Séminaire Claude Chevalley

Jean-Pierre Serre

Morphismes universels et différentielles de troisième espèce

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 11, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A11_0>

MORPHISMES UNIVERSELS ET DIFFÉRENTIELLES DE TROISIÈME ESPÈCE

par Jean-Pierre SERRE

Dans ce qui suit, X désigne une variété projective non singulière sur le corps K. On se donne sur X un nombre fini de sous-variétés de codimension 1, soient $D_1, \ldots, D_r$; on note Y la variété $X - D$, où $D = \bigcup D_i$. Si $\mathcal{S}$ désigne la catégorie des groupes algébriques qui sont extension d'une variété abélienne par un tore, on sait (cf. exposé 10, théorème 7) qu'il existe un morphisme $f : Y \to G$, $G \in \mathcal{S}$, qui est universel pour $\mathcal{S}$; le problème consiste à construire explicitement ce morphisme ; c'est ce que nous ferons au n° 1 en utilisant la théorie de la variété de Picard. De plus, les formes différentielles sur X qui sont images réciproques par f de formes invariantes sur G ne sont autres (dans le cas classique) que les formes dites "de troisième espèce", admettant pour "résidu" une combinaison linéaire des D_i ; de ce point de vue, la construction du n° 1 est essentiellement équivalente au classique théorème de Severi ([8], p. 91 ; voir aussi [6]).

1. Construction du morphisme universel.

Soit $D(X)$ le groupe des diviseurs de X ; puisque X est non singulière, chacun des D_i définit un élément de $D(X)$, que l'on note encore D_i. Le sous-groupe de $D(X)$ engendré par les D_i est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$; nous le noterons I.

Soit $C(X)$ le groupe des classes de diviseurs de X, et soit P la variété de Picard de X, identifiée à un sous-groupe de $C(X)$. Le noyau de l'homomorphisme $I \to D(X) \to C(X) \to C(X)/P$ sera désigné par J ; on a donc un homomorphisme canonique $\theta : J \to P$ obtenu par restriction de $I \to C(X)$. Le groupe J est un groupe abélien libre de type fini.

On note T le tore dont le groupe des caractères (cf. [1]) est J. On a donc $T = \mathrm{Hom}(J, G_m)$, $J = \mathrm{Hom}(T, G_m)$, le premier "Hom" étant pris sur $\mathbb{Z}$, le second étant pris au sens des groupes algébriques.

On note $\varphi : X \to A$ le morphisme canonique de X dans sa variété d'Albanese ; on sait que la variété de Picard de A s'identifie à celle de X, c'est-à-dire à P. D'autre part, on sait (cf. [4], chapitre VII, n° 16) que le groupe $\mathrm{ext}(A, G_m)$ des extensions de A par G_m s'identifie au groupe P. On en déduit facilement que le groupe $\mathrm{ext}(A, T)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(J, P)$, et comme on a défini plus haut un élément canonique θ dans ce groupe, on trouve ainsi

<u>une extension canonique</u> G <u>de</u> A <u>par</u> T .

On peut considérer G comme un espace fibré principal de base A et de groupe T ; soit $E = X \times_A G$ l'image réciproque par $\varphi : X \to A$ de cet espace fibré ; c'est un espace fibré principal de base X et de groupe T. Pour tout $j \in \mathrm{Hom}(T, G_m) = J$, soit E_j l'espace fibré principal de base X et de groupe G_m déduit de E au moyen de j ; un tel espace fibré correspond à un élément de $C(X)$, on le sait ; ici, par construction même de E, cet élément n'est autre que l'<u>image canonique</u> de j dans $C(X)$. Or, si M est un espace fibré de base X et de groupe G_m, correspondant à une classe de diviseurs $m \in C(X)$, et si Δ est un diviseur de la classe m, il existe une section s de M (au sens fonctions) dont le "diviseur" est Δ ; de plus, cette section est unique, à la multiplication près par un élément de G_m (cela tient au fait que X est complète). En appliquant ce résultat à E_j, on voit qu'il existe une section $g_j : X \to E_j$ dont le diviseur est j lui-même. En prenant une base $j_1, \ldots, j_k$ de J sur $\mathbb{Z}$, on déduit de là l'existence d'une section $g : X \to E$ qui, pour tout j, donne g_j par composition avec $E \to E_j$; cette propriété caractérise g à une translation près par un élément de T. Mais une section de E correspond canoniquement à une fonction de X dans G relevant φ. La fonction g définit donc une fonction $f : X \to G$ déterminée à une translation près par un élément de T. Comme g est régulière en dehors de D, la restriction de f à $Y = X - D$ est un <u>morphisme</u> de Y dans G.

THÉORÈME 1. - <u>Le morphisme</u> $f|Y : Y \to G$ <u>défini ci-dessus est universel pour la catégorie</u> $\mathcal{S}$.

Nous désignerons par π la projection de G sur A, on a $\pi \circ f = \varphi$, par construction même de f.

Soit $k : Y \to G'$ un morphisme de Y dans un groupe G' de la catégorie $\mathcal{S}$; le groupe G' est extension d'une variété abélienne A' par un tore T'. Si l'on compose $Y \to G' \to A'$, on trouve un morphisme $Y \to A'$, et comme A est la variété d'Albanese de Y, on peut factoriser en $Y \to A \to A'$; quitte à faire une translation, on peut supposer que $A \to A'$ est un homomorphisme de groupes. Soit alors G'_A l'extension de A par T' image réciproque de G' par l'homomorphisme $A \to A'$. Les morphismes $Y \to G'$ et $Y \to A$ définissent un morphisme $k_A : Y \to G'_A$, et l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dd, dashed] \\ & G'_A \arrow[dr] & \\ Y \arrow[uurr, "f"] \arrow[ur] \arrow[rr] & & A \end{tikzcd}$$

Tout revient à démontrer qu'il existe un homomorphisme unique ρ de G dans G'_A laissant commutatif le diagramme précédent.

Désignons par J' le groupe des caractères de T' ; à tout élément $j' \in \mathrm{Hom}(T', G_m)$ est associée une extension $j'(G'_A)$ de A par G_m, et un morphisme $k(j')$ de Y dans cette extension. Si l'on considère $k(j')$ comme une fonction sur X, on peut parler du diviseur de cette fonction (car c'est localement une fonction à valeurs dans G_m), et ce diviseur est nécessairement une combinaison linéaire des D_i, c'est-à-dire un élément de I. On a donc obtenu un homomorphisme de J' dans I. En fait, cet homomorphisme applique J' dans J, car la classe du diviseur de $k(j')$ est image réciproque par φ de la classe de diviseurs sur A associée à l'extension $j'(G'_A)$, et on sait que cette dernière appartient à P (cf. [4], loco citato). On a donc un homomorphisme

$$\lambda : J' \to J \quad .$$

Par transposition, cet homomorphisme définit un homomorphisme $\mu : T \to T'$ d'où un homomorphisme $\mu_* : \mathrm{ext}(A, T) \to \mathrm{ext}(A, T')$. Cet homomorphisme μ_* transforme $G \in \mathrm{ext}(A, T)$ en $G'_A \in \mathrm{ext}(A, T')$: cela se voit en identifiant ces deux groupes à $\mathrm{Hom}(J, P)$ et $\mathrm{Hom}(J', P)$, respectivement. Il s'ensuit qu'il existe un homomorphisme $\rho : G \to G'_A$ qui coïncide avec μ sur T, et qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} G'_A \arrow[dr] & & G \arrow[ll, "\rho"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Il reste à comparer $\rho \circ f$ et k_A. Cela se fait en remarquant que ces morphismes définissent deux sections (fonctions) au-dessus de X d'un même espace fibré de groupe T', et que ces deux sections ont même diviseur (pour tout $j' \in J'$) ; elles coïncident donc à la multiplication près par un élément de T'. Quitte à effectuer une translation sur ρ, on peut supposer que $\rho \circ f = k_A$. Enfin, si $\rho' \circ f = k_A$, ρ' étant un autre homomorphisme affine, ρ' doit appliquer T dans T', et le raisonnement précédent, pris en sens inverse, montre qu'il coïncide avec μ sur T ; on a alors nécessairement $\rho = \rho'$, ce qui achève de démontrer la propriété universelle de $f|Y$.

EXEMPLE. - Si X est une courbe, les D_i sont des points, et J est formé des combinaisons linéaires $\sum n_i D_i$, avec $\sum n_i = 0$; c'est un groupe libre de rang $r - 1$. Le groupe G construit ci-dessus est la jacobienne généralisée de X pour le module $\mathfrak{m} = \sum D_i$, (cf. [4], chapitre V, n° 17).

2. Images réciproques des différentielles invariantes sur G .

Rappelons d'abord la définition des formes de troisième espèce :

Soit α une forme différentielle de degré 1 sur X . On dit que α est de troisième espèce si, au voisinage de tout point $P \in X$, il est possible d'écrire α sous la forme

$$\alpha = \sum c_i \, df_i/f_i + \beta \quad ,$$

où les f_i sont des fonctions numériques, les c_i des constantes, et la forme β une forme régulière en P .

La décomposition ci-dessus n'est évidemment pas unique ; toutefois, on montre que le diviseur local (à coefficients dans K) $\sum c_i(f_i)$ est bien déterminé ; en faisant varier P , on obtient un diviseur sur X à coefficients dans K (c'est-à-dire un élément de $K \otimes D(X)$) ; on l'appelle le résidu de α , et on le note $\mathrm{Res}(\alpha)$. Pour qu'une sous-variété irréductible Δ de X soit variété polaire de α , il faut et il suffit que le coefficient de Δ dans $\mathrm{Res}(\alpha)$ soit non nul. En particulier, α est régulière sur X ("de première espèce") si et seulement si $\mathrm{Res}(\alpha) = 0$.

Soit maintenant $\omega \in s_G$ une forme différentielle de degré 1 invariante sur le groupe G construit au n° 1 , la restriction ω_T de ω à T est une forme invariante sur T , et l'on obtient ainsi toutes les formes invariantes sur T . D'autre part, T a pour groupe de caractères J , qui est un sous-groupe de I ; donc T est image du tore correspondant à I , tore qui n'est autre que $(G_m)^r$. L'image réciproque dans $(G_m)^r$ de ω_T sera notée $P\omega$; on peut l'écrire $P\omega = \sum c_i \, dx_i/x_i$, ou les x_i désignent les coordonnées naturelles de $(G_m)^r$. On vérifie tout de suite que l'on obtient ainsi tous les systèmes (c_i) qui sont combinaisons linéaires à coefficients dans K de systèmes $(n_i) \in J$; nous noterons KJ l'ensemble de ces systèmes. Avec ces notations, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2. - Si ω est une forme différentielle invariante de degré 1 sur G , la forme $f^*\omega$ est une forme de troisième espèce sur X . De plus,

<u>si</u> $P\omega = \sum c_i\, dx_i/x_i$, <u>on a</u> $\mathrm{Res}(f^*\omega) = \sum c_i D_i$.

COROLLAIRE. - <u>Pour qu'un diviseur sur</u> X <u>à coefficients dans</u> K <u>soit résidu d'une différentielle de la forme</u> $f^*\omega$, $\omega \in s_G$, <u>il faut et il suffit qu'il appartienne à</u> KJ .

On sait (exposé 10, démonstration du lemme 6) que f^* est une forme différenètielle de troisième espèce. Il reste à calculer son résidu. Par linéarité, on peut supposer que ω est image réciproque d'une forme invariante π_j du groupe G_j déduit de G par $j : T \to G_m$, et que cette forme π_j induit sur $G_m \subset G_j$ la forme dx/x . On a donc $f^*\omega = f_j^*(\pi_j)$, en notant $f_j : X \to G_j$ la fonction canonique de X dans G_j . Si l'on se place au voisinage d'un point $P \in X$, on peut identifier G_j à un produit $U \times G_m$, U étant un ouvert de A (cf. la démonstration du lemme 6, exposé 10, citée plus haut), et la forme π_j s'écrira alors $\gamma_j + dx/x$, ou γ_j est image réciproque d'une forme régulière sur U . La fonction f_j peut être considérée comme un couple (φ , h_j) , ou $\varphi : X \to A$ est l'application canonique de X dans sa variété d'Albanese, et où $h_j : X \to G_m$ est une fonction numérique. De plus, d'après la construction même de f , le diviseur de h_j est égal à j . Il s'ensuit que dh_j/h_j a pour résidu j , et comme dh_j/h_j est égal à $f_j^*(\pi_j)$ à une forme régulière près, cela démontre le théorème.

EXEMPLE. - Supposons que X soit une courbe de genre g ; les D_i $(i = 1 , \dots , r)$ sont des points $P_i \in X$. D'après le corollaire ci-dessus, un diviseur $\sum c_i P_i$ est résidu d'une différentielle $f^*\omega$ si et seulement si $\sum c_i = 0$, condition qui était de toutes façons nécessaire d'après la formule des résidus. Soit alors α une forme de troisième espèce sur X , régulière en dehors des P_i ; d'après ce qui précède, il existe $\omega_0 \in s_G$ telle que $\mathrm{Res}(\alpha) = \mathrm{Res}(f^*\omega_0)$; la forme $\alpha - f^*\omega_0$ est donc une forme de première espèce, donc provient de la variété d'Albanese (jacobienne) de X . On en conclut que α est de la forme $f^*\omega$, avec $\omega \in s_G$ (pour une autre démonstration, voir [4], p. 97).

Nous verrons au n° 3 que ce résultat s'étend aux variétés de dimension arbitraire, pourvu que la caractéristique du corps K soit zéro (il y a des contre-exemples d'IGUSA en caractéristique p , cf. [2]).

3. <u>Le cas classique</u>.

Nous supposons maintenant que le corps de base K est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes , la variété X est donc une variété <u>kählérienne</u>.

Si Δ est un diviseur sur X, nous noterons $h(\Delta)$ la classe de cohomologie entière de degré 2 qui lui est attachée (cf. par exemple [7], chapitre V). Si l'on note $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}^*$) le faisceau des fonctions holomorphes (resp. holomorphes non nulles) sur X, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0 \qquad ,$$

et si $\Delta \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$, on a $h(\Delta) = \delta(\Delta) \in H^2(X, \underset{\sim}{Z})$, le cobord étant pris par rapport à la suite exacte précédente.

THÉORÈME 3. - <u>Pour que</u> Δ <u>soit algébriquement équivalent à zéro, il faut et il suffit que</u> $h(\Delta)$ <u>soit nul</u>.

(On dit qu'un diviseur est algébriquement équivalent à zéro si son image dans le groupe des classes de diviseurs appartient à la variété de Picard).

Vu la suite exacte $H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X, \underset{\sim}{Z})$, le théorème 3 revient à dire que l'image de $H^1(X, \mathcal{O})$ dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ n'est autre que la variété de Picard de X, résultat bien connu (voir par exemple [3]).

Soit $\varepsilon : H^2(X, \underset{\sim}{Z}) \longrightarrow H^2(X, \underset{\sim}{C})$ l'homomorphisme induit par la multiplication par $2i\pi$ sur les coefficients. Nous noterons $c(\Delta)$ l'image de $h(\Delta)$ par ε. L'application c se prolonge par linéarité aux diviseurs <u>à coefficients complexes</u>.

THÉORÈME 4. (WEIL, [5]). - <u>Soit</u> $\Delta = \sum c_i D_i$ <u>un diviseur à coefficients complexes. Pour qu'il existe une forme</u> α <u>de troisième espèce sur</u> X <u>telle que</u> $\mathrm{Res}(\alpha) = \Delta$, <u>il faut et il suffit que</u> $c(\Delta) = 0$.

Rappelons brièvement la démonstration. Soit Ω^1 le faisceau des germes de formes holomorphes sur X. On sait (théorème de Dolbeault) que $H^1(X, \Omega^1)$ s'identifie à la composante $H^{1,1}(X, \underset{\sim}{C})$ de $H^2(X, \underset{\sim}{C})$. D'autre part, l'homomorphisme de faisceaux défini par $f \longrightarrow df/f$ envoie $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ dans $H^1(X, \Omega^1)$. On en déduit par composition un homomorphisme $H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X, \underset{\sim}{C})$ <u>qui coïncide avec l'homomorphisme</u> c <u>défini plus haut</u> (cf. [7], <u>loco citato</u>). Dire que $c(\Delta) = 0$ revient donc à dire que l'image de Δ dans $H^1(X, \Omega^1)$ est nulle. Or, si l'on recouvre X par des ouverts U_λ et si sur chaque U_λ on représente Δ par $\sum c_i(f_i^\lambda)$, on pourra donc trouver des formes π_λ holomorphes sur U_λ, telles que

$$\sum c_i \, df_i^\lambda/f_i^\lambda - \sum c_i \, df_i^\mu/f_i^\mu = \pi_\lambda - \pi_\mu \quad \text{sur } U_\lambda \cap U_\mu \quad .$$

Mais alors la forme

$$\alpha = \sum c_i \, df_i^\lambda/f_i^\lambda - \pi_\lambda = \sum c_i \, df_i^\mu/f_i^\mu - \pi_\mu$$

est une forme de troisième espèce (au sens analytique, donc aussi algébrique) admettant Δ pour résidu. Le même raisonnement, pris en sens inverse, montre que l'existence d'une telle forme implique la nullité de $c(\Delta)$.

COROLLAIRE 1. - <u>Pour qu'il existe une forme de troisième espèce sur</u> X <u>admettant</u> Δ <u>pour résidu, il faut et il suffit que</u> $\Delta \in KJ$ (les notations étant celles du n° 1).

En effet, le théorème 3 montre que J est l'ensemble des $\Delta = \sum n_i D_i$ tels que $h(\Delta) = 0$, donc JK est l'ensemble des Δ tels que $c(\Delta) = 0$.

COROLLAIRE 2. - <u>Toute forme de troisième espèce sur</u> X <u>qui est régulière sur</u> Y <u>est de la forme</u> $f^* \omega$, <u>avec</u> $\omega \in s_G$.

Soit α une telle forme. D'après le corollaire au théorème 2 et le corollaire 1 au théorème 4, il existe $\omega_0 \in s_G$ telle que $\mathrm{Res}(\alpha) = \mathrm{Res}(\omega_0)$. La forme $\alpha - \omega_0$ est donc partout régulière, et l'on sait qu'une telle forme est image réciproque d'un élément de s_A, donc aussi d'un élément de s_G. D'où le résultat.

COROLLAIRE 3. - <u>Toute forme de troisième espèce sur</u> X <u>est fermée.</u>

En effet, il en est ainsi des formes $f^* \omega$, avec $\omega \in s_G$.

REMARQUE. - Les corollaires ci-dessus s'énoncent de façon purement algébrique. Comme ils sont vrais sur le corps $\mathbb{C}$, le "principe de Lefschetz" montre qu'ils sont vrais sur tout corps algébriquement clos de caractéristique 0. En caractéristique p, les corollaires 1 et 2 peuvent être en défaut, comme on l'a signalé plus haut ; j'ignore ce qu'il en est du corollaire 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Généralités sur les groupes algébriques affines, Groupes algébriques affines commutatifs, Séminaire Chevalley, t. 1, 1956/57 : Classification des groupes de Lie algébriques, exposé n° 4.

[2] IGUSA (Jun-Ichi). - On some problems in abstract algebraic geometry, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 41, 1955, p. 964-967.

[3] KODAIRA (K.) and SPENCER (D.). - Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, Divisor class groups on algebraic varieties, Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 39, 1953, p. 868-877.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1264 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 7).

[5] WEIL (André). - Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe, Comment. math. Helvet., t. 20, 1947, p. 110-116.

[6] WEIL (André). - Variétés abéliennes, Algèbre et Théorie des nombres [1949. Paris] ; p. 124 127. - Paris, Centre National de la Recherche scientifique, 1950 (Colloques intern. C. N. R. S., 24).

[7] WEIL (André). - Introduction à l'étude des variétés kählériennes. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et Ind., 1267 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 6).

[8] ZARISKI (Oscar). - Algebraic surfaces. - New York, Chelsea publishing Company, 1948 (Ergebnisse der Mathematik, Band 3, Heft 5).