plat (GAGA, annexe), on déduit facilement :

$$H^q(\mathfrak{G}, M \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x) = H^q(\mathfrak{G}, M) \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x ,$$

pour tout $\underline{O}_x$-module de type fini M sur lequel opère $\mathfrak{G}$. En appliquant ceci à $M = A_x$, et en remarquant que $M \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x = \hat{M} = \prod_{y \to x} \hat{\underline{O}}_y$, on obtient :

$$H^q(\mathfrak{G}, A_x) \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x = H^q(\mathfrak{G}, \prod \hat{\underline{O}}_y) ,$$

le produit étant étendu aux y se projetant en x . Comme $\mathfrak{G}$ permute les $\hat{\underline{O}}_y$, un résultat bien connu montre que le membre de droite s'identifie à $H^q(\mathfrak{G}_y , \hat{\underline{O}}_y)$, où $\mathfrak{G}_y$ désigne le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ laissant fixe le point y choisi. On obtient donc :

a. Pour tout $y \in Y$ se projetant en $x \in X$, on a un isomorphisme :

$$H^q(\mathfrak{G}_y , \hat{\underline{O}}_y) = H^q(\mathfrak{G}, A_x) \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x , \quad q = 0 , 1 , \ldots .$$

Supposons alors que le groupe $\mathfrak{G}$ opère sans points fixes, c'est-à-dire que que $\mathfrak{G}_y = \{e\}$ pour tout $y \in Y$. En appliquant (a) avec $q = 0$, on obtient $\hat{\underline{O}}_y = \hat{\underline{O}}_x$ et $H^q(\mathfrak{G}, A_x) \otimes_{\underline{O}_x} \hat{\underline{O}}_x = 0$ pour $q \geqslant 1$, d'où $H^q(\mathfrak{G}, A_x) = 0$ puisque le couple $(\underline{O}_x , \hat{\underline{O}}_x)$ est plat. Autrement dit :

b. Si $\mathfrak{G}$ opère sans points fixes sur Y , le revêtement $Y \to Y/\mathfrak{G}$ est non ramifié, et l'on a $H^q(\mathfrak{G}, A_x) = 0$ pour $q \geqslant 1$ et $x \in Y/\mathfrak{G}$.

On dit alors que le revêtement $Y \to Y/\mathfrak{G}$ est un revêtement galoisien non ramifié de groupe de Galois $\mathfrak{G}$. Les éléments de $\mathfrak{G}$ définissent des automorphismes de ce revêtement ; si X est connexe, la propriété d'unicité 1.3 (f) montre que ce sont les seuls.

On notera que, même si X est connexe, l'espace Y n'est pas nécessairement connexe. Si Y_o est une composante connexe de Y, le sous-groupe $\mathfrak{g}_o$ de $\mathfrak{g}$ formé des éléments laissant stable Y_o fait de Y_o un revêtement galoisien non ramifié de X, de groupe de Galois $\mathfrak{g}_o$.

1.5. <u>Construction du revêtement galoisien associé à un revêtement non ramifié quelconque.</u>

Soit X un espace connexe, et soit $\pi : Y \rightarrow X$ un revêtement non ramifié de X, de degré n. Nous nous proposons de construire un revêtement <u>galoisien</u> non ramifié de X, dont Y soit le quotient.

Pour cela, soit Y^n_X l'image réciproque dans Y^n de la diagonale de X^n ; d'après 1.3, on obtient ainsi un revêtement non ramifié $Y^n_X \rightarrow X$, de degré égal à n^n. De plus, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur ce revêtement. Soit T l'ensemble des points de Y^n_X laissés fixes par au moins une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ distincte de l'identité ; d'après 1.3. f), l'ensemble T est à la fois ouvert et fermé dans Y^n_X. Soit Z son complémentaire ; c'est un revêtement non ramifié de X, dont les points sont les systèmes $(y_1, \dots, y_n)$ de points de Y, ayant même image dans X, et tous distincts ; le degré de Z est donc $n\,!$. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est un groupe d'automorphismes sans points fixes de Z ; par passage au quotient, on en déduit un revêtement non ramifié $Z/\mathfrak{S}_n \rightarrow X$, de degré 1, c'est-à-dire un isomorphisme d'après 1.2. Ainsi, Z <u>est un revêtement galoisien non ramifié de</u> X, de groupe de Galois $\mathfrak{S}_n$; on constate tout de suite que Y <u>s'identifie au quotient</u> $Z/\mathfrak{S}_{n-1}$. Le revêtement Z est donc le revêtement cherché.

Si Y est connexe, on peut prendre une composante connexe Z_o de Z de groupe de Galois $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{S}_n$; on constate alors que Y s'identifie à $Z_o/\mathfrak{h}$, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{S}_{n-1}$. Le revêtement Z_o est le "plus petit" revêtement galoisien non ramifié de X dominant le revêtement Y ; on laisse au lecteur le soin de préciser cet énoncé.

[Lorsque X et Y sont des variétés normales, le revêtement Z_o n'est autre que le normalisé de X dans la plus petite extension galoisienne de $k(X)$ contenant $k(Y)$].

2. Espaces fibrés principaux.

2.1. Système fibré.

Soit G un groupe algébrique (non nécessairement connexe), et soit E un espace algébrique. Nous dirons que G opère à droite sur E si l'on s'est donné un morphisme $F : E \times G \to E$ vérifiant les deux identités :

a. $F(x , 1) = x$ pour tout $x \in E$.

b. $F(x , gg') = F(F(x , g) , g')$ pour $x \in E$, $g \in G$, $g' \in G$.

On écrit d'ordinaire $F(x , g)$ sous la forme $x.g$ de telle sorte que les identités ci-dessus s'écrivent $x.1 = x$ et $x.(g.g') = (x.g).g'$. On notera que les translations $x \to x.g$ (g fixé dans G) sont des automorphismes de E.

On définit de même la notion de groupe opérant à gauche sur un espace.

Soit P un espace algébrique sur lequel le groupe G opère à droite, et soit $\pi : P \to X$ un morphisme de P dans un espace X. Nous dirons que (G , P , X) est un système fibré si l'on a $\pi(x.g) = \pi(x)$ pour tout $x \in P$. La notion d'isomorphisme de système fibré est claire (pour X et G fixés). Il en est de même de la notion d'image réciproque par un morphisme $f : X' \to X$: on définit P' comme le sous-espace de $X' \times P$ formé des couples ayant même image dans X (i.e. $P' = X' \times_X P$), et on définit $\pi' : P' \to X'$ et $F' : P' \times G \to P'$ de façon évidente.

2.2. Définitions.

Soient X un espace algébrique, G un groupe algébrique, et (G , P , X) un système fibré. Nous dirons que ce système (ou, par abus de langage, P lui-même) est trivial s'il est isomorphe à $X \times G$ muni des opérations $(x , g).g' = (x , gg')$ et de la projection canonique $X \times G \to X$. Nous dirons qu'il est isotrivial s'il existe un revêtement non ramifié $f : X' \to X$ tel que l'image réciproque de P par f soit un système trivial (de base X').

Nous dirons enfin que P est localement trivial (resp. localement isotrivial) si tout $x \in X$ possède un voisinage U au-dessus duquel P est trivial (resp. isotrivial). Un système fibré (G , P , X) localement isotrivial sera aussi appelé un espace fibré principal de base X et de groupe G. Cette terminologie est une extension de celle de WEIL [19], qui se bornait au cas localement trivial.

2.3 Construction d'espaces fibrés isotriviaux au moyen de cocycles.

Soit X un espace algébrique, et soit P un espace fibré principal de base X qui soit isotrivial. Ceci signifie qu'il existe un revêtement non ramifié $X' \to X$ sur lequel P devient trivial. Vu 1.5, on peut supposer que X' est galoisien sur X ; soit $\mathfrak{g}$ son groupe de Galois.

Notons $\Gamma(X', G)$ le groupe des morphismes de X' dans G ; le groupe $\mathfrak{g}$ opère sur $\Gamma(X', G)$ par la règle :

$$(\sigma f)(x') = f(x'.\sigma) \qquad \text{(on fait opérer } \mathfrak{g} \text{ à droite sur } X'\text{)} .$$

On peut donc définir $H^0(\mathfrak{g}, \Gamma(X', G))$, qui est un groupe, et $H^1(\mathfrak{g}, \Gamma(X', G))$ qui est un ensemble avec point marqué (cf. FRENKEL [9], ou GROTHENDIECK [10]).

PROPOSITION 1. - Les classes d'espaces fibrés principaux de base X et groupe G dont l'image réciproque sur X' est triviale correspondent bijectivement aux éléments de $H^1(\mathfrak{g}, \Gamma(X', G))$.

Soit P un tel espace fibré, et soit $P' \subset X' \times P$ son image réciproque par $f : X' \to X$. Par hypothèse, P' est isomorphe à $X' \times G$. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X' \times G & \longrightarrow & P \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} .$$

L'espace P' peut être considéré comme l'image réciproque par π du revêtement $X' \to X$. D'après 1.3, c'est donc un revêtement non ramifié de P, évidemment galoisien de groupe $\mathfrak{g}$. Ainsi, P s'identifie à $P'/\mathfrak{g}$, et tout revient à déterminer les opérations de $\mathfrak{g}$ sur $P' = X' \times G$. Ces opérations doivent être compatibles avec la projection π' de $X' \times G$ sur X', et doivent commuter aux opérations de G. On en déduit leur expression :

$$(x', g).\sigma = (x'.\sigma, \varphi_\sigma(x').g), \quad \sigma \in \mathfrak{g} ,$$

où φ_σ est un morphisme de X' dans G dépendant de σ, c'est-à-dire une 1-cochaîne de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\Gamma(X', G)$. En exprimant l'associativité :

$$(x', g).\sigma\tau = ((x', g).\sigma).\tau , \quad \sigma, \tau \in \mathfrak{g} ,$$

on obtient l'identité :

$$\varphi_{\sigma\tau}(x') = \varphi_{\tau}(x'\sigma).\varphi_{\sigma}(x')\ , \quad \text{i.e.} \quad \varphi_{\sigma\tau} = (\varphi_{\tau})^{\sigma}.\varphi_{\sigma}\ ,$$

ce qui signifie que $\sigma \to \varphi_\sigma$ est un 1-cocycle. Inversement, la donnée d'un tel cocycle permet de faire opérer $\mathfrak{g}$ sur $X' \times G$, et de définir P comme le quotient $X' \times G/\mathfrak{g}$ (la propriété (*) du n° 1.4 est bien vérifiée, car tout sous-ensemble fini d'un groupe algébrique est contenu dans un ouvert affine). Enfin, on vérifie immédiatement que deux cocycles φ_σ et φ'_σ correspondent à des espaces fibrés principaux isomorphes si et seulement s'ils sont cohomologues.

En appliquant la proposition 1 aux ouverts de X, et en passant à la limite (suivant différentes bases de filtre), on obtient :

a. Soit $x \in X$ un point fixé. Les classes d'espaces fibrés principaux de base un voisinage de x qui deviennent triviaux sur un voisinage de $f^{-1}(x)$ dans X' correspondent aux éléments de l'ensemble $H^1(\mathfrak{g}\ , \Gamma_x(X'\ , G))$, en notant $\Gamma_x(X'\ , G)$ le groupe des germes de morphismes des voisinages de $f^{-1}(x)$ dans G.

EXEMPLE. - Prenons $G = G_a$, groupe additif. Le groupe $\Gamma_x(X'\ , G_a)$ n'est autre que l'anneau semi-local de $f^{-1}(x)$, noté A_x dans 1.4. En appliquant 1.4 (b), on voit donc que $H^1(\mathfrak{g}\ , A_x) = 0$, autrement dit que tout espace fibré principal de groupe G_a est localement trivial. Nous donnerons plus loin une autre démonstration de ce fait.

b. Supposons X' et X irréductibles. Les classes d'espaces fibrés principaux de base un ouvert non vide de X (non précisé) qui deviennent triviaux sur un ouvert non vide de X' stable par $\mathfrak{g}$ correspondent aux éléments de $H^1(\mathfrak{g}\ , k(X'\ , G))$, où $k(X'\ , G)$ désigne le groupe des applications rationnelles de X' dans G. On notera que $H^1(\mathfrak{g}\ , k(X'\ , G))$ est aussi l'ensemble des classes d'espaces homogènes principaux sur G, qui sont définis sur $k(X)$, et ont un point rationnel dans $k(X')$ (cf. LANG-TATE [13]) ; cela provient de ce que la "fibre générique" d'un fibré principal est un tel espace homogène.

2.4 Critère d'isotrivialité locale.

Soit $(G\ , P\ , X)$ un système fibré. Considérons les deux propriétés suivantes :

(FP). - Si y et y' sont deux éléments de P ayant même projection sur X, il existe un $g \in G$ et un seul tel que $y' = y.g$; l'application qui, à un tel couple $(y\ , y')$, fait correspondre l'élément g, est un morphisme du sous-espace T de $P \times P$ où elle est définie dans le groupe G.

(En topologie générale, cette propriété est souvent prise comme définition des espaces fibrés principaux).

(SL). - Pour tout $x \in X$, il existe un revêtement non ramifié $f : U' \to U$, où U est un voisinage de x, et un morphisme $s : U' \to P$ tels que $\pi \circ s = f$ sur U.

(On peut considérer s comme une "section locale multiforme", non ramifié au voisinage de x).

PROPOSITION 2. - Pour qu'un système fibré soit localement isotrivial, il faut et il suffit qu'il vérifie (FP) et (SL).

Supposons que P soit localement isotrivial. Si P devient trivial sur le revêtement $U' \to U$, la propriété (SL) est évidemment satisfaite. Pour vérifier (FP), on peut raisonner localement, c'est-à-dire supposer que $P = X' \times G/\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ opérant sur $X' \times G$ au moyen d'un cocycle φ_σ. Soit T' le sous-espace de $X' \times G \times X' \times G$ formé des couples $t' = ((x, g), (x', g'))$ tels que $x = x'$; ce sous-espace est stable par $\mathfrak{g}$, et son image dans P est le sous-espace T défini dans (FP). Si $t' \in T'$ posons $\theta'(t') = g^{-1} g'$; un calcul immédiat montre que le morphisme $\theta' : T' \to G$ vérifie $\theta' \circ \sigma = \theta'$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{g}$, donc définit par passage au quotient un morphisme $\theta : T \to G$. On a évidemment $y' = y.\theta(y, y')$ pour tout $(y, y') \in T$, ce qui montre que (FP) est vérifié.

Réciproquement, supposons (FP) et (SL) vérifiés. Si $f : U' \to U$ est un revêtement ayant les propriétés postulées dans (SL) nous allons montrer que l'image réciproque P' de P sur U' est triviale. En effet, cette image réciproque possède une section s' (correspondant à s), et vérifie (FP). Soit $\theta : T \to G$ le morphisme de T dans G tel que $y' = y.\theta(y, y')$ pour $(y, y') \in T$. On définit alors deux morphismes réciproques :

$$\Phi : X' \times G \to P' \quad \text{et} \quad \Psi : P' \to X' \times G ,$$

par les formules :

$$\Phi(x', g) = s(x').g \quad \text{et} \quad \Psi(y) = (\pi(y), \theta(y, s(\pi(y)))) .$$

On en déduit bien que P' est isomorphe à $X' \times G$.

C. Q. F. D.

Questions.

1° Est-il possible de remplacer la propriété (SL) par la propriété (plus faible) suivante :

(SLF). - Pour tout $x \in X$, et tout $y \in P$ se projetant en x, il existe un homomorphisme $s : \hat{O}_y \to \hat{O}_x$ tel que le composé $s \circ \hat{\pi}$ soit l'identité sur $\hat{O}_x$?

Cette propriété signifie que le système fibré P possède une "section locale formelle" en chaque point de la base.

2° On peut même se demander si la propriété (FP) n'est pas suffisante à elle seule pour assurer que P est localement isotrivial (X étant défini comme le quotient P/G ; bien entendu, il faudrait démontrer que ce quotient est un espace algébrique, sous des hypothèses raisonnables).

2.5 Premiers exemples d'espaces fibrés principaux.

Les exemples les plus importants sont :

a. Les espaces fibrés localement triviaux, considérés par WEIL [19], et classifiés par lui dans certains cas (notamment lorsque $G = G_m$, groupe multiplicatif).

b. Les revêtements non ramifiés $X' \to X$ qui sont galoisiens de groupe de Galois $\mathfrak{g}$. En effet, un tel revêtement définit un système fibré qui devient évidemment trivial sur X' lui-même ; c'est donc un espace fibré principal isotrivial, de groupe $\mathfrak{g}$.

[La définition des espaces fibrés principaux que nous avons adoptée est, en somme, la plus restrictive qui contienne comme cas particuliers les fibrés du type (a) et ceux du type (b), et qui soit stable par les opérations usuelles (cf. n° 3)].

c. Un groupe, fibré par un sous-groupe. De façon précise :

PROPOSITION 3. - Soit G_1 un groupe algébrique, G un sous-groupe algébrique de G_1, et soit $H = G_1/G$ l'espace homogène quotient, muni de la structure d'espace algébrique défini dans [7], exposé 8. Si l'on fait opérer G sur G_1 par translations à droite, le système (G, G_1, H) est un espace fibré principal de base H et de groupe G.

D'après la proposition 2, il suffit de montrer que (G, G_1, H) vérifie les axiomes (FP) et (SL). Si $y, y' \in G_1$ ont même image dans $H = G_1/G$, il existe $g \in G$ tel que $y' = y.g$, et cet élément g s'écrit $g = y'.y^{-1}$. Puisque la loi de composition est un morphisme de $G_1 \times G_1$ dans G_1, on voit biem que l'axiome (FP) est vérifié. Reste à construire une "section locale multiforme", régulière en un point donné de H. Soit G_{1o} la composante connexe de l'élément neutre de G_1, soit $G_o = G_{1o} \cap G$, et $H_o = G_{1o}/G_o$; les variétés G_{1o} et H_o sont irréductibles, et H_o est la composante connexe de l'élément origine de H. On sait ([7], loc. cit.) que l'extension $k(G_{1o})/k(H_o)$ des corps de fonctions rationnelles est séparable ; il s'ensuit aussitôt qu'il existe une sous-variété irréductible X' de G_{1o}, de même dimension que H, et telle que la projection $X' \to H_o$ définisse une extension finie séparable $k(X')/k(H_o)$. (Il suffit de prendre pour X' une sous-variété de G_1 passant par l'élément neutre et ayant en ce point une variété tangente transversale à celle de G). D'après 1.2, il existe alors un ouvert non vide U de H_o dont l'image réciproque U' dans X' constitue un revêtement non ramifié $U' \to U$. La propriété (SL) est donc vérifiée au-dessus de U puisque $U' \subset X' \subset G_1$. Par translation, on en déduit qu'elle est vérifiée partout,

C. Q. F. D.

REMARQUE. - Soit (G, P, X) un système fibré. Supposons pour simplifier que X soit irréductible et que $P \to X$ soit surjectif. Le raisonnement fait ci-dessus montre alors que, si l'extension $k(P)/k(X)$ est séparable, et si la propriété (FP) est vérifiée, il existe un ouvert non vide de X au-dessus duquel P est isotrivial.

2.6 Systèmes fibrés définis par des revêtements radiciels.

Au lieu de définir les espaces fibrés principaux au moyen des revêtements non ramifiés au sens du n° 1, on peut songer à utiliser des revêtements radiciels. La difficulté est que l'on ne sait pas définir en général ceux de ces revêtements qui sont "bons", c'est-à-dire ceux qui doivent jouer le rôle des revêtements non ramifiés. On ne le sait, grâce à CARTIER [5], que dans le cas des variétés non singulières : si Y est une telle variété, on se donne un sous-fibré vectoriel E du fibré tangent T_Y, et on suppose que les sections rationnelles $S(E)$ de E forment une p-algèbre de Lie restreinte (c'est-à-dire sont stables pour le crochet et la puissance p-ième) ; on définit alors sur Y une nouvelle structure de variété en prenant comme fonctions régulières celles qui sont annulées par les dérivations $D \in S(E)$. Si $X = Y/E$ est la variété ainsi obtenue, l'application canonique $Y \to X$ fait de Y un "bon" revêtement radiciel de X, de hauteur 1. Pour $E = T_Y$, on obtient $X = Y^p$.

Soit maintenant G un groupe algébrique. Sur $Y \times G$ donnons-nous un fibré E comme ci-dessus, en exigeant que E soit invariant par translation, et qu'en chaque point E soit supplémentaire de T_G dans $T_{Y\times G}$; dans le langage de la géométrie différentielle, E est une connexion intégrable (cf. [5], n° 6). Si l'on pose $P = (Y \times G)/E$, et $X = Y^p$, on constate que (G , P , X) est un système fibré, qui devient trivial sur Y . Un tel système fibré est-il localement isotrivial ? D'après les résultats de Cartier, il est très vraisemblable que la réponse est affirmative ; il en est en tout cas ainsi, comme il l'a montré, lorsque $G = G_a$ ou G_m . Il ne devrait pas être difficile de traiter de même le cas du groupe GL_n , d'où, sans doute, tous les groupes linéaires ; peut-être pourra-t-on passer de là au cas général.

3. Opérations sur les espaces fibrés principaux.

Nous allons voir que les espaces fibrés principaux (localement isotriviaux) jouissent de propriétés tout analogues à celles dont on a l'habitude en topologie (cf. par exemple GROTHENDIECK [10]). Comme les démonstrations ne présentent aucune difficulté, nous nous bornerons à de brèves indications.

3.1 Caractère fonctoriel en X de $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$.

Soient X un espace algébrique, et G un groupe algébrique. L'ensemble des classes d'espaces fibrés principaux de base X et groupe G sera noté $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$. Les classes d'espaces fibrés localement triviaux forment dans $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$ un sous-ensemble qui n'est autre que le premier "ensemble de cohomologie" $H^1(X , \underline{G})$, en notant $\underline{G}$ le faisceau des germes de morphismes de X dans G (cf. [10], n° 5.1 ou [9], n° 3). Le groupe $H^0(X , \underline{G})$ sera également noté $\Gamma(X , G)$; c'est le groupe des morphismes de X dans G .

Soit $f : X' \to X$ un morphisme. Si P est un espace fibré principal de base X et groupe G , l'image réciproque P' de P par f est encore un espace fibré principal. En effet, il faut vérifier que le système fibré $P' = P \times_X X'$ est localement isotrivial ; la question étant locale, on peut supposer que P est isotrivial, i.e. qu'il existe un revêtement non ramifié $Y \to X$ sur lequel P devient trivial ; mais alors P' devient trivial (transitivité des images réciproques) sur $Y' = Y \times_X X'$, qui est un revêtement non ramifié de X' d'après 1.3 ; donc P' est bien localement isotrivial.

On déduit de là une application $f^* : \tilde{H}^1(X , \underline{G}) \to \tilde{H}^1(X' , \underline{G})$ qui fait de $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$ un <u>foncteur contravariant</u> en X (nous verrons plus loin que c'est aussi un foncteur covariant en G).

Soient P et P' deux fibrés principaux de base X et X'. <u>Pour que</u> P' <u>soit isomorphe à</u> $f^*(P)$, <u>il faut et il suffit qu'il existe un diagramme commutatif</u> :

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{F} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad .$$

(F commutant aux opérations de G)

En effet, l'application F définit un morphisme $P' \to f^*(P)$, ce qui nous ramène à démontrer notre assertion lorsque $X' = X$, f étant l'identité. De plus, on peut supposer que P et P' deviennent triviaux sur un revêtement $Y \to X$ non ramifié, galoisien de groupe $\mathfrak{g}$. Ces deux espaces s'identifient donc à $(Y \times G)/\mathfrak{g}$ et $(Y \times G)/\mathfrak{g}$ le groupe $\mathfrak{g}$ opérant sur $Y \times G$ au moyen de cocycles φ_σ et φ'_σ. Le morphisme F définit un morphisme $F' : Y \times G \to Y \times G$, et il est clair qu'un tel morphisme est nécessairement un isomorphisme. D'où, par passage au quotient par $\mathfrak{g}$, le fait que F lui-même est un isomorphisme.

On voit en particulier qu'un espace fibré principal est <u>trivial</u> s'il a une section.

3.2 <u>Construction des espaces fibrés associés.</u>

Soit P un espace fibré principal de base X et groupe G, et soit F un espace algébrique sur lequel le groupe G opère à gauche. Nous nous proposons de construire <u>l'espace fibré associé à</u> P, <u>de base</u> X, <u>et de fibre</u> F. Nous devrons toutefois faire une hypothèse sur F :

(**) <u>Tout sous-ensemble fini de</u> F <u>est contenu dans un ouvert affine de</u> F.

J'ignore si cette hypothèse (ou une hypothèse analogue) est nécessaire ; de toutes façons, elle est automatiquement remplie si F est quasi-projective.

PROPOSITION 4. - <u>Faisons opérer</u> G <u>à droite sur</u> $P \times F$ <u>par la formule</u> : $(y , f).g = (y.g , g^{-1}.f)$. <u>Il existe alors un espace algébrique</u> Q <u>et un seul tel que</u> $P \times F$ <u>soit un espace fibré principal de base</u> Q <u>et de groupe</u> G.

L'espace Q est l'espace fibré associé cherché. On le notera $P \times^G F$. Son unicité est évidente [de façon générale, la connaissance d'un fibré principal P et de son groupe structural G détermine la base : c'est le quotient P/G ; munie de la structure annelée quotient (vérification immédiate sur les modèles locaux 2.3)]. Son existence est un problème local. On peut donc supposer que $P = X' \times G/\mathfrak{g}$ où $X' \to X$ est un revêtement galoisien non ramifié, de groupe de Galois $\mathfrak{g}$ opérant au moyen d'un cocycle φ_σ (cf. 2.3). On construit alors Q comme quotient $X' \times F/\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ opère sur $X' \times F$ par la formule :

$$(x', f).\sigma = (x'.\sigma , \varphi_\sigma(x').f) .$$

La condition (*) de 1.4 est vérifiée, grâce à l'hypothèse (**) ci-dessus. L'image réciproque sur $X' \times F$ du système fibré $(G , P \times F , Q)$ est isomorphe à $X' \times F \times G$ (calcul facile), d'où la proposition.

EXEMPLES.

a. Si F est un ensemble fini, l'espace fibré $P \times^G F$ est un <u>revêtement non ramifié</u> de X. Inversement, si X est connexe, tout revêtement non ramifié de X peut s'obtenir ainsi, d'après 1.5.

b. Si $\alpha : F \to F'$ est un morphisme d'espaces algébriques à opérateurs, on en déduit un morphisme : $P \times^G F \to P \times^G F'$.

c. Si $f : X' \to X$ est un morphisme, l'image réciproque de $P \times^G F$ par f est isomorphe à $P' \times^G F$, où $P' = f^*(P)$. En particulier, on voit que les fibrés associés $P \times^G F \to X$ deviennent triviaux (localement) sur des revêtements non ramifiés.

3.3 <u>Extension du groupe structural.</u>

Soit $\theta : G \to G'$ un homomorphisme du groupe G dans un groupe G'. On peut faire opérer G à gauche sur G' par la formule :

$$g.g' = \theta(g).g' .$$

Comme G' vérifie évidemment la condition (**), l'espace fibré associé $P \times^G G'$ est défini. De plus, comme G' opère sur lui-même par translations à droite, et que ces translations commutent aux opérations de G, le groupe G' opère à droite sur $P \times^G G'$.

PROPOSITION 5. - Si P est un espace fibré principal de base X et groupe G, le fibré associé $P \times^G G'$ est un espace fibré principal de base X et groupe G'.

La question étant locale, on peut supposer qu'il existe un revêtement non ramifié $f : X' \to X$ tel que $f^*(P)$ soit trivial. Il en sera alors de même de $f^*(P \times^G G')$,

C. Q. F. D.

Nous noterons $\theta_*(P)$ l'espace fibré principal $P \times^G G'$. On obtient ainsi une application $\theta_* : \tilde{H}^1(X , \underline{G}) \to \tilde{H}^1(X , \underline{G'})$ qui fait de $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$ un bifoncteur.

On peut donner de $\theta_*(P)$ une caractérisation analogue à celle donnée dans 3.1 pour l'image réciproque.

3.4 Produits. Cas où G est commutatif.

Soit I un ensemble fini, et, pour tout $i \in I$, soit P_i un espace fibré principal de base X_i et groupe G_i. Il est clair que $\prod P_i$ est alors un espace fibré principal de base $\prod X_i$ et de groupe $\prod G_i$, d'où une application canonique :

$$\prod \tilde{H}^1(X_i , \underline{G_i}) \to \tilde{H}^1(\prod X_i , \underline{\prod G_i}) .$$

Si tous les X_i sont égaux à un même espace X, l'application diagonale permet d'appliquer $\tilde{H}^1(\prod X_i , \underline{G})$ dans $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$ (en posant $G = \prod G_i$, pour simplifier les notations).

PROPOSITION 6. - L'application canonique $\prod \tilde{H}^1(X , \underline{G_i}) \to \tilde{H}^1(X , \underline{G})$ est bijective.

Les homomorphismes de projection $G \to G_i$ définissent une application en sens inverse, et on vérifie tout de suite que les deux composés sont égaux à 1.

Supposons maintenant que G soit commutatif. L'application somme $s : G \times G \to G$ étant un homomorphisme, on a une application

$$s_* : \tilde{H}^1(X , \underline{G \times G}) = \tilde{H}^1(X , \underline{G}) \times \tilde{H}^1(X , \underline{G}) \to \tilde{H}^1(X , \underline{G}) ,$$

c'est-à-dire une loi de composition dans $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$.

PROPOSITION 7. - La loi de composition définie ci-dessus fait de $\tilde{H}^1(X , \underline{G})$ un groupe commutatif.

C'est immédiat.

Bien entendu, les applications f^* sont compatibles avec la structure de groupe de $\overset{*}{H}^1(X , \underline{G})$. De plus cette structure induit sur $H^1(X , \underline{G})$ sa structure naturelle de groupe de cohomologie.

3.5 Restriction du groupe structural.

Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G . Soit d'autre part P un espace fibré principal de base X et de groupe G . Puisque $H \subset G$, le groupe H opère à droite sur P .

PROPOSITION 8. - L'espace P est un espace fibré principal de groupe H et de base $P \times^G G/H$. Si de plus la fibration de G par H (cf. proposition 3) est localement triviale, et si P lui-même est localement trivial, cette fibration est localement triviale.

(Noter que l'espace fibré associé $P \times^G G/H$ est bien défini, puisque G/H vérifie la condition (**) d'après [18], Chapitre V, n° 20).

La question étant locale, on peut supposer que l'image réciproque P' de P sur un revêtement non ramifié $X' \to X$ est triviale. On a alors $P' = X' \times G$, et il est clair que P' est un espace fibré principal de base $X' \times G/H$ et groupe H , d'où la première partie de la proposition. La seconde partie se démontre de même.

PROPOSITION 9. - La donnée d'un espace fibré principal de groupe H est équivalent à celle d'un espace fibré principal de groupe G , muni d'une section du fibré associé en fibres G/H .

(C'est le critère habituel de "restriction du groupe structural", convenablement précisé).

Soit Q un fibré principal de groupe H et base X . L'injection $i : H \to G$ permet de lui associer un fibré principal $i_*(Q) = Q \times^H G$ de groupe G ; le fibré associé à $i_*(Q)$ et de fibre G/H est canoniquement isomorphe au fibré associé à H de même fibre ; comme H opère sur G/H en laissant fixe l'origine, ceci définit une section canonique de ce fibré.

Inversement, partons d'un fibré principal P de base X et groupe G , et d'une section $s : X \to P \times^G G/H$ du fibré associé en fibres G/H . D'après la proposition 8, on peut considérer P comme un espace fibré principal de base $P \times^G G/H$ et de groupe H ; on peut donc définir $s^*(P) = Q$, image réciproque de ce fibré par s , et c'est un espace fibré principal, de base X et de groupe H .

En écrivant quelques diagrammes, on vérifie que les applications que nous venons de définir sont réciproques l'une de l'autre.

PROPOSITION 10. - <u>Soit</u> Q <u>un espace fibré principal de base</u> X <u>et groupe</u> H. <u>Supposons que l'espace fibré</u> $P = i_*(Q) = P \times^H G$ <u>soit localement trivial, et que la fibration de</u> G <u>par</u> H <u>soit localement triviale. Alors</u> Q <u>est localement trivial</u>.

En effet, la démonstration de la proposition 9 montre que Q est image réciproque de P considéré comme fibré principal de groupe H et base $P \times^H G/H$; d'après la proposition 8, cet espace fibré est localement trivial, et il en est donc de même de Q.

(<u>Variante</u>. - La trivialité locale de P signifie qu'il existe localement un morphisme $P \to G$ compatible avec les opérations de H ; en le combinant avec un morphisme analogue $G \to H$, on obtient bien la trivialité locale de H).

EXEMPLE. - <u>Isomorphismes de deux fibrés principaux</u>. Soient P et P' deux fibrés principaux de même groupe G. Ils définissent un fibré $P \times_X P'$ de groupe $G \times G$. Si l'on fait opérer $G \times G$ sur G par translations à droite et à gauche, on en déduit un fibré associé (la fibre étant $G \times G/\Delta$, où Δ désigne la diagonale). Les <u>sections</u> de ce fibré correspondent aux <u>isomorphismes</u> de P sur P', ou, ce qui revient au même, aux <u>restrictions du groupe structural</u> $G \times G$ <u>à</u> Δ.

3.6 <u>Suites exactes associées à un sous-groupe</u>.

<u>Tous</u> les résultats du Chapitre V du rapport de GROTHENDIECK [10] qui ne font pas intervenir des groupes de cohomologie de dimension $\geqslant 2$ sont valables pour les fibrés considérés ici. Nous nous bornerons à mentionner les plus importants.

Reprenons d'abord la situation du numéro précédent, et soit H un sous-groupe algébrique d'un groupe algébrique G. On a alors (cf. [10], p. 71, corollaire à la proposition 5.2.1, voir aussi FRENKEL [9], n° 16) :

PROPOSITION 11. - <u>On a une suite exacte</u> :

$$\{e\} \to \Gamma(X, H) \to \Gamma(X, G) \xrightarrow{u} \Gamma(X, G/H) \xrightarrow{d} \tilde{H}^1(X, \underline{H}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{G}).$$

[Noter que le groupe $\Gamma(X, G)$ opère sur $\Gamma(X, G/H)$, et que l'on a $u(g) = g.1$. L'exactitude en $\Gamma(X, G/H)$ signifie que $d(f) = d(f')$ si et seulement s'il existe $g \in \Gamma(X, G)$ avec $f' = g.f$, cf. [10]].

La définition de $d : \Gamma(X, G/H) \to \tilde{H}^1(X, \underline{H})$ est la suivante : un élément $f \in \Gamma(X, G/H)$ définit une section du fibré trivial $X \times G/H$, donc (proposition 9) un espace fibré principal de groupe H dont l'extension à G est triviale ; de plus la proposition 9 montre que l'on obtient par ce procédé tous les espaces fibrés jouissant de cette propriété, c'est-à-dire justement le noyau de $\tilde{H}^1(X, \underline{H}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{G})$. Le fait que $d(f) = d(f')$ équivaut à l'existence de $g \in \Gamma(X, G)$ tel que $f' = g.f$ se vérifie sans difficulté.

PROPOSITION 12 ([10], proposition 5.3.1). - Si H est un sous-groupe invariant dans G, la suite $\tilde{H}^1(X, \underline{H}) \to H^1(X, \underline{G}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{G/H})$ est exacte. De plus, le groupe $\Gamma(X, G/H)$ opère sur $\tilde{H}^1(X, \underline{H})$ et deux éléments de $\tilde{H}^1(X, \underline{H})$ ont même image dans $\tilde{H}^1(X, \underline{G})$ si et seulement s'ils sont congruents suivant ce groupe de permutations.

L'exactitude résulte immédiatement de la proposition 9. Les opérations de $\Gamma(X, G/H)$ sur $\tilde{H}^1(X, \underline{H})$ se définissent de la façon suivante :

Soit P un espace fibré principal de groupe H ; l'espace fibré associé de fibre G/H est trivial (en tant qu'espace fibré principal de groupe G/H). Si on l'identifie à $X \times G/H$, on voit que tout élément g du groupe $\Gamma(X, G/H)$ en définit une section, donc aussi (proposition 9) un autre fibré P' de groupe H et ayant même image que P dans $\tilde{H}^1(X, \underline{G})$. L'élément P' est le transformé de P par g, et la proposition 9 montre bien que deux éléments de $\tilde{H}^1(X, \underline{H})$ ont même image dans $\tilde{H}^1(X, \underline{G})$ si et seulement s'ils sont transformés l'un de l'autre par un élément du groupe $\Gamma(X, G/H)$.

On peut dire des choses plus précises lorsque H est commutatif ou mieux lorsqu'il est contenu dans le centre de G. Dans ce dernier cas, $\tilde{H}^1(X, \underline{H})$ opère sur $\tilde{H}^1(X, \underline{G})$, deux éléments de ce dernier ensemble étant congrus suivant ce groupe si et seulement s'ils ont même image dans $\tilde{H}^1(X, \underline{G/H})$ (cf. [10], proposition 5.5.2 ou [9], n° 18). Enfin, si G lui-même est commutatif, on a :

PROPOSITION 13. - Si H est un sous-groupe d'un groupe commutatif G, on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \Gamma(X, H) \to \Gamma(X, G) \to \Gamma(X, G/H) \to \tilde{H}^1(X, \underline{H}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{G}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{G/H})$$

REMARQUES.

1° Si la fibration de G est localement triviale, on peut écrire une suite exacte analogue à celle de la proposition 13, où les H^1 usuels remplacent les $\tilde{H}^1$.

Cela se voit, soit en utilisant la proposition 10, soit directement en remarquant que l'on a <u>dans ce cas</u> (et seulement dans ce cas) une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \underline{H} \to \underline{G} \to \underline{G/H} \to 0 .$$

2° On peut se demander s'il est possible de définir des groupes de cohomologie supérieurs $\check{H}^q(X , \underline{G})$ qui permettent d'étendre la suite exacte de la proposition 13 en toute dimension. GROTHENDIECK a montré que c'est bien le cas (non publié), et il semble même que ces nouveaux groupes de cohomologie, lorsque G est fini, fournissent la "vraie cohomologie" nécessaire pour la démonstration des conjectures de Weil. Voir à ce sujet l'introduction de [12].

4. <u>Critères de trivialité locale</u>. <u>Groupes spéciaux</u>.

4.1 <u>Groupes spéciaux</u>.

Soit G un groupe algébrique. Nous dirons qu'il est <u>spécial</u> si tout fibré principal de groupe G est <u>localement trivial</u>.

THÉORÈME 1. - <u>Tout groupe spécial est connexe et linéaire</u>.

La démonstration sera donnée au numéro suivant. Nous allons commencer par démontrer quelques lemmes.

LEMME 1. - <u>Soit</u> G <u>un groupe algébrique spécial, et soit</u> H <u>un sous-groupe de</u> G . <u>Pour que</u> H <u>soit spécial, il faut et il suffit que la fibration de</u> G <u>par</u> H <u>soit localement triviale</u>.

La nécessité est évidente. Pour démontrer la suffisance, soit Q un espace fibré principal, de base X et de groupe H . L'espace fibré $P = Q \times^H G$ est localement trivial, puisque G est spécial. Il en est donc de même de P , d'après la proposition 10.

LEMME 2. - <u>Soit</u> $\varphi : G \to A$ <u>un homomorphisme d'un groupe algébrique</u> G <u>sur une variété abélienne</u> A . <u>La restriction de</u> φ <u>au centre</u> C <u>de</u> G <u>est alors surjective</u>.

Le quotient G/C est un groupe <u>linéaire</u> (cf. ROSENLICHT [14], théorème 13 ; la démonstration n'est pas difficile : on fait opérer G par automorphismes intérieurs sur les quotients $\underline{O}_e/\mathfrak{m}^n$, où $\underline{O}_e$ désigne l'anneau local de l'élément neutre, et on montre que l'on obtient ainsi une représentation linéaire fidèle de G/C). L'homomorphisme $G/C \to A/\varphi(C)$ est donc nécessairement trivial (puisque $A/\varphi(C)$

est une variété abélienne), ce qui montre que $A = \varphi(C)$.

LEMME 3. - Les hypothèses étant celles du lemme 2, il existe un nombre fini de nombres premiers p_i tels que, pour tout nombre premier $\ell \neq p_i$, tout élément de A d'ordre ℓ soit image d'un élément de G d'ordre ℓ .

Le lemme 2 permet de remplacer G par son centre, c'est-à-dire, de supposer G commutatif. Soit R le noyau de $\varphi : G \to A$, et soit R_o la composante connexe de l'élément neutre dans R . Le groupe R/R_o est un groupe fini ; nous prendrons pour p_i les nombres premiers divisant l'ordre de R/R_o , augmentés éventuellement de la caractéristique. Si $\ell \neq p_i$, la multiplication par ℓ est surjective dans R_o (son application tangente est surjective, et c'est un homomorphisme), donc aussi dans R . Il en résulte bien que tout élément d'ordre ℓ de A est image d'un élément d'ordre ℓ de G .

LEMME 4. - Soit X une variété non singulière, soit A une variété abélienne, et soit P un espace fibré principal de base X et de groupe A . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i. P est trivial.

ii. P est localement trivial.

iii. P a une section rationnelle.

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont claires. Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). Il suffit pour cela de prouver que toute section rationnelle de P est régulière (i.e. est un morphisme). La question étant locale, on peut supposer P de la forme $(X' \times A)/\mathfrak{g}$, où X' est un revêtement galoisien non ramifié de X , de groupe de Galois $\mathfrak{g}$. La section s de P correspond à une section s' de $X' \times A \to X'$ invariante par $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire à une application rationnelle de X' dans A . Mais X' est non singulière (puisque X l'est et que le revêtement $X' \to X$ est non ramifié) ; d'après une propriété bien connue des variétés abéliennes (cf. WEIL [20], théorème 6) l'application s' est partout régulière, et il en est de même de s ,

C. Q. F. D.

4.2 Démonstration du théorème 1.

a. Nous allons d'abord montrer que tout groupe spécial G qui est connexe est linéaire.

D'après le "théorème de Chevalley" (voir BARSOTTI [1] ou ROSENLICHT [14]), le groupe G contient un sous-groupe linéaire R invariant tel que le quotient $G/R = A$ soit une variété abélienne. Il nous faut montrer que A est réduite à 0. Sinon, d'après WEIL ([20], p. 127), A possèderait des éléments d'ordre premier ℓ pour tout ℓ distinct de la caractéristique. D'après le lemme 3, il existerait donc un élément $a \in A$ d'ordre premier ℓ qui serait image d'un élément $g \in G$ d'ordre ℓ. Si l'on désigne par N le groupe cyclique $\underset{\sim}{Z}/\ell \underset{\sim}{Z}$, on aurait donc un homomorphisme $\varepsilon : N \to G$ tel que le composé $N \to G \to A$ soit injectif. Nous allons utiliser ε pour construire un espace fibré principal de groupe G qui ne soit pas localement trivial. Pour cela, nous ferons choix d'une variété algébrique X vérifiant les trois conditions suivantes :

1° X <u>est non singulière</u>.

2° $\tilde{H}^1(X, \underline{N}) \neq 0$.

3° <u>Toute application rationnelle de</u> X <u>dans</u> A/N <u>est constante</u>.

[Exemples de telle variété : la droite affine privée d'un point, une courbe elliptique qui n'est isogène à aucun facteur simple de A].

Soit alors $x \in \tilde{H}^1(X, \underline{N})$, avec $x \neq 0$. Je dis que $\varepsilon_*(x) \in \tilde{H}^1(X, \underline{G})$ n'est pas localement trivial (ce qui contredira l'hypothèse faite sur G). En effet, si $\varepsilon_*(x)$ était localement trivial, il en serait <u>a fortiori</u> de même de l'image de $\varepsilon_*(x)$ dans $\tilde{H}^1(X, \underline{A})$. D'après le lemme 4, cette image serait nulle. Mais on peut appliquer la suite exacte de la proposition 13 au sous-groupe N de A. On en déduit la suite exacte :

$$\Gamma(X, A) \to \Gamma(X, A/N) \to \tilde{H}^1(X, \underline{N}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{A}) .$$

Vu l'hypothèse du 3°, tout morphisme de X dans A/N est constant, donc est image d'un morphisme de X dans A. On en conclut que l'homomorphisme $\tilde{H}^1(X, \underline{N}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{A})$ est injectif, d'où une contradiction, puisque $x \neq 0$.

b. Montrons maintenant que <u>tout groupe spécial est linéaire</u>.

Soit G un groupe spécial, et soit G_o sa composante connexe de l'élément neutre. La fibration de G par G_o est évidemment triviale (l'espace de base étant fini), et le lemme 1 montre que G_o est spécial. D'après (a), G_o est donc linéaire, et, en particulier, c'est une variété affine ; comme G est réunion disjointe de composantes connexes toutes isomorphes à G_o, on voit que G est une variété affine, donc est un groupe linéaire ([7], exposé 4, proposition 1).

c. Il reste à montrer que tout groupe spécial est connexe. Soit G un tel groupe; d'après (b), on peut le supposer plongé dans le groupe linéaire GL_n. Soit G_o la composante connexe de l'élément neutre de G, et soit $N = G/G_o$; c'est un groupe fini. Le groupe GL_n, fibré par G, est localement trivial (puisque G est spécial) ; il en est de même du fibré associé de groupe N, qui n'est autre que GL_n/G_o. Autrement dit, le revêtement $GL_n/G_o \to GL_n/G$, qui est galoisien de groupe N, est à la fois localement trivial et connexe. Ce n'est possible que si $N = \{e\}$, du fait que les variétés GL_n/G_o et GL_n/G sont normales.

4.3 Caractérisation des groupes spéciaux.

Vu le théorème 1, tout groupe spécial est linéaire. Il nous faut donc donner un critère permettant de reconnaître si un sous-groupe G du groupe linéaire GL_x est spécial.

THÉORÈME 2. - Pour qu'un sous-groupe algébrique G de GL_n soit spécial, il faut et il suffit que la fibration de GL_n par G soit localement triviale.

(Condition équivalente : il doit exister une section rationnelle $GL_n/G \to GL_n$; en effet, on en déduit par translation l'existence d'une section régulière en un point donné de GL_n/G, cf. la démonstration de la proposition 3).

COROLLAIRE. - Soit G un groupe linéaire. Si, pour un plongement particulier de G dans un groupe GL_n, la fibration de GL_n par G est localement triviale, ceci a lieu pour tout plongement.

DÉMONSTRATION du théorème 2. - Compte tenu du lemme 1, il nous suffit de prouver que le groupe linéaire général GL_n est spécial. Soit donc P un espace fibré principal de base X, et de groupe GL_n ; si $x \in X$, nous devons montrer qu'il existe un voisinage de x sur lequel P est trivial. Puisque P est localement isotrivial, il existe en tout cas un ouvert U contenant x, et un revêtement galoisien non ramifié U' de U, de groupe de Galois $\mathfrak{g}$, tel que l'image réciproque P' de P sur U' soit localement triviale. Notons π la projection de U' sur U', et soit A_x l'anneau semi-local de $\pi^{-1}(x)$ sur U'. Le groupe $\Gamma_x(U', G)$ des germes de morphismes des voisinages de $\pi^{-1}(x)$ dans GL_n peut s'identifier à $GL_n(A_x)$. D'après 2.3, l'espace fibré P définit un élément $p_x \in H^1(\mathfrak{g}, GL_n(A_x))$, et P est localement trivial en x si et seulement si p_x est trivial. Nous sommes donc ramenés à démontrer :

LEMME 5. - On a $H^1(\mathfrak{g}, GL_n(A_x)) = 0$.

La démonstration est standard (cf. [17], n° 15) : si y_1 est l'un des points de U' qui se projettent en x, on choisit une matrice $h \in M_n(A_x)$ qui prend la valeur 1 en y_1, et 0 aux autres points de $\pi^{-1}(x)$. Si φ_σ est un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $GL_n(A_x)$, on pose :

$$a = \sum_{\tau \in \mathfrak{g}} \tau(h).\varphi_\tau .$$

On vérifie tout de suite que a est inversible en chacun des points de $\pi^{-1}(x)$, donc appartient bien à $GL_n(A_x)$. On a de plus :

$$\sigma(a)\varphi_\sigma = \sum \sigma\tau(h).\sigma(\varphi_\tau)\varphi_\sigma = \sum \sigma\tau(h).\varphi_{\sigma\tau} = a ,$$

ce qui montre que φ_σ est un cobord et achève la démonstration.

4.4 Exemples de groupes spéciaux.

a. Le groupe G_m est spécial. En effet, c'est GL_1. Le groupe G_a est spécial ; en effet, on le plonge dans GL_2 comme groupe triangulaire inférieur (avec des 1 sur la diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, et le groupe triangulaire supérieur forme une section rationnelle. Plus généralement (ROSENLICHT [14], théorème 10) :

PROPOSITION 14. - Tout groupe linéaire connexe résoluble est spécial.

Un tel groupe est en effet extension multiple de groupes isomorphes à G_m ou à G_a (cf. par exemple [7]), et il suffit d'appliquer le lemme suivant :

LEMME 6. - Soit G un groupe algébrique et soit H un sous-groupe invariant de G. Si H et G/H sont spéciaux, le groupe G est spécial.

La démonstration est immédiate (utiliser par exemple la suite exacte de la proposition 12).

b. Le groupe SL_n est spécial. En effet, il admet comme supplémentaire dans GL_n le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

c. Le groupe symplectique Sp_n est spécial. En effet, l'espace homogène GL_{2n}/Sp_n s'identifie à l'espace des formes bilinéaires alternées non dégénérées. Dire que la fibration GL_{2n}/Sp_n admet une section rationnelle revient à dire que la forme alternée générique

$$\sum_{i<j} u_{ij}\, x_i \wedge x_j$$

peut être ramenée à la forme canonique $\sum x_{2i-1} \wedge x_{2i}$ par une matrice à coefficients dans $k(u_{ij})$; or c'est effectivement possible, d'après la théorie élémentaire des formes alternées.

d. On peut montrer en utilisant le théorème 2, que le groupe orthogonal unimodulaire $O_+(n)$ n'est pas spécial pour $n \geqslant 3$. Cela revient à montrer que la forme quadratique générique

$$\sum u_{ij}\, x_i\, x_j$$

ne peut pas se mettre sous la forme $\sum x_i^2$ par un changement linéaire de variables à coefficients dans le corps engendré sur k par les u_{ij} et par la racine carrée du discriminant $\det(u_{ij})$.

Nous ne donnerons pas la démonstration car le résultat en question est un cas très particulier de la caractérisation des groupes spéciaux donnée par Grothendieck (voir le dernier exposé de ce séminaire). Cette caractérisation montre notamment que les seuls groupes semi-simples spéciaux sont les produits des groupes SL_n et Sp_n . En particulier, les groupes projectifs PGL_n , $n \geqslant 2$, ne sont pas spéciaux, non plus que les groupes de spineurs $Spin(n)$, pour $n \geqslant 7$ (ce dernier exemple contredit la conjecture faite dans GAGA, p. 34).

5. Classification des espaces fibrés principaux dans quelques cas particuliers.

5.1 Groupes G_a et G_m .

Comme ces groupes sont spéciaux (4.4), les groupes de classes de fibrés $\tilde{H}^1(X, \underline{G}_a)$ et $\tilde{H}^1(X, \underline{G}_m)$ s'identifient simplement aux groupes de cohomologie $H^1(X, \underline{O}_X)$ et $H^1(X, \underline{O}_X^*)$; lorsque X est non singulière, ce dernier groupe s'identifie lui-même au groupe des classes de diviseurs sur X , pour l'équivalence linéaire (cf. WEIL [19]).

5.2 Groupes abéliens finis.

Soit d'abord G un groupe cyclique d'ordre n premier à la caractéristique. Si $\theta : G_m \to G_m$ est définie par $\theta(\lambda) = \lambda^n$, on a la suite exacte :

$$0 \to G \to G_m \to G_m \to 0 .$$

En appliquant la proposition 13, on en déduit :

PROPOSITION 15. - On a une suite exacte :

$$0 \to \Gamma(X , G_m)_n \to \tilde{H}^1(X , \underline{G}) \to {}_nH^1(X , \underline{O}^*) \to 0 .$$

(Pour tout groupe commutatif H, on note H_n le quotient H/nH et ${}_nH$ le sous-groupe de H formé des éléments d'ordre divisant n).

Lorsque X est complète et connexe, le groupe $\Gamma(X , G_m)$ se réduit à G_m, et $\Gamma(X , G_m)_n = 0$. On en déduit (cf. [17], n° 15) :

COROLLAIRE. - Lorsque X est non singulière et complète, le groupe des classes de revêtements non ramifiés de X, de groupe de Galois cyclique d'ordre n, est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de X d'ordre divisant n.

Si G est cyclique d'ordre p, on utilise la suite exacte :

$$0 \to G \to G_a \xrightarrow{\wp} G_a \to 0 \quad (\wp(\lambda) = \lambda^p - \lambda) ,$$

et l'on obtient (cf. [17], n° 16) :

PROPOSITION 16. - Lorsque X est complète, le groupe des classes de revêtements non ramifiés de X, de groupe de Galois cyclique d'ordre p égal à la caractéristique, est isomorphe au sous-groupe de $H^1(X , \underline{O}_X)$ formé des éléments annulés par $\wp$.

On retrouverait de même la classification des revêtements cycliques d'ordre p^n donnée dans [17], n° 18, en utilisant les vecteurs de Witt.

5.3 Variétés abéliennes.

Soit X une variété non singulière, et soit A une variété abélienne.

LEMME 7. - Le groupe $\tilde{H}^1(X , \underline{A})$ est un groupe de torsion.

Soit P un espace fibré principal de base X et de groupe A. Il existe un ouvert non vide U de X et un revêtement galoisien non ramifié $U' \to U$ tels que l'image réciproque P' de P sur U' soit triviale. Soit n l'ordre de ce revêtement, et soit $\mathfrak{g}$ son groupe de Galois. D'après 2.3, l'espace fibré P définit un élément p_U d'un certain groupe de cohomologie de $\mathfrak{g}$; puisque $\mathfrak{g}$ est d'ordre égal à n, on a $n.p_U = 0$, ce qui signifie que $n.P$ est trivial sur U. D'après le lemme 4, l'espace fibré $n.P$ est trivial sur X tout entier,

C. Q. F. D.

[Ce résultat est spécial aux variétés non singulières. Si l'on prend par exemple pour X deux droites ayant un point en commun, on trouve que $\tilde{H}^1(X, \underline{A})$ s'identifie à A elle-même].

PROPOSITION 17. - Supposons que le caractéristique du corps de base soit nulle. Alors tout espace fibré principal de base X non singulière et de groupe A s'obtient par extension du groupe structural à partir d'un revêtement abélien non ramifié $X' \to X$, de groupe de Galois un sous-groupe de A.

Soit $p_X \in \tilde{H}^1(X, \underline{A})$. D'après le lemme 7, il existe n tel que $n.p_X = 0$. Soit θ l'homothétie de rapport n dans A, et soit N son noyau. On a la suite exacte $0 \to N \to A \xrightarrow{\theta} A \to 0$, d'où (proposition 13) la suite exacte :

$$\tilde{H}^1(X, \underline{N}) \to \tilde{H}^1(X, \underline{A}) \xrightarrow{\theta} \tilde{H}^1(X, \underline{A}) .$$

Comme le foncteur $\tilde{H}^1(X, \underline{G})$ est additif en G (cf. 3.4), l'homomorphisme θ n'est autre que la multiplication par n, et p_X appartient à son noyau. Donc p_X est image d'un élément de $\tilde{H}^1(X, \underline{N})$,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - Tout espace fibré principal de base une variété abélienne et de groupe une variété abélienne peut être muni d'une structure de variété abélienne.

En effet, on sait que c'est vrai pour les revêtements abéliens non ramifiés.

COROLLAIRE 2. - Tout espace fibré principal de base X non singulière et de groupe G connexe s'obtient par extension du groupe structural à partir d'un espace fibré principal de groupe un groupe linéaire.

Soit $G/R = A$ le plus grand quotient de G qui soit une variété abélienne. Si $x \in \tilde{H}^1(X, \underline{G})$, soit p_X l'image de x dans $\tilde{H}^1(X, \underline{A})$; d'après la proposition 17 il existe un sous-groupe fini N de A tel que l'image de p_X dans $\tilde{H}^1(X, \underline{A/N})$ soit triviale. Soit S l'image réciproque de N dans G ; on a $G/S = A/N$, ce qui montre que x est image d'un élément $y \in \tilde{H}^1(X, \underline{S})$. Comme $S/R = N$, le groupe S est une variété affine, donc est linéaire,

C. Q. F. D.

REMARQUE. - On voit pourquoi la proposition 17 n'est pas valable en caractéristique p ; c'est qu'il se peut que p_X soit, par exemple, d'ordre exactement p, et la multiplication par p dans A n'est pas une isogénie séparable, donc ne permet pas de définir un isomorphisme $A/N \to A$. Il est d'ailleurs facile de construire des exemples (avec X variété abélienne) montrant que la proposition 17 et son corollaire 2 peuvent être inexacts en caractéristique $p > 0$. Pour les rétablir, il faudrait élargir le cadre que nous avons adopté, et accepter des revêtements radiciels ainsi que des espaces algébriques dont le faisceau d'anneaux possède des éléments nilpotents. Le groupe fini N serait remplacé par une "hyperalgèbre" finie, au sens de Cartier. Il est vraisemblable que l'on récupèrerait alors le corollaire 1.

5.4 Groupe linéaire général et groupe linéaire unimodulaire.

Ces deux groupes sont spéciaux. Un fibré principal de base X et de groupe GL_n est donc localement trivial ; comme GL_n est le groupe des automorphismes d'un vectoriel de dimension n, on en déduit facilement qu'un tel espace correspond biunivoquement à un fibré à fibre vectorielle de rang n, ou encore à un faisceau algébrique localement libre de rang n (cf. FAC, n° 50). La classification de ces fibrés est d'ailleurs un problème difficile, qui n'est résolu que pour des espaces X très particuliers [plan affine (SESHADRI), courbe de genre 0 (GROTHENDIECK), courbe de genre 1 (ATIYAH)].

D'après la proposition 9, un fibré principal de groupe SL_n est déterminé par la donnée d'un fibré principal de groupe GL_n et d'une section du fibré associé de fibre GL_n/SL_n ; cela revient à se donner un fibré E à fibre vectorielle de rang n, et une section du fibré $\Lambda^n E$ partout non nulle.

5.5 Groupe projectif.

Soit $PGL_n = GL_n/G_m$ le groupe projectif de dimension n (groupe des automorphismes de l'espace projectif P_{n-1}). Ce n'est pas un groupe spécial ; introduisons donc l'ensemble $H^1_x(PGL_n)$ des classes d'espaces fibrés principaux locaux de groupe PGL_n, définis au voisinage d'un point fixé $x \in X$. La suite exacte associée à l'extension $GL_n/G_m = PGL_n$ montre que $H^1_x(PGL_n)$ se plonge dans $H^2_x(G_m)$ (qui est un groupe abélien) ; on obtient ainsi ceux des éléments de $H^2_x(G_m)$ qui sont "décomposés" par un revêtement non ramifié de degré n. On est ici dans une situation qui généralise celle du "groupe de Brauer". D'ailleurs, si l'on considérait des fibrés de groupe PGL_n du point de vue birationnel, on verrait qu'ils correspondent biunivoquement aux classes d'algèbres simples sur $k(X)$ qui contiennent une algèbre de degré n^2 (ou, ce qui revient au même, qui sont décomposées par une extension de $k(X)$ dont le degré divise n). [Pour définir une algèbre simple à partir d'un fibré, utiliser le fait que PGL_n est le groupe des automorphismes de l'algèbre des matrices $M_n(k)$].

Nous n'insisterons pas là-dessus, et nous nous bornerons à mentionner le résultat suivant (dû à GROTHENDIECK) :

PROPOSITION 18. - _Soit X une variété non singulière, et soit P un espace fibré principal de base X et de groupe PGL_n. Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :_

i. P _est image d'un fibré de groupe_ GL_n .

ii. P _est localement trivial._

iii. P _possède une section rationnelle._

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont triviales. Pour montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i) on construit le fibré Y en espaces projectifs associé à P. Grâce à (iii) et au fait que Y est non singulier, on peut trouver un fibré à fibre vectorielle de rang 1 sur Y qui induit sur chaque fibre projective le fibré standard (correspondant à une section hyperplane). Sur chaque fibre, les sections de ce fibré forment un espace vectoriel de dimension n ; et l'on obtient ainsi le fibré vectoriel cherché.

On peut aussi démontrer directement que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) (cf. [11], n° 3.4) et que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) (en comparant, au moyen d'une suite exacte, le groupe de Brauer local $H^2_x(G_m)$, et le véritable groupe de Brauer).

COROLLAIRE. - _Si X est une courbe non singulière, tout espace fibré principal de base X et de groupe PGL_n est localement trivial._

Soit P un tel espace fibré. D'après le théorème de Tsen, le groupe de Brauer de $k(X)$ est réduit à 0 ; donc P possède une section rationnelle, et on applique la proposition 18.

REMARQUE. - La comparaison du lemme 4 et de la proposition 18 suggère la question suivante : soit X une variété non singulière, soit G un groupe algébrique connexe et soit P un espace fibré principal de base X et de groupe G. Est-il vrai que, si P possède une section rationnelle, P est localement trivial ?

5.6 Groupe orthogonal.

(Nous supposons pour simplifier que la caractéristique p du corps k est $\neq 2$; lorsque $p = 2$, il faudrait modifier légèrement ce qui suit, et utiliser notamment l'invariant d'Arf à la place du discriminant).

Soit $O(n)$ le groupe orthogonal de dimension n. L'espace homogène $GL_n/O(n)$ s'identifie au point de vue ensembliste à l'espace Q_n des formes quadratiques non dégénérées $\sum_{i \leq j} u_{ij}x_i x_j$, $\det(u_{ij}) \neq 0$. Si l'on munit Q_n de sa structure évidente de variété algébrique (ouvert dans l'espace affine de dimension $n(n+1)/2$), on vérifie que l'application tangente à $GL_n/O(n) \to Q_n$ est partout surjective, donc que c'est un isomorphisme. D'après la proposition 9, un fibré principal de groupe $O(n)$ correspond donc biunivoquement à un fibré à fibre vectorielle dont chaque fibre est munie d'une forme quadratique non dégénérée, les coefficients de cette forme étant fonctions régulières du point (ce qui a un sens localement). Un tel fibré est localement trivial en $x \in X$ si l'on peut trouver, au voisinage de x, n sections formant en chaque point voisin de x une base orthonormale.

De même, un fibré principal de groupe $O_+(n)$ correspond à un fibré orthogonal E dont chaque fibre est "orientée" (cela signifie qu'on s'est donné une section s de $\wedge^n E$ de carré égal à 1). On voit immédiatement quand un tel fibré est trivial (resp. localement trivial). On montre en particulier que tout fibré principal de groupe $O_+(n)$ et de base une courbe non singulière est localement trivial (cette propriété est-elle vraie pour tous les groupes linéaires connexes ?).

6. Comparaison avec les espaces fibrés analytiques.

Dans tout ce numéro, on a $k = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On rappelle que tout espace algébrique X définit fonctoriellement un espace analytique X^h, et tout faisceau algébrique cohérent $\underline{F}$ sur X définit un faisceau analytique cohérent $\underline{F}^h$; le faisceau $(\underline{O}_X)^h$ sera noté $\underline{H}_X$, c'est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X. Pour plus de détails, voir GAGA et GROTHENDIECK ([3], exposé n° 2).

6.1 Revêtements non ramifiés.

Soit T un espace analytique. Nous dirons qu'un morphisme (analytique) $f : Z \to T$ est un revêtement fini non ramifié s'il est propre, et si c'est un isomorphisme local en chaque point $z \in Z$.

PROPOSITION 19. - Si $\pi : Y \to X$ est un revêtement algébrique non ramifié, $\pi^h : Y^h \to X^h$ est un revêtement analytique non ramifié.

Puisque π est propre, il en est de même de π^h (GROTHENDIECK [3], page 2.08) ; de plus, l'image directe du faisceau $\underline{H}_Y$ est un faisceau cohérent sur X^h ([3], loc.cit.). Or, si $x \in X$, le module ponctuel $\pi(\underline{H}_Y)_x$ n'est autre que le composé direct $\prod \underline{H}_y$, pour les y se projetant en x. Il s'ensuit que chacun des $\underline{H}_y$ est un $\underline{H}_x$-module de type fini. Mais on sait que $\hat{\underline{H}}_x = \hat{\underline{O}}_x$ et de même pour y (cf. GAGA) ; comme le revêtement $Y \to X$ est non ramifié, on en déduit $\hat{\underline{H}}_y = \hat{\underline{H}}_x$, d'où $\underline{H}_y = \underline{H}_x$ d'après les propriétés bien connues des complétions des modules de type fini. Ceci signifie que π^h est un isomorphisme local en y,

C. Q. F. D.

[On peut donner une démonstration plus élémentaire, en remarquant que Y peut s'obtenir localement par une équation du type :

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 , \quad a_i \in \underline{O}_x ,$$

qui est non ramifiée au sens suivant : les valeurs α_i des a_i en x sont telles que l'équation réduite $z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ aient toutes ses racines distinctes. L'espace Y^h est défini localement par la même équation (*), et on doit montrer que celle-ci se décompose en produit $\prod_{1 \leq i \leq n} (z - z_i)$, avec $z_i \in \underline{H}_x$, ce qui est immédiat].

PROPOSITION 20. - Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement algébrique non ramifié, soit Z un espace algébrique, soit $f : Z \to X$ un morphisme algébrique, et soit $g : Z^h \to Y^h$ un morphisme analytique tel que $\pi^h \circ g = f^h$. Alors g est algébrique.

En prenant l'image réciproque $Z \times_X Y$, on se ramène au cas $Z = X$, autrement dit au cas d'une section holomorphe $s : X^h \to Y^h$. On doit prouver que cette section est algébrique. On peut supposer X connexe ; $s(X^h)$ est alors une composante connexe de Y^h. Mais on sait (cf. par exemple WEIL [21], p. 166) que les composantes connexes de l'espace analytique Y^h ne sont autres que les composantes connexes de l'espace algébrique Y. Il s'ensuit bien que s est algébrique,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Si Y et Y' sont deux revêtements algébriques non ramifiés de X, tout isomorphisme analytique de ces revêtements est algébrique.

Soit alors $T \to X^h$ un revêtement fini analytique non ramifié de X^h ; d'après le corollaire précédent, la phrase " T est un revêtement algébrique" a un sens précis. On peut se demander si c'est toujours le cas. C'est vrai lorsque X est complète (voir plus loin), ou normale (d'après GRAUERT-REMMERT) ; j'ignore ce qu'il en est en général.

6.2 Espace fibré analytique défini par un espace fibré algébrique.

PROPOSITION 21. - Soient X un espace algébrique, G un groupe algébrique et P un espace fibré principal (localement isotrivial) de base X et de groupe G. L'espace analytique P^h est alors un espace fibré principal analytique (localement trivial) de base X^h et de groupe G^h.

En effet, P^h devient localement trivial sur un revêtement non ramifié $U'^h \to U^h$, où U est un voisinage d'un point x donné dans X. Comme un revêtement non ramifié est localement un produit (au point de vue analytique), on en déduit que P^h est localement trivial.

6.3 Cas où la base est complète.

Lorsque X est complète, les raisonnements de GAGA, n° 20 s'appliquent sans modifications. Nous nous bornerons à énoncer les résultats que l'on obtient ainsi :

PROPOSITION 22. - Tout isomorphisme analytique entre deux espaces fibrés algébriques principaux de base X et de groupe G est algébrique.

PROPOSITION 23. - Soit H un sous-groupe algébrique de G, et soit P un espace fibré principal analytique, de base X^h et de groupe H^h. Pour que P soit algébrique, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de l'espace $P \times^H G$ déduit de P par extension du groupe structural de H à G.

De plus, tout espace fibré principal analytique de groupe GL_n est algébrique (cf. GAGA, porposition 18, et [3], page 2.14, théorème 6). En combinant ce résultat avec la proposition 23, on obtient :

THÉORÈME 3. - Si G est un groupe algébrique linéaire, tout espace fibré analytique principal de base X^h et groupe G^h est algébrique.

En général, cet espace fibré algébrique n'est que localement isotrivial ; toutefois, si G est spécial, il est localement trivial : c'est le cas traité dans GAGA.

COROLLAIRE. - Tout revêtement analytique fini non ramifié de X^h est algébrique.

En effet un groupe fini est linéaire.

Le théorème 3 ne s'étend pas au cas d'un groupe G qui n'est pas linéaire. On a toutefois le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Soit G un groupe algébrique connexe, et soit A le plus grand quotient de G qui soit une variété abélienne. Soit P un espace fibré analytique principal de base une variété algébrique non singulière complète X^h, et de groupe G^h ; soit $p_A \in H^1(X^h, \underline{A}^h)$ la classe de l'espace fibré analytique de groupe A^h déduit de P par extension du groupe structural de G^h à A^h. Pour que P soit algébrique, il faut et il suffit que p_A soit un élément d'ordre fini dans $H^1(X^h, \underline{A}^h)$.

La condition est nécessaire, d'après le lemme 7 du numéro 5.3. Inversement, soit n un entier $\geqslant 1$ tel que $n.p_A = 0$, et soit N le noyau de l'homothétie de rapport n dans A ; l'espace fibré principal de groupe A/N déduit de P par extension du groupe structural est donc analytiquement trivial. Soit S l'image réciproque de N dans G ; comme $G/S = A/N$, l'analogue analytique de la proposition 12 montre que p_A est image d'un élément $y \in H^1(X^h, \underline{S}^h)$. Puisque le groupe S est linéaire, l'espace fibré principal correspondant à y est algébrique, et il en est de même de P,

C. Q. F. D.

REMARQUE. - Lorsque $G = A$, on voit que les éléments algébriques de $H^1(X^h, \underline{A}^h)$ sont exactement les éléments de torsion, ou, ce qui revient au même, les éléments qui deviennent triviaux sur une extension abélienne non ramifiée de X^h. On comparera avec les résultats de BLANCHARD [2], donnant des critères pour que P soit kählérien ou projectif (lorsque X est elle-même supposée projective).

6.4 Un exemple d'espace fibré projectif qui ne provient pas d'un espace fibré linéaire.

Il est facile de donner de tels exemples lorsqu'on se place à un point de vue "birationnel", c'est-à-dire lorsqu'on n'exige aucune propriété particulière de la base : en effet, on sait que le groupe de Brauer de $k(X)$ est $\neq 0$ si $\dim X \geqslant 2$. Nous nous proposons ici de construire un exemple où la base est une <u>variété projective</u>, définie sur $\underset{\sim}{C}$.

Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement galoisien non ramifié, de groupe de Galois $\mathfrak{g}$, les variétés X et Y étant projectives non singulières (nous les choisirons de façon plus précise ultérieurement). Soit $\varphi : \mathfrak{g} \to PGL_n$ un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans le groupe projectif PGL_n ; par extension du groupe structural, on déduit de Y un espace fibré principal isotrivial P , de base X , et de groupe PGL_n . Nous allons voir qu'on peut choisir Y , X , $\mathfrak{g}$, φ de telle sorte que <u>cet espace fibré ne provienne pas d'un fibré de groupe</u> GL_n , <u>même du point de vue topologique</u> (et <u>a fortiori</u> du point de vue analytique, ou, ce qui revient au même, algébrique).

La suite exacte $1 \to G_m \to GL_n \to PGL_n \to 1$ montre que l'obstruction au "relèvement" de P est un élément du groupe de cohomologie $H^2(X , \underline{C}^*)$, où $\underline{C}^*$ désigne le faisceau des germes d'applications continues de X dans G_m ; ce groupe est lui-même isomorphe à $H^3(X , \underset{\sim}{Z})$, comme on le voit tout de suite. Nous désignerons par $\alpha \in H^3(X , \underset{\sim}{Z})$ l'obstruction en question.

D'autre part, l'image réciproque de GL_n par φ définit une extension E_φ de $\mathfrak{g}$ par G_m , donc un élément de $H^2(\mathfrak{g} , G_m) = H^3(\mathfrak{g} , \underset{\sim}{Z})$; nous désignerons par β cet élément. Le revêtement Y définit, comme on sait, un homomorphisme $\theta_Y : H^q(\mathfrak{g} , \underset{\sim}{Z}) \to H^q(X , \underset{\sim}{Z})$ pour tout entier $q \geqslant 0$; un calcul explicite montre que <u>l'image par</u> θ_Y <u>de l'élément</u> β <u>n'est autre que l'obstruction</u> α <u>définie ci-dessus</u>. Nous aurons donc l'exemple cherché si nous choisissons les données de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i. <u>L'élément</u> $\beta \in H^3(\mathfrak{g} , \underset{\sim}{Z})$ <u>n'est pas nul</u>.

ii. <u>L'homomorphisme</u> $\theta_Y : H^3(\mathfrak{g} , \underset{\sim}{Z}) \to H^3(X , \underset{\sim}{Z})$ <u>est injectif</u>.

La condition (i) signifie que l'extension E_φ de $\mathfrak{g}$ par G_m n'est pas triviale. Nous la vérifierons en prenant pour $\mathfrak{g}$ le "viergruppe" $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$, plongé dans le groupe projectif PGL_2 au moyen des matrices $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; le groupe E_φ n'est pas commutatif (les matrices ci-dessus ne commutent pas dans GL_2 , mais seulement dans PGL_2), donc $\beta \neq 0$.

Pour la condition (ii), nous utiliserons la construction donnée dans [17], n° 20 ; on obtient ainsi un revêtement $Y \to X$ ayant pour groupe de Galois $\mathfrak{g}$, Y étant une intersection complète non singulière de dimension r arbitraire (nous prendrons $r \geqslant 3$) ; le groupe $\mathfrak{g}$ opère sur l'espace projectif contenant Y au moyen d'une représentation linéaire convenable. On écrit la suite spectrale de Cartan-Leray du revêtement $Y \to X$; le terme E_2 est $H^*(\mathfrak{g}, H^*(Y, \underset{\sim}{Z}))$. Les propriétés connues des intersections complètes, et l'hypothèse $r \geqslant 3$ montrent que $H^1(Y, \underset{\sim}{Z}) = 0$ et que $H^2(Y, \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}$, un générateur étant fourni par une section hyperplane de Y. Dans le suite spectrale, on voit que le noyau de $\theta_Y : H^3(\mathfrak{g}, \underset{\sim}{Z}) \to H^3(X, \underset{\sim}{Z})$ est égal à l'image de $d_3 : H^2(Y, \underset{\sim}{Z}) \to H^3(\mathfrak{g}, \underset{\sim}{Z})$, et on doit montrer que ce dernier homomorphisme est nul, autrement dit que le générateur de $H^2(Y, \underset{\sim}{Z})$ provient d'un élément de $H^2(X, \underset{\sim}{Z})$. En fait, on va voir qu'il existe un diviseur D de Y, dont la classe est celle de la section hyperplane, et qui est stable par $\mathfrak{g}$, donc qui provient d'un diviseur de X par image réciproque ; cela démontrera notre assertion. Soit t l'une des coordonnées projectives; le groupe $\mathfrak{g}$ opère sur ces coordonnées par construction ; on peut donc faire le quotient t^σ/t, $\sigma \in \mathfrak{g}$, qui est une fonction rationnelle sur Y, dépendant de σ, soit φ_σ. Il est clair que φ_σ est un 1-cocycle de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $k(Y)^*$; d'après le "théorème 90" (ou bien 4.4 (a), c'est la même chose), ce cocycle est un cobord, i.e. s'écrit $\varphi_\sigma = g^\sigma/g$, avec $g \in k(Y)^*$. Le diviseur de tg^{-1} est alors le diviseur cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARSOTTI (Iacopo). - Structure theorems for group-varieties, Ann. Mat. pura ed appl., Série 4, t. 38, 1955, p. 77-119.

[2] BLANCHARD (André). - Sur les variétés analytiques complexes, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Série 3, t. 73, 1956, p. 157-202 (Thèse Sc. math. Paris. 1956).

[3] CARTAN (Séminaire H.) t. 9, 1956/57, Topologie (à paraître).

[4] CARTAN-CHEVALLEY (Séminaire) t. 8, 1955/56, Géométrie algébrique.

[5] CARTIER (Pierre). - Calcul différentiel sur les variétés algébriques en caractéristique non nulle, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 245, 1957, p. 1109-1111.

[6] CHEVALLEY (Claude). - Intersections of algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, 1945, p. 1-85.

[7] CHEVALLEY (Séminaire C.) t. 1, 1956-58, Classification des groupes de Lie algébriques.

[8] CHEVALLEY (Claude). - La notion de correspondance propre en géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58, n° 152.

[9] FRENKEL (Jean). - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 135-220 (Thèse Sc. math. Paris, 1956).

[10] GROTHENDIECK (Alexandre). - A general theory of fibre spaces with structure sheaf. - Lawrence, University of Kansas, 1955 (Report n° 4).

[11] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.

[12] GROTHENDIECK (Alexandre). - The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Congrès international des Mathématiciens [1958. Edinburgh] (à paraître).

[13] LANG (S.) and TATE (J.). - Principal homogeneous spaces over abelian varieties, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 659-684.

[14] ROSENLICHT (Maxwell). - Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 401-443.

[15] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

[16] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.

[17] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p, Symposium de Topologie algébrique [1956. Mexico] (à paraître).

[18] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes, Cours du Collège de France 1957. - Paris, Hermann (à paraître).

[19] WEIL (André). - Fibre spaces in algebraic geometry, Notes rédigées par A. Wallace d'après le cours de 1952. - University of Chicago, Dept of Math., 1955 (multigraphié).

[20] WEIL (André). - Variétés abéliennes et courbes algébriques. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind., 1064 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 8).

[21] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1267).