Séminaire Claude Chevalley

Jean-Pierre Serre

Morphismes universels et variété d'Albanese

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 10, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A10_0>

MORPHISMES UNIVERSELS ET VARIÉTÉ D'ALBANESE

par Jean-Pierre SERRE

1. Morphismes maximaux.

Soit V une variété, et soit $f : V \longrightarrow A$ un morphisme de V dans un groupe algébrique commutatif A. Soit A' le sous-groupe de A engendré par les $f(x) - f(y)$, pour x et y parcourant V ; c'est un sous-groupe algébrique (c'est-à-dire fermé) et irréductible de A. En effet, notons f^n le morphisme de V^{2n} dans A défini par la formule :

$$f^n(x_1 , \ldots , x_n ; y_1 , \ldots , y_n) = f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(y_1) - \ldots - f(y_n) ,$$

et soit W_n l'image de V^{2n} par f^n. Les ensembles W_n sont constructibles, irréductibles, et croissent avec n ; il existe donc un entier m tel que l'adhérence $\overline{W}_n$ de W_n soit indépendante de n pour $n \geq m$. On a $W_n + W_n = W_{2n}$, ce qui montre que $\overline{W}_m$ est un sous-groupe (évidemment connexe et fermé) de A. Mais W_m, étant constructible, contient un ouvert de son adhérence $\overline{W}_m$, et il en résulte aussitôt que $W_m + W_m = \overline{W}_m$, d'où $W_{2m} = \overline{W}_m$, ce qui prouve que $\overline{W}_m$ n'est autre que A'.

Le même raisonnement montre que A' ne change pas lorsqu'on remplace V par un ouvert non vide $U \subset V$, et f par $f|U$ [autrement dit, A' a un caractère "birationnel"].

DÉFINITION 1. - <u>On dit que le morphisme</u> $f : V \longrightarrow A$ <u>engendre</u> A <u>si l'on a</u> $A' = A$.

Il revient au même de dire que l'image de V par f n'est contenue dans aucun ensemble de la forme $a + B$, $a \in A$, B étant un vrai sous-groupe de A.

Rappelons maintenant qu'un homomorphisme $g : B \longrightarrow A$ de groupes algébriques (irréductibles, comme toujours dans ce séminaire) est appelé une <u>isogénie</u> si g est surjectif, et si son noyau est fini. Cette isogénie est dite <u>séparable</u> (resp. <u>radicielle</u>) si l'extension correspondante $R(B)/R(A)$ est séparable (resp. radicielle).

DÉFINITION 2. - <u>On dit que le morphisme</u> $f : V \longrightarrow A$ <u>est maximal</u> (<u>resp. radiciellement maximal</u>) <u>s'il engendre</u> A, <u>et si toute factorisation de</u> f <u>sous la forme</u> :

$$V \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} A \quad ,$$

<u>ou</u> h <u>est un morphisme, et où</u> g <u>est une isogénie</u> (<u>resp.</u> <u>une isogénie radicielle</u>), <u>entraîne que</u> g <u>est un isomorphisme.</u>

[En termes plus imagés, on ne peut "relever" f à aucune isogénie non triviale (resp. ... , etc.)].

EXEMPLES.

1° Si $A = 0$, tout morphisme $f : V \longrightarrow A$ est maximal.

2° Si V est une courbe non singulière, et si $f : V \longrightarrow J$ est son application canonique dans sa jacobienne, l'application f est maximale.

REMARQUE. - Dans les définitions 1 et 2, ce n'est pas vraiment la structure de groupe de A qui intervient, mais seulement sa structure "affine", c'est-à-dire sa structure d'espace homogène principal sur lui-même ; il en est de même dans les numéros ci-dessous.

2. <u>Factorisation des morphismes d'une variété dans un groupe algébrique commutatif.</u>

Si A et B sont deux groupes algébriques commutatifs, nous dirons qu'une application $h : B \longrightarrow A$ est un <u>homomorphisme affine</u> si c'est la composée d'un homomorphisme du groupe algébrique B dans le groupe algébrique A et d'une translation de A . Le noyau de la composante homogène de h est appelé simplement le <u>noyau</u> de h . Dire qu'un morphisme $f : V \longrightarrow A$ est maximal équivaut à dire que toute factorisation de f sous la forme $V \longrightarrow B \xrightarrow{h} A$ où h est un homomorphisme affine surjectif <u>à noyau fini</u> entraîne que h est un isomorphisme (affine, bien entendu).

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> $f : V \longrightarrow A$ <u>un morphisme d'une variété</u> V <u>dans un groupe algébrique commutatif</u> A . <u>On peut factoriser</u> f <u>sous la forme</u> :

$$V \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} A \quad ,$$

<u>ou</u> g <u>est un morphisme maximal, et où</u> h <u>est un homomorphisme affine à noyau fini.</u>

[On peut montrer que cette factorisation est unique, à un isomorphisme unique près].

Soit A' le sous-groupe de A engendré par les $f(x) - f(y)$, $x, y \in V$. Le morphisme f se factorise en $V \xrightarrow{f'} A' \xrightarrow{i} A$ en posant $f'(x) = f(x) - f(x_0)$, $i(a') = a' + f(x_0)$, x_0 étant un point choisi arbitrairement dans V . Quitte à remplacer A par A' , on voit donc que l'on peut supposer que $A' = A$, c'est-à-dire que f <u>engendre</u> A . Si f est maximale, le théorème est démontré. Sinon, il existe une isogénie non triviale $h_1 : A_1 \longrightarrow A$ telle que f se factorise en $f = h_1 \circ f_1$ où f_1 est un morphisme de V dans A_1. Il est clair que f_1 engendre A_1 ; si f_1 est maximale, le théorème est démontré (en posant $B = A_1$, $g = f_1$, $h = h_1$). Sinon, il existe une isogénie non triviale $h_2 : A_2 \longrightarrow A_1$ telle que f_1 se factorise en $f_1 = h_2 \circ f_2$, etc. Tout revient à montrer que cette suite d'opérations ne peut se poursuivre indéfiniment. Supposons que ce soit le cas, et choisissons un entier n assez grand pour que l'application $f^n : V^{2n} \longrightarrow A$ définie au numéro 1 soit dominante. On voit tout de suite qu'il en est alors de même des applications f_i^n, $i = 1, 2, \ldots$ Comme ces applications sont dominantes, leurs cohomomorphismes identifient les corps de fonctions rationnelles $R(A)$, $R(A_1)$, $R(A_2)$, ... à des sous-corps de $R(V^{2n})$; on obtient ainsi une suite strictement croissante de sous-corps de $R(V^{2n})$, et la réunion de ces corps n'est pas une extension de type fini de $R(A)$; comme $R(V^{2n})$ est extension de type fini de $R(A)$, on obtient un résultat en contradiction avec le lemme suivant :

LEMME 1. - Soit M une extension de type fini d'un corps E. Toute sous-extension F de M est de type fini sur E.

Soit $(x_1, \ldots, x_s)$ une base de transcendance de F sur E, et complétons-la en une base de transcendance $(x_1, \ldots, x_s ; y_1, \ldots, y_r)$ de M sur E. Alors F est extension algébrique de $E(x)$, et, puisque $E(x, y)$ est pure sur $E(x)$, les extensions $F/E(x)$ et $E(x, y)/E(x)$ sont linéairement disjointes. On a donc

$$[F : E(x)] = [F(y) : E(x, y)] \leq [M : E(x, y)] \quad .$$

Comme M est de type fini sur $E(x, y)$, on a $[M : E(x, y)] < +\infty$, d'où le même résultat pour $[F : E(x)]$, ce qui montre que F est de type fini sur $E(x)$, donc sur E.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ une catégorie de groupes algébriques commutatifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

I. Si A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{C}$, on a $A_1 \times A_2 \in \mathcal{C}$.

II. Si $f : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme à noyau fini, et si $B \in \mathcal{C}$, alors $A \in \mathcal{C}$.

La condition II entraîne en particulier qu'un sous-groupe fermé d'un groupe de la catégorie appartient à la catégorie.

DÉFINITION 3. - Soit $f : V \longrightarrow A$ un morphisme. On dit que f est universel pour $\mathcal{C}$ si l'on a $A \in \mathcal{C}$, et si, pour tout morphisme $f' : V \longrightarrow A'$, où $A' \in \mathcal{C}$, il existe un homomorphisme affine $h : A \longrightarrow A'$ et un seul tel que $f' = h \circ f$.

[Autrement dit, f résoud un problème universel, au sens de [2], chapitre V, numéro 3].

Il est clair que, s'il existe un morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ pour la catégorie $\mathcal{C}$, il est unique, à un isomorphisme unique près.

THÉORÈME 2. - Supposons que $\mathcal{C}$ vérifie les axiomes (I) et (II) ci-dessus. Soit $f : V \longrightarrow A$ un morphisme, avec $A \in \mathcal{C}$. Pour que f soit universel, il faut et il suffit qu'il soit maximal, et que, pour tout morphisme maximal $f' : V \longrightarrow A'$, avec $A' \in \mathcal{C}$, on ait $\dim A' \leq \dim A$.

a. Supposons f universel, et supposons que l'on ait factorisé f en $V \xrightarrow{k} B \xrightarrow{i} A$, où i a un noyau fini ; on a donc $B \in \mathcal{C}$, et la propriété universelle de f montre qu'il existe un homomorphisme affine $h : A \longrightarrow B$ tel que $k = h \circ f$. Comme $f = i \circ k$, on en tire $i \circ h \circ f = f$, d'où $i \circ h = 1$ d'après l'unicité postulée dans la définition 3. Il s'ensuit que h est injectif, ce qui montre que A et B ont même dimension ; comme h est surjectif, il est bijectif, et de même pour i, donc i et h sont des isomorphismes réciproques, ce qui montre que f est maximal. Enfin, si $f' : V \longrightarrow A'$ est maximal, avec $A' \in \mathcal{C}$, il existe $h : A \longrightarrow A'$ tel que $f' = h \circ f$, et h est nécessairement surjectif, puisque f' engendre A' ; d'où $\dim A' \leq \dim A$.

b. Réciproquement, supposons ces propriétés vérifiées, et montrons que f est universel. Soit $f' : V \longrightarrow A'$ un morphisme, avec $A' \in \mathcal{C}$, soit $g : V \longrightarrow A \times A'$ l'application produit des applications f et f'. D'après le théorème 1, on peut factoriser g en

$$V \xrightarrow{k} B \xrightarrow{i} A \times A'$$

où k est maximale, et où i est un homomorphisme affine à noyau fini. D'après (I) et (II), on a $B \in \mathcal{C}$, d'où $\dim B \leq \dim A$. Mais, si l'on note p (resp. p') la projection de $A \times A'$ sur A (resp. A'), on a $p \circ g = f$, d'où $p \circ i \circ k = f$. Comme f engendre A, il s'ensuit que $p \circ i$ est surjectif, et comme $\dim B \leq \dim A$, le noyau de $p \circ i$ est fini ; mais f est maximale, donc $p \circ i$ est un isomorphisme. Notons r l'isomorphisme réciproque, et posons $h = p' \circ i \circ r$; c'est un homomorphisme affine de A dans A', et l'on a $h \circ f = p' \circ i \circ r \circ p \circ i \circ k = p' \circ i \circ k = f'$. Tout homomorphisme h' tel que $h' \circ f = f'$ coïncide nécessairement avec h, puisque f engendre A.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - Pour qu'il existe un morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ pour la variété V et pour la catégorie $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que les dimensions des groupes $A' \in \mathcal{C}$ pour lesquels il existe une application maximale $f' : V \longrightarrow A'$ soient bornées.

Caractère fonctoriel des morphismes universels. - Lorsqu'il existe, le morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ est un foncteur en V et en $\mathcal{C}$. De façon précise :

a. Variation avec V : Soit $\varphi : V \longrightarrow V'$ un morphisme, et supposons que, pour une catégorie $\mathcal{C}$ fixée, les morphismes universels pour $\mathcal{C}$ $f : V \longrightarrow A$ et $f' : V' \longrightarrow A'$ existent. Il existe alors un homomorphisme affine $\varphi_{\mathcal{C}} : A \longrightarrow A'$ et un seul tel que $\varphi_{\mathcal{C}} \circ f = f' \circ \varphi$: cela résulte simplement de la propriété universelle de f.

Supposons en outre que φ soit dominant. Alors l'existence de f entraîne celle de f' ; en effet, si $g : V' \longrightarrow A'$ est un morphisme maximal, on peut factoriser $g \circ \varphi$ en $h \circ f$, où $h : A \longrightarrow A'$ est un homomorphisme affine ; du fait que φ est dominant, le raisonnement du numéro 1 montre que h est surjectif, et l'on a $\dim A' \leqslant \dim A$; on applique alors le corollaire ci-dessus.

Indiquons également, sans démonstration cette fois, deux autres propriétés des morphismes universels :

Variation en fonction d'un paramètre. Soit $f : V \longrightarrow A$ un morphisme universel pour une catégorie $\mathcal{C}$, et soit T une variété. Soit $A' \in \mathcal{C}$ et soit $f' : V \times T \longrightarrow A'$ un morphisme. Pour chaque $t \in T$, il existe un homomorphisme affine $h_t : A \longrightarrow A'$ tel que $h_t \circ f(x) = f'(x, t)$ pour $x \in V$. L'application $h : A \times T \longrightarrow A'$ définie par les $\{h_t\}_{t \in T}$ est un morphisme.

Produits. Si $f : V \longrightarrow A$ et $f' : V' \longrightarrow A'$ sont des morphismes universels pour une catégorie $\mathcal{C}$, l'application produit

$$f \times f' : V \times V' \longrightarrow A \times A'$$

est un morphisme universel pour la catégorie $\mathcal{C}$.

b. Variations avec $\mathcal{C}$: Soit V une variété, et soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories vérifiant (I) et (II), et telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Supposons qu'il existe un morphisme universel $f : V \longrightarrow A'$ pour $\mathcal{C}'$. Il existe alors un morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ pour $\mathcal{C}$ (cela résulte du corollaire ci-dessus), et un homomorphisme affine unique $h : A' \longrightarrow A$ tel que $h \circ f' = f$ (d'après la propriété universelle de f'). En outre, le noyau N de h est connexe, et h définit par passage au quotient un isomorphisme de A'/N sur A ; en effet, si l'on note N_0 la composante connexe du noyau N de h, l'homomorphisme h définit par passage au quotient un homomorphisme affine $i : A'/N_0 \longrightarrow A$ à noyau fini ; comme f est maximal, l'homomorphisme i est un isomorphisme, d'où nos deux assertions.

Exemples. - Nous donnerons plus loin une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'une variété admette un morphisme universel. Indiquons dès maintenant quelques cas particuliers :

1° Si $\mathcal{C}$ est la catégorie des variétés abéliennes, il existe des morphismes universels pour toute variété V (cf. le numéro 4). Il en est de même lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des extensions d'une variété abélienne par un tore (cf. le numéro 5).

2° Si V est complète, il existe des morphismes universels $f : V \longrightarrow A$ pour toute catégorie $\mathcal{C}$ (cf. le numéro 4).

3° Si V est une courbe non complète, et si $\mathcal{C}$ est la catégorie des groupes isomorphes à un produit de groupes additifs G_a, il n'existe pas de morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ pour $\mathcal{C}$. Cela se voit, soit en appliquant le théorème 8 du numéro 6 (et en remarquant que, d'après le théorème de Riemann-Roch, il existe des fonctions régulières non constantes sur V), soit en appliquant la théorie des jacobiennes généralisées de Rosenlicht (cf. [7], chapitre V).

3. Un critère pour les morphismes radiciellement maximaux.

Soit A un groupe algébrique commutatif. Nous noterons t_A l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants sur A ; muni du crochet, c'est une algèbre de Lie.

LEMME 2. - *L'algèbre de Lie t_A est commutative (i. e. $[X , Y] = 0$ pour tout couple X , Y).*

C'est "évident", mais on va tout de même en donner une démonstration, basée sur le fait que t_A est fonctoriel et commute aux produits. Puisque A est commutatif, l'application $r : A \times A \longrightarrow A$ donnée par $r(x , y) = x + y$ est un homomorphisme, donc définit un homomorphisme de l'algèbre de Lie $t_A \times t_A$ dans t_A. On constate aussitôt que cet homomorphisme applique le couple (X , Y) sur $X + Y$. Si X et Y sont deux éléments de t_A, ce sont les images de $(X , 0)$ et de $(0 , Y)$. Mais le crochet de $(X , 0)$ et de $(0 , Y)$ est nul. Donc $[X , Y] = 0$,

C. Q. F. D.

Lorsque la caractéristique est $p \neq 0$, t_A est stable par l'opération $X \longrightarrow X^p$; en vertu du lemme 2 et de la formule du binôme, l'opération $X \longrightarrow X^p$ est semi-linéaire :

$$(\lambda X + \mu Y)^p = \lambda^p X^p + \mu^p Y^p \quad .$$

Nous noterons s_A l'espace dual de t_A ; c'est aussi (voir par exemple [7], chapitre III, numéro 11) l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 1 invariantes sur A.

LEMME 3. - Pour toute forme invariante $\omega \in s_A$, on a $d\omega = 0$.

On applique la formule standard :

$$\langle X \wedge Y , d\omega \rangle = X(\langle Y , \omega \rangle) - Y(\langle X , \omega \rangle) - \langle [X , Y] , \omega \rangle \quad ,$$

en prenant $X , Y \in t_A$. Les termes $\langle Y , \omega \rangle$ et $\langle X , \omega \rangle$ sont des constantes, et le lemme 2 montre que $[X , Y] = 0$, on en déduit $\langle X \wedge Y , d\omega \rangle = 0$ pour tout couple X , Y, d'où $d\omega = 0$.

Supposons maintenant que la caractéristique du corps de base soit $p \neq 0$. Puisque $d\omega = 0$ pour tout $\omega \in s_A$, l'opération de Cartier (cf. exposé 6 et annexe IV au présent exposé) est définie pour une telle forme ; si on la note C, on a le lemme suivant :

LEMME 4. - Pour tout $X \in t_A$ et tout $\omega \in s_A$, $\langle X^p , \omega \rangle = \langle X , C\omega \rangle^p$.

[En d'autres termes, l'opération C est la transposée (au sens des applications semi-linéaires) de l'opération $X \longrightarrow X^p$].

Cela résulte de la formule (démontrée dans l'exposé 6) :

$$\langle X^p , \omega \rangle = \langle X , C\omega \rangle^p + X^{p-1}(\langle X , \omega \rangle) \quad ,$$

compte tenu de ce que $\langle X , \omega \rangle$ est une constante.

Enfin, si V est une variété quelconque, nous noterons $D(V)$ l'ensemble des formes différentielles de degré 1 (rationnelles) de V, c'est-à-dire le $R(V)$-espace vectoriel des différentielles de $R(V)$. Pour toute fonction $f : V \longrightarrow A$, et toute forme $\omega \in s_A$, l'image réciproque $f^*\omega$ de ω par f est définie, et c'est un élément de $D(V)$.

THÉORÈME 3. - Soit V une variété, soit A un groupe algébrique commutatif, et soit $f : V \longrightarrow A$ un morphisme. Si $f^* : s_A \longrightarrow D(V)$ est injectif, f est radiciellement maximal. Inversement, si f est radiciellement maximal, et si V est normale, f^* est injectif (cf. [5]).

a. Supposons f factorisé en $V \longrightarrow B \xrightarrow{i} A$, où i est un homomorphisme affine injectif. Si f^* est injectif, il en est a fortiori de même de $i^* : s_A — s_B$, ce qui entraîne que A et B ont même dimension et que i est un isomorphisme (voir par exemple [5], page 56). Donc f est radiciellement maximal.

b. Supposons maintenant que f soit radiciellement maximal. Distinguons deux b-1. La caractéristique est 0. - Choisissons un entier m assez grand pour que le morphisme $f^m : V^{2m} \to A$ du numéro 1 soit dominant, donc définisse une extension de corps $R(V^{2m})/R(A)$. Vu l'hypothèse sur la caractéristique, cette extension est séparable, et si $\omega \in s_A$ est telle que $(f^{2m})^* \omega = 0$, on a nécessairement $\omega = 0$. Mais on peut calculer la forme $(f^{2m})^* \omega$ à partir de la forme f^* : si l'on note $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ les $2m$ projections de V^{2m} sur V, on a la formule :

$$(f^{2m})^* \omega = p_1^* f^* \omega + \ldots + p_m^* f^* \omega - q_1^* f^* \omega - \ldots - q_m^* f^* \omega .$$

(Cette formule se démontre en factorisant f^{2m} en $V^{2m} \to A^{2m} \to A$, et en appliquant à $A^{2m} \to A$ la proposition 17 de [7], loco citato). Si donc $f^* \omega = 0$, on a aussi $(f^{2m})^* \omega = 0$, d'où $\omega = 0$, et f^* est bien injectif.

b-2. La caractéristique est $p \neq 0$. - Soit n^* le noyau de l'application $f^* : s_A \to D(V)$. La formule $Cf^* = f^* C$ (cf. annexe IV) montre que n^* est stable par C ; en vertu du lemme 4, l'orthogonal n de n^* dans t_A est stable par l'opération de puissance p-ième. La théorie des isogénies radicielles de hauteur 1 (cf. exposé 6) permet alors de construire une isogénie radicielle

$$h : A \to B ,$$

qui soit de hauteur 1 (i. e. $R(B) \supset R(A)^p$), et telle que le noyau de $t_A \to t_B$ soit n. L'application $h \circ f : V \to B$ vérifie la formule : $(h \circ f)^* \omega = 0$ pour toute $\omega \in s_B$. En d'autres termes, l'application tangente à $h \circ f$ est identiquement nulle (en tout point simple de V, pour fixer les idées). Il en résulte facilement que le morphisme $h \circ f$ peut se factoriser en $V \xrightarrow{g} B^{1/p} \to B$, où g est une fonction ; comme V est normale, le "théorème principal" montre que g est un morphisme. De plus, comme h est de hauteur 1, l'application $B^{1/p} \to B$ se factorise en $B^{1/p} \to A \to B$. Du fait que f est radiciellement maximal, ceci implique que $B^{1/p} \to A$ est un isomorphisme, donc que $B \to A^p$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $n = t_A$, d'où $n^* = 0$, ce qui montre bien que f^* est injectif.

COROLLAIRE. - Soit V une variété normale, et soit $\Omega(V)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré 1 sur V qui sont régulières en tout point simple de V. Si $f : V \to A$ engendre A, on a l'inégalité $\dim A \leq \dim \Omega(V)$.

D'après le théorème 1, on peut factoriser f en $V \xrightarrow{g} B \to A$, où g est maximal, et où $B \to A$ est une isogénie. Pour toute forme $\omega \in \Omega(B)$, on a $g^* \omega \in \Omega(V)$ puisque g est un morphisme, et ceci vaut notamment pour $\omega \in s_B$.

En appliquant le théorème 3 à g, on voit que $\dim s_B \leq \dim \Omega(V)$, d'ou le corollaire puisque $\dim s_B = \dim B = \dim A$.

REMARQUES.

1° Dans les énoncés ci-dessus, l'hypothèse de normalité peut être remplacée par l'hypothèse plus faible suivante : pour tout point $P \in V$, on a $O(P) \cap R(V)^p = O(P)^p$, en notant $O(P)$ l'anneau local de P, et p l'exposant caractéristique du corps de base.

2° Dire que $f^* : s_A \longrightarrow D(V)$ est injectif équivaut à dire que, pour tout n assez grand, l'application $f^n : V^{2n} \longrightarrow A$ est surjective et <u>séparable</u> (i. e. son cohomomorphisme définit une extension de corps $R(V^{2n})/R(A)$ qui est séparable). Cela se voit en déterminant l'application tangente à f^n en un point $(P_1 , \ldots , P_n , Q_1 , \ldots , Q_n)$ de V^{2n}.

4. La variété d'Albanese.

Nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5. - *Soit Y une variété complète, soit F un sous-ensemble fermé de Y, et soit $X = Y - F$. Supposons que X soit non singulier et que $\dim F \leq \dim Y - 2$. Si Ω_X désigne le faisceau des germes de formes différentielles régulières de degré 1 sur X, l'espace vectoriel $H^0(X , \Omega_X)$ est de dimension finie.*

En effet, Ω_X est un faisceau cohérent localement libre, donc sans torsion, et l'on applique un résultat général sur les faisceaux cohérents sans torsion (annexe I, corollaire au théorème 9).

On notera que l'espace $H^0(X , \Omega_X)$ n'est autre que l'espace $\Omega(X)$ des différentielles régulières en tout point de X.

THÉORÈME 4. - *Soit V une variété. Supposons qu'il existe une variété complète W et un sous-ensemble fermé F de W, avec $\dim F \leq \dim W - 2$, tels que V soit isomorphe à $W - F$. Alors, pour toute catégorie $\mathcal{C}$, il existe un morphisme universel $f : V \longrightarrow A$ pour $\mathcal{C}$.*

Identifions V à $W - F$. Soit W^* la normalisée de W ; c'est une variété complète. Soit F' l'ensemble des points singuliers de W^*, soit F'' l'image réciproque de F par la projection $W^* \longrightarrow W$, et soit $F^* = F' \cup F''$. On a $\dim F^* \leq \dim W^* - 2$, et le lemme 5, appliqué à W^* et F^*, montre que l'espace $\Omega(W^* - F^*)$ est de dimension finie. Le corollaire au théorème 3, joint au corollaire au théorème 2 montre alors qu'il existe un morphisme universel :

$$f^* : W^* - F^* \longrightarrow A^*$$

pour la catégorie $\mathcal{C}$. Mais la projection $W^* \to W$ induit par restriction un morphisme $\varphi : W^* - F^* \to V = W - F$, et ce morphisme est évidemment dominant. D'après le caractère fonctoriel des morphismes universels (cf. le numéro 2), il existe donc aussi un morphisme universel $f : V \to A$,

C. Q. F. D.

REMARQUE. - Les hypothèses étant celles du théorème 4, soit $f : V \to A$ un morphisme qui engendre A ; il est vraisemblable que A est alors nécessairement une variété abélienne. C'est en tout cas vrai si V est complète (car A est image de V^{2n} pour n assez grand), ou bien si W est projective (en effet, on se ramène tout de suite au cas où A ne contient aucune variété abélienne ; si C est une courbe sur W qui ne rencontre pas F, la restriction de f à C est constante, d'après ce qui précède ; en utilisant le fait que W est projective, et $\dim F \leq \dim W - 2$ on montre alors qu'il y a "suffisamment" de telles courbes pour que la propriété précédente entraîne que f soit constante).

THÉORÈME 5. - Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des variétés abéliennes. Pour toute variété V, il existe un morphisme $f : V \to A$ universel pour $\mathcal{A}$.

Soit V_1 un ouvert affine non singulier de V ; puisque V_1 est affine, on peut le plonger comme ouvert dans une variété projective V_2 ; quitte à normaliser V_2, on peut supposer que V_2 est normale. Soit F l'ensemble des points singuliers de V_2, et soit $V_3 = V_2 - F$. La variété V_3 possède un morphisme universel $f : V_3 \to A$, d'après le théorème 4. D'autre part, d'après une propriété fondamentale des variétés abéliennes (voir exposé 9), toute fonction de V_2 dans une variété abélienne est un morphisme sur V_3 ; donc les morphismes de V_1 et de V_3 dans les variétés abéliennes coïncident. Il s'ensuit que la restriction de f à V_1 est un morphisme universel pour $\mathcal{A}$. Comme l'injection de V_1 dans V est un morphisme dominant, l'argument fonctoriel utilisé plus haut montre l'existence d'un morphisme universel de V pour $\mathcal{A}$,

C. Q. F. D

La variété abélienne A ainsi associée à V est appelée la variété d'Albanese (au sens morphique) de V, et f est l'application canonique de V dans sa variété d'Albanese. Comme on l'a vu plus haut, la variété d'Albanese est un foncteur en V, compatible avec les produits ; ce dernier résultat est ici immédiat, puisqu'on sait que tout morphisme d'un produit $V \times V'$ dans une variété abélienne A est somme d'un morphisme de V dans A et d'un morphisme de V' dans A (cf. exposé 9).

Il faut signaler que, dans la littérature (cf. [3], par exemple), la variété d'Albanese est définie par une propriété universelle portant sur les fonctions et non sur les morphismes. Le théorème suivant indique les relations entre ces deux définitions :

THÉORÈME 6. - Soit V une variété. Soit $f_r : V \longrightarrow A_r$ la fonction canonique de V à valeurs dans sa variété d'Albanese (au sens fonctions). Soit $f : V \longrightarrow A$ le morphisme canonique de V dans sa variété d'Albanese (au sens du texte, c'est-à-dire des morphismes).

i. Il existe alors un homomorphisme affine $g : A_r \longrightarrow A$ et un seul tel que $g \circ f_r = f$. Cet homomorphisme est surjectif.

ii. Si V est normale, le noyau N de g est connexe, et g définit par passage au quotient un isomorphisme de A_r/N sur A .

iii. Si V est non singulière, g est un isomorphisme.

Comme tout morphisme est une fonction, l'assertion (i) résulte du caractère universel de f_r et du fait que f engendre A . Supposons maintenant V normale, et soit N_0 la composante connexe du noyau N de g . En composant $V \longrightarrow A_r \longrightarrow A_r/N_0$ on obtient une fonction $f_0 : V \longrightarrow A_r/N_0$; mais le composé $V \longrightarrow A_r/N_0 \longrightarrow A$ est un morphisme, et l'homomorphisme $A_r/N_0 \longrightarrow A$ a un noyau fini. En appliquant le "théorème principal", on voit que f_0 est un morphisme, et comme f est maximal, l'homomorphisme $A_r/N_0 \longrightarrow A$ est un isomorphisme, ce qui démontre (ii). Enfin, si V est non singulière, toute fonction de V dans une variété abélienne est un morphisme, d'où évidemment (iii).

EXEMPLES.

i. Soit C une courbe elliptique, en caractéristique p , et soit $P \in C$. Soit $O'(P)$ le sous-anneau de l'anneau local $O(P)$ formé des fonctions dont la différentielle s'annule en P ; soit C' la courbe dont les anneaux locaux sont les mêmes que ceux de C , sauf en P ou $O(P)$ est remplacé par $O'(P)$ (C' a "un point de rebroussement ordinaire" en P , cf. [7], page 70). Si l'on note C^p la puissance p-ième de C , on a des morphismes $C \longrightarrow C' \longrightarrow C^p$, et on vérifie facilement que C^p (resp. C) est la variété d'Albanese au sens morphique (resp. au sens des fonctions) de C' . L'hypothèse de normalité est donc essentielle dans la partie (ii) du théorème.

ii. Soit encore C une courbe elliptique, plongée sans singularités dans le plan $\underset{\sim}{P}_2$, et soit E le cône correspondant ; c'est une variété normale. On voit facilement que C est la variété d'Albanese (au sens des fonctions) de E , alors que la variété d'Albanese morphique est réduite à 0 . L'hypothèse de non singularité est donc essentielle dans la partie (iii) du théorème.

REMARQUE. - Comme toute variété est birationnellement équivalente à une variété non singulière (enlever les points singuliers !); le théorème 6 montre que la variété d'Albanese au sens des fonctions est un cas particulier de la variété d'Albanese morphique.

5. Existence de morphismes universels. Premier cas.

THÉORÈME 7. - Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (vérifiant, comme toujours, les conditions (I) et (II) du numéro 2). Supposons que $\mathcal{C}$ ne contienne pas le groupe additif G_a. Toute variété V possède alors un morphisme universel pour $\mathcal{C}$.

Vu les théorèmes de structure pour les groupes algébriques (cf. [7], page 50), le fait pour un groupe algébrique commutatif de ne contenir aucun sous-groupe isomorphe à G_a équivaut au fait d'être extension d'une variété abélienne par un tore (c'est-à-dire un produit de groupes multiplicatifs G_m). Si l'on note $\mathcal{S}$ la catégorie formée par ces extensions, l'hypothèse faite sur $\mathcal{C}$ signifie donc que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, et l'on est ramené à démontrer l'existence de morphismes universels pour $\mathcal{S}$.

Soit donc V une variété, et soit V_1 un ouvert affine non singulier de V ; plongeons V_1 comme ouvert dans une variété projective normale V_2, et soit F l'ensemble des points singuliers de V_2 ; soit $V_3 = V_2 - F$ et soit $\Delta = V_3 - V_1$ Les composantes irréductibles $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ de Δ sont toutes de codimension 1 ; en effet, Δ est l'ensemble des points où la fonction $V_3 \to V_1$ n'est pas définie, et puisque V_3 est normale et V_1 affine, on sait que toutes les composantes d'un tel ensemble sont de codimension 1.

LEMME 6. - Soit $f : V_1 \to G$ un morphisme de V_1 dans un groupe $G \in \mathcal{S}$; soit $\omega \in s_G$. Alors la forme différentielle $f^*\omega$, considérée comme une forme différentielle sur V_3, est régulière sur V_1, et a au plus des pôles simples sur les Δ_i.

Admettons pour un moment ce lemme, et achevons la démonstration du théorème 7. Soit D le diviseur sur V_3 somme des diviseurs irréductibles Δ_i, et soit $L(D)$ le faisceau des germes de fonctions rationnelles φ vérifiant localement $(\varphi) \geqslant -D$. Il est bien connu que ce faisceau est un faisceau localement libre de rang 1 (il est isomorphe au faisceau des sections de l'espace fibré vectoriel de rang 1 associé à D) ; si l'on note Ω le faisceau des germes de formes différentielles régulières de degré 1 sur V_3, le lemme 6 signifie que $f^*\omega \in H^0(V_3, L(D) \otimes \Omega)$. Mais $V_3 = V_2 - F$, avec $\dim F \leqslant \dim V_2 - 2$, et le résultat démontré dans l'annexe I (corollaire au théorème 9) montre que $H^0(V_3, L(D) \otimes \Omega)$ est un espace vectoriel de dimension finie, soit N. D'après le théorème 3, on a donc $\dim G \leqslant N$, et d'après le corollaire au théorème 2, la variété V_1 admet un morphisme universel pour $\mathcal{S}$. Puisque $V_1 \longrightarrow V$ est dominant, il en est de même de V,

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme 6. - D'après le théorème de structure rappelé plus haut, le groupe G contient un sous-groupe T isomorphe à un produit $(G_m)^n$ de groupes multiplicatifs, le quotient $A = G/T$ étant une variété abélienne ; nous désignerons par $\pi : G \longrightarrow A$ la projection canonique de G sur A. Puisque V_3 est non singulière, le morphisme $\pi \circ f$ de V_1 dans A se prolonge en un morphisme $g : V_3 \longrightarrow A$.

Soit $P \in V_3$, et soit $Q = g(P) \in A$. On sait (cf. par exemple [7], page 170, proposition 6) que les translations par les éléments de T munissent G d'une structure d'espace fibré principal localement trivial de base A. Il existe donc un voisinage U de Q au-dessus duquel existe une section $s : U \longrightarrow G$; cette section permet d'identifier l'espace fibré $\pi^{-1}(U)$ au produit $U \times T$. Notons ω_U la restriction de ω à $\pi^{-1}(U)$; c'est une forme fermée partout régulière, et invariante par les translations définies par les éléments de T. Si l'on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées naturelles dans $(G_m)^n$, on voit aisément qu'une telle forme peut s'écrire de façon unique comme une somme :

$$\omega'_U = \pi^* \alpha_U + c_1\, dx_1/x_1 + \ldots + c_n\, dx_n/x_n \qquad ,$$

où les c_i sont des constantes, et où α_U est une forme différentielle régulière sur U (cette écriture dépend évidemment de la section s choisie : on a $\alpha_U = s^* \omega_U$ - par contre les coefficients c_i ne dépendent pas du choix de s).

Soit $U' = g^{-1}(U)$; c'est un voisinage de P dans V_3. La restriction de $f^*\omega$ à U' est donnée par la formule :

$$(*) \qquad \begin{aligned} f^*\omega\,|U' &= f^*\pi^*\alpha_U + c_1\, d\varphi_1/\varphi_1 + \ldots + c_n\, d\varphi_n/\varphi_n \\ &= g^*\alpha_U + c_1\, d\varphi_1/\varphi_1 + \ldots + c_n\, d\varphi_n/\varphi_n \qquad , \end{aligned}$$

où les φ_i désignent les fonctions rationnelles $x_i \circ f$ (en dépit de la notation, ces fonctions dépendent du choix de s).

Comme g est un morphisme, la formule (*) montre que la forme $f^*\omega$ peut s'écrire, au voisinage de tout point, comme la somme d'une différentielle régulière et de n "différentielles logarithmiques". Or, il est clair qu'une différentielle logarithmique n'a que des pôles d'ordre 1 ; d'autre part, on sait que $f^*\omega$ n'a pas de pôles sur V_1, puisque f est un morphisme sur V_1 ; le lemme 6 est donc démontré.

REMARQUES.

1° Le théorème 7 contient le théorème 5 (existence de la variété d'Albanese) comme cas particulier.

2° Avec les notations de la démonstration faite ci-dessus, soit $f : V_1 \to G$ un morphisme universel pour $\mathcal{S}$; soit T le plus grand tore contenu dans G, et soit $A = G/T$ la variété abélienne quotient. On voit facilement que $V_1 \to G \to A$ n'est autre que l'application canonique de V_1 dans sa variété d'Albanese ; pour déterminer G il faut donc déterminer une certaine extension de A par un tore ; dans certains cas, ceci peut se faire explicitement, comme nous le verrons dans un autre exposé.

6. Existence de morphismes universels. Second cas.

THÉORÈME 8. - *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (vérifiant, comme toujours, les conditions (I) et (II) du numéro 2). Supposons que $\mathcal{C}$ contienne le groupe additif G_a, et soit V une variété. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i. *La variété V possède un morphisme universel pour $\mathcal{C}$.*

ii. *Toute fonction numérique régulière sur V est constante.*

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Une fonction numérique sur V n'est pas autre chose qu'un morphisme de V dans le groupe additif G_a. Supposons donc qu'il existe un morphisme non constant $f : V \to G_a$; ce morphisme engendre G_a. Considérons le morphisme

$$\varphi : G_a \to G_a \times G_a$$

défini en caractéristique $\neq 2$ par $\varphi(t) = (t, t^2)$, et en caractéristique 2 par $\varphi(t) = (t, t^3)$. On voit tout de suite que φ engendre $(G_a)^2$. Le morphisme $\varphi \circ f : V \to (G_a)^2$ engendre donc le groupe $(G_a)^2$. Mais le morphisme $\varphi \times \varphi : (G_a)^2 \to (G_a)^4$ engendre $(G_a)^4$; il en est donc de même de $(\varphi \times \varphi) \circ \varphi \circ f : V \to (G_a)^4$, et l'on peut continuer indéfiniment : on obtient pour tout entier k un morphisme $f_k : V \to (G_a)^{2^k}$ qui engendre $(G_a)^{2^k}$ et comme ce groupe appartient à $\mathcal{C}$, il est clair que V ne possède pas de morphisme universel pour $\mathcal{C}$.

Montrons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $f : V \to G$ un morphisme qui engendre G. D'après les théorèmes de structure déjà cités, G contient un sous-groupe connexe linéaire R tel que le quotient $G/R = A$ soit une variété abélienne ; de plus $R = T \times U$, où T est un tore et U un groupe unipotent. Le groupe G/U est extension de A par T, donc appartient à la catégorie $\mathcal{S}$ considérée au numéro précédent ; vu le théorème 7, la dimension de G/U est bornée, et tout revient donc à montrer que la dimension de U est bornée (si V vérifie (ii)). Distinguons deux cas :

a. Si la caractéristique est $p \neq 0$, on a $U = 0$. En effet, le groupe G/pG, étant annulé par p, est un groupe unipotent, donc est une variété affine. Vu la condition (ii), le morphisme $V \to G \to G/pG$ est constant ; mais d'autre part, ce morphisme engendre G/pG ; donc $G/pG = 0$. La multiplication par p a donc un noyau fini dans G, donc aussi dans U, et ceci entraîne $U = 0$ (car sinon U contiendrait un sous-groupe isomorphe à G_a).

b. Si la caractéristique est 0, on a $\dim U \leqslant \dim A$. En effet, le groupe U est alors isomorphe à $(G_a)^n$. Soit $E = G/T$; c'est une extension de A par U ; elle est donc définie par n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathrm{Ext}(A, G)$ (cf. [7], chapitre VII). Soit $g = \dim A$; on sait (loco citato, théorème 10) que $\mathrm{Ext}(A, G_a)$ est un espace vectoriel de dimension g sur le corps de base. Si l'on avait $n > g$, il existerait des constantes c_i, non toutes nulles, telles que $\sum c_i x_i = 0$. Les c_i définissent un homomorphisme $c : (G_a)^n \to G_a$ non trivial ; soit E_c l'extension de A par G_a déduite de G au moyen de c (loco citato, numéro 1). On a un homomorphisme surjectif $E \to E_c$; d'autre part, la relation $\sum c_i x_i = 0$ signifie que E_c est une extension triviale de A par G_a, d'où l'existence d'un homomorphisme non trivial $E_c \to G_a$. En composant

$$V \to E \to E_c \to G_a \quad ,$$

on obtient un morphisme non constant de V dans G_a, ce qui contredit (ii). On a donc bien $n \leqslant g$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. - Si V est de la forme $W - F$, avec W complète, et $\dim F \leqslant \dim W - 2$, on voit facilement (cf. annexe I) que toute fonction régulière sur V est constante. Le théorème 8 contient donc le théorème 4 comme cas particulier.

EXEMPLES. - Soit G un groupe vérifiant la condition (ii) du théorème 8. L'application identique $i : G \to G$ est alors un morphisme universel, autrement dit tout morphisme $f : G \to H$ de G dans un groupe algébrique (l'hypothèse de commutativité est même superflue) est un homomorphisme affine. On peut en effet supposer que $f(0) = 0$, et en formant $f(x + y) - f(x) - f(y)$, on obtient un morphisme de $G \times G$ dans H qui est nul sur $G \times 0$ et $0 \times G$. Soit R le plus grand sous-groupe linéaire de H, et soit $A = H/R$ la variété abélienne quotient. On sait (exposé 9) que le composé $G \times G \longrightarrow H \longrightarrow A$ est nul. Le morphisme $G \times G \longrightarrow H$ applique donc $G \times G$ dans R, et il est constant et égal à 0 d'après (ii),

C. Q. F. D.

On peut former un tel groupe G en prenant une extension non triviale d'une courbe elliptique A par le groupe G_a (en caractéristique zéro), ou bien une extension de A par G_m correspondant à un point de A qui ne soit pas d'ordre fini (en toute caractéristique). On montre que le groupe G ainsi obtenu <u>n'est pas</u> de la forme $W - F$, avec W complète et $\dim F \leqslant \dim W - 2$ (le théorème 8 est donc "plus fort" que le théorème 4).

ANNEXE I

<u>Prolongement de certains faisceaux algébriques cohérents.</u>

On se propose de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> Y <u>une variété, soit</u> F <u>un sous-ensemble fermé de</u> Y, <u>et soit</u> $X = Y - F$. <u>Supposons que</u> $\dim F \leqslant \dim Y - 2$. <u>Soit d'autre part</u> M <u>un faisceau algébrique cohérent sans torsion sur</u> X, <u>et soit</u> M^* <u>son image directe par l'injection</u> $i : X \longrightarrow Y$ (cf. exposé 3, numéro 2). <u>Le faisceau</u> M^* <u>est alors un faisceau algébrique cohérent sur</u> Y.

Avant de donner la démonstration, indiquons une conséquence du théorème précédent (cf. [4]) :

COROLLAIRE. - <u>Les hypothèses étant celles du théorème 9, si l'on suppose en outre que</u> Y <u>est une variété complète, alors</u> $H^0(X, M)$ <u>est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps de base.</u>

En effet, on a $H^0(X, M) = H^0(Y, i_* M)$ d'après la définition de l'image directe, et le faisceau $i_* M = M^*$ est cohérent ; d'après un résultat connu (cf. exposé 4, corollaire au théorème de dévissage), l'espace vectoriel $H^0(Y, M^*)$ est de dimension finie,

C. Q. F. D.

[Le corollaire ci-dessus ne s'étend pas aux $H^q(X, M)$, $q \geqslant 1$. Contre-exemple : $Y = \underset{\sim}{P}_2$ (plan projectif), F réduit à un point, M = faisceau des anneaux locaux].

On utilisera le lemme suivant :

LEMME 7. - <u>Soit</u> V <u>une variété affine d'anneau de coordonnées</u> A, <u>et soit</u> f <u>une fonction numérique sur</u> V. <u>On suppose que</u> $f \in A_p$ <u>pour tout idéal premier</u> p

de hauteur 1 de A "de hauteur 1" = "minimal parmi les idéaux non nuls").
Alors f est entier sur A .

Soit A' la clôture intégrale de A dans son corps des fractions $R(V)$. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de hauteur 1 dans A' , l'idéal premier $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est de hauteur 1 dans A ; en effet, si l'on pose $n = \dim V$, on sait que $\dim A'/\mathfrak{q} = n - 1$, et comme $A'/\mathfrak{q}$ est entier sur $A/\mathfrak{p}$, cela donne $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A'/\mathfrak{q} = n - 1$, et la hauteur de $\mathfrak{p}$ est bien égale à 1 . Comme $f \in A_{\mathfrak{p}}$, on a a fortiori $f \in A'_{\mathfrak{q}}$. Mais on sait que $A' = \bigcap A'_{\mathfrak{q}}$ lorsque $\mathfrak{q}$ parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de A' (car A' est noethérien et intégralement clos). On a donc bien $f \in A'$.

Démonstration du théorème 9. - La question étant locale, on peut supposer que Y est une variété affine. Soit N un faisceau cohérent sur Y dont la restriction à X coïncide avec M ; un tel faisceau existe d'après [1] (proposition 2) ; quitte à diviser N par son faisceau de torsion, on peut supposer que N est sans torsion.

Le module sur l'anneau de coordonnées A de Y correspondant à N est donc sans torsion;il est isomorphe à un sous-module d'un module libre A^n . Cela revient à dire que M est isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{O}^n$, ou $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des anneaux locaux. Le faisceau $i_* M$ est donc un sous-faisceau du faisceau $(i_* \mathcal{O})^n$; comme on sait déjà que $i_* M$ est quasi-cohérent (cf. 3-04), pour voir que c'est un faisceau cohérent, il suffit de montrer que $i_* \mathcal{O}$ est cohérent, ou encore que $H^0(Y , i_* \mathcal{O})$ est un A-module de type fini. Mais on a $H^0(Y , i_* \mathcal{O}) = H^0(X , \mathcal{O})$; c'est donc l'ensemble des fonctions f sur Y qui sont régulières en tout point de X . Comme $\dim F \leqslant \dim Y - 2$, une telle fonction appartient à l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ de toute sous-variété irréductible de Y de co-dimension 1 ; d'après le lemme 7, cela entraîne que $H^0(X , \mathcal{O})$ est contenu dans la clôture intégrale A' de A dans son corps des fractions. Comme cette clôture intégrale est un A-module de type fini, ceci achève la démonstration.

REMARQUE. - Si Y est complète, et si $\dim F \leqslant \dim Y - 2$, le corollaire ci-dessus montre que l'algèbre des fonctions régulières sur $X = Y - F$ est de dimension finie. Comme cette algèbre n'a pas de diviseurs de zéro et que le corps de base est algébriquement clos, elle est réduite aux scalaires. On retrouve donc le fait que toute fonction régulière sur X est constante.

ANNEXE II

Morphismes maximaux et homologie ℓ-adique.

Nous commencerons par "rappeler" la définition du groupe d'homologie ℓ-adique de dimension 1 d'une variété V (ℓ étant un nombre premier différent de la caractéristique) :

Considérons tous les revêtements connexes non ramifiés $W \to V$ qui sont galoisiens (cf. [6]), et dont le groupe de Galois $G(W/V)$ est un ℓ-groupe commutatif. Ces revêtements forment de façon naturelle un ensemble filtrant, et la limite projective $H_1(V ; \ell)$ des groupes $G(W/V)$ suivant cet ensemble est le groupe d'homologie que nous voulions définir. C'est un ℓ-groupe compact totalement discontinu commutatif, et comme tel c'est un $\mathbb{Z}_\ell$-module, $\mathbb{Z}_\ell$ désignant l'anneau des entiers ℓ-adiques. C'est un foncteur covariant en V. Il est vraisemblable qu'il jouit des propriétés suivantes :

i. $H_1(V ; \ell)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini.

ii. Pour V fixée, le rang de $H_1(V ; \ell)$ ne dépend pas de ℓ ; pour presque tout ℓ, $H_1(V ; \ell)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre.

iii. Si $f : V \to V'$ est un morphisme, le rang de l'homomorphisme $f_{*,\ell} : H_1(V ; \ell) \to H_1(V' ; \ell)$ ne dépend pas de ℓ ; pour presque tout ℓ, le conoyau de $f_{*;\ell}$ est $\mathbb{Z}_\ell$-libre.

iv. On a $H_1(V \times V' ; \ell) = H_1(V ; \ell) \times H_1(V' ; \ell)$.

[Lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$, et que V est normale, GRAUERT et REMMERT ont montré que $H_1(V ; \ell)$ est le complété ℓ-adique du groupe d'homologie usuel $H_1(V , \mathbb{Z})$; GROTHENDIECK aurait réussi à supprimer l'hypothèse de normalité, ce qui démontrerait (i), ... , (iv) dans ce cas. En caractéristique $p \neq 0$, on a des résultats partiels ; par exemple, on peut démontrer (i) si V est normale, et (ii) si V est projective non singulière (appliquer le théorème de Néron-Severi), ainsi que (iv) si V est complète (LANG-SERRE dans le cas normal, GROTHENDIECK dans le cas général).]

Soit maintenant G un groupe algébrique commutatif. L'application $x \to \ell^n.x$ fait de G un revêtement non ramifié de lui-même, dont le groupe de Galois $G(\ell^n)$ est le sous-groupe formé par les x tels que $\ell^n.x = 0$. Si l'on note $T_\ell(G)$ la limite projective des groupes $G(\ell^n)$, on a donc un homomorphisme canonique :

$$\varepsilon : H_1(G ; \ell) \to T_\ell(G) \quad .$$

Il est vraisemblable que ε est un isomorphisme (ce serait en tout cas une conséquence de (iv)) ; c'est vrai si G est une variété abélienne.

Soit maintenant $f : V \longrightarrow G$ un morphisme de la variété V dans le groupe G ; en composant $f_{*,\ell}$ et ε on obtient pour tout ℓ, un homomorphisme : $H_1(V ; \ell) \longrightarrow T_\ell(G)$.

THÉORÈME 10. - Si $f : V \longrightarrow G$ est maximal, l'homomorphisme

$$H_1(V ; \ell) \longrightarrow T_\ell(G)$$

est surjectif pour tout ℓ.

Soit I l'image de cet homomorphisme, si l'on avait $I \neq T_\ell(G)$, il existerait un sous-groupe I' fermé, contenant I, et d'indice dans $T_\ell(G)$. Ce sous-groupe I' correspondrait à une isogénie $g : A' \longrightarrow A$ séparable, et de noyau cyclique d'ordre ℓ. Le fait que I' contient I signifie que l'image réciproque par f de A', considéré comme revêtement de A, est un revêtement trivial de V ; en d'autres termes, on peut factoriser f en $g \circ h$, où $h : V \longrightarrow A'$ est un morphisme ; c'est contraire au caractère maximal de f.

REMARQUE. - Soit t la dimension du plus grand tore contenu dans G, et soit g la dimension de la plus grande variété abélienne quotient de G. D'après un résultat de WEIL, $T_\ell(G)$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module libre de rang $2g + t$. On a donc $2g + t \leqslant \text{rang}\,(H_1(V ; \ell))$, et cette majoration fournit une autre démonstration du théorème 7 (à condition d'admettre la conjecture (i)).

Soit maintenant $\mathcal{S}'$ la catégorie des extensions d'une variété abélienne par un tore, et soit $f : V \longrightarrow G$ un morphisme universel pour cette catégorie. D'après le théorème 10, l'homomorphisme

$$H_1(V ; \ell) \longrightarrow T_\ell(G)$$

est surjectif pour tout ℓ. Dans quel cas son noyau est-il fini ? C'est vrai si V est projective non singulière (d'après NÉRON-SEVERI), ou si V est une courbe non singulière (cf. [7], chapitre VI) ; c'est faux si V est une courbe ayant un point double à tangentes distinctes ; peut-être est-ce toujours vrai si V est normale ?

Dans le cas complexe, la question précédente se reformule ainsi : Dans quel cas l'homomorphisme $H_1(V , \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(G , \mathbb{Z})$, qui est toujours surjectif, a-t-il un noyau fini ? C'est vrai lorsque V est projective non singulière, soit d'après la théorie kählerienne, soit d'après ce qui a été dit plus haut. La question est en relation avec la suivante : dans quel cas l'image réciproque des formes différentielles invariantes de G donne-t-elle toutes les formes différentielles régulières sur V (supposée complète) ? Ici encore, la théorie kählérienne donne une réponse affirmative lorsque V est projective non singulière ; il serait intéressant d'aller plus loin.

ANNEXE III

La réduction au cas des courbes.

L'existence de la variété d'Albanese d'une courbe résulte tout de suite (par normalisation) des propriétés de la jacobienne. Le cas d'une variété de dimension quelconque se ramène à celui des courbes par le procédé suivant :

Soit V une variété projective de dimension n plongée dans un espace projectif P_{n+r} ; soit F l'ensemble des points singuliers de V ; on suppose que $\dim F \leqslant \dim V - 2$ (cf. 4).

THÉORÈME 11. - Soit $f : V - F \longrightarrow G$ un morphisme qui engendre le groupe G. Soit L une sous-variété linéaire de P_{n+r} de dimension $\geqslant r + 1$ et supposons que $L \cap F = \emptyset$. La restriction de f à $V \cap L$ engendre alors G.

Indiquons brièvement la démonstration. Soit H le sous-groupe de G engendré par $L \cap V$; quitte à remplacer G par G/H, on peut supposer que $H = 0$, c'est-à-dire que la restriction de f à $V \cap L$ applique $V \cap L$ en un seul point $e \in G$. Soit U un voisinage affine de e sur G. On voit aisément que, pour toute sous-variété linéaire L' de P_{n+r} de même dimension que L, et assez voisine de L, f applique $L' \cap V$ dans U ; mais $L' \cap V$ est connexe (théorème de connexion), et complète ; comme U est affine, on en conclut que la restriction de f à $V \cap L'$ est constante. Soit $Q \in V \cap L$; si l'on se borne aux L' qui passent par Q, on montre aisément que la réunion des $V \cap L'$ correspondant est un voisinage de Q. Il s'ensuit que f est constante sur ce voisinage, donc partout.

C. Q. F. D.

Noter que l'on peut choisir L de telle sorte que $V \cap L$ soit une courbe (et même, si l'on y tient, une courbe irréductible et non singulière) ; le théorème 11 montre alors que $\dim G$ est borné par le genre de cette courbe, et cette majoration démontre l'existence d'un morphisme universel pour $V - F$. C'est la méthode de Matsusaka et Chow (cf. [3], chapitre II), à cela près que ces auteurs se servaient d'une courbe "générique" et obtenaient donc un résultat un peu moins précis.

ANNEXE IV. Sur l'opération de Cartier.

Soit V une variété sur un corps K de caractéristique $p > 0$; on désignera par $R(V)$ le corps des fonctions numériques sur V, par $\mathcal{D}(V)$ l'espace vectoriel des dérivations de $R(V)$, par $D(V)$ l'espace des différentielles (ou formes différentielles de degré 1) de $R(V)$, par $\bar{D}(V)$ l'espace des $\omega \in D(V)$ tels que $d\omega = 0$ (i. e. tels que $\langle \omega , [X_1 , X_2] \rangle = X_1(\langle \omega, X_2 \rangle) - X_2(\langle \omega, X_1 \rangle)$ quels que soient $X_1 , X_2 \in \mathcal{D}(V)$).

Soit W une sous-variété simple de V, et soit $\mathcal{O}(W)$ l'anneau local de W sur V ; on désignera par $\mathcal{D}^W(V)$ l'espace des éléments $X \in \mathcal{D}(V)$ tels que $X(\mathcal{O}(W)) \subset \mathcal{O}(W)$ et par $D^W(V)$ l'ensemble des $\omega \in D(V)$ tels que $\langle \omega , X \rangle \in \mathcal{O}(W)$ pour tout $X \in \mathcal{D}^W(V)$. Si $\xi_1 , \dots , \xi_n$ forment un système de variables uniformisantes en un point $x \in W$ simple sur V, on voit facilement que $\partial/\partial\xi_1 , \dots , \partial/\partial\xi_n$ forment une base du $\mathcal{O}(W)$-module $\mathcal{D}^W(V)$, de sorte que $d\xi_1 , \dots , d\xi_n$ forment une base de $D^W(V)$ par rapport à $\mathcal{O}(W)$.

Soit f un monomorphisme d'une variété U dans une variété V tel que $f(U)$ soit simple sur V ; désignant par W l'adhérence de $f(V)$, on peut associer à f une application $f^* : D^W(V) \longrightarrow D(U)$, uniquement caractérisée par les propriétés suivantes : elle est additive, et on a

$$f^*(v_1 \, dv_2) = u_i \, du_2$$

en désignant par u_i l'élément de $R(U)$ tel que $u_i(x) = v_i(f(x))$ pour tout $x \in U$ tel que v_i soit définie en $f(x)$. On a $f^*(\omega) \in \bar{D}(U)$ pour tout $\omega \in \bar{D}(V) \cap D^W(V)$.

Soit x un point simple de V. Toutes les dérivations de $R(V)$ étant nulles sur le corps $R^p(V)$ des puissances p-ièmes d'éléments de $R(V)$, l'application de ce qui a été dit dans l'exposé 6 fournit une application $C_x : \bar{D}^x(V) \rightarrow D^x(V)$ (où $D^x(V) = D^{\{x\}}(V)$, $\bar{D}^x(V) = D^x(V) \cap \bar{D}(V)$) qui est uniquement caractérisée par les propriétés suivantes : elle est additive,; on a $C_x(du) = 0$, $C_x(u^{p-1} du) = du$ si $u \in \mathcal{O}(x)$. On voit facilement que C_x se prolonge en une application additive, encore notée C_x, de $\bar{D}(U)$ dans $D(V)$, pour laquelle les conditions $C_x(du) = 0$, $C_x(u^{p-1} du)$ sont satisfaites pour tout $u \in R(V)$. (On le voit en observant que, si $\omega \in \bar{D}(V)$, il y a un $v \in \mathcal{O}(x)$, $v \neq 0$ tel que $v^p \omega \in \bar{D}^x(V)$ et tenant compte de ce que l'on a $C_x(u^p \omega) = uC_x(\omega)$ si $u \in \mathcal{O}(x)$, $\omega \in D^x_e(V)$). L'opération C_x (sur $R(V)$) est uniquement caractérisée par ces propriétés comme il résulte tout de suite de ce qui a été dit dans l'exposé 6 ; elle ne dépend donc pas de x ; nous la désignerons par C. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\omega \in D_e(V)$ puisse se mettre sous la forme $u^{-1}\,du$, avec $u \in R(V)$, $u \neq 0$ est que $C(\omega) = \omega$ (théorème 1, exposé 6) ; si $X \in \mathfrak{D}(V)$, $\omega \in \bar{D}(V)$, on a

$$\langle X^p , \omega \rangle = \langle X , C\omega \rangle^p + X^{p-1}(\langle X , \omega \rangle) \quad .$$

(exposé 6, proposition 3).

Soit maintenant f un morphisme d'une variété U dans la variété V tel que $f(U)$ soit simple sur V. Soit W l'adhérence de $f(U)$ dans V ; si $\omega \in \bar{D}^W(V) = D(V) \cap D^W(V)$, on a

$$f^*(C\omega) = C(f^*(\omega)) \quad .$$

En effet, on voit facilement qu'il y a un point $x \in U$ tel que $y = f(x)$ soit simple et que $\omega \in \bar{D}^y(V)$. La formule à démontrer est vraie si $\omega = dv$ $(v \in \mathcal{O}(y))$, ou si $\omega = v_1^{p-1}\,dv_2$ $(v_1 , v_2 \in \mathcal{O}(y))$; il s'ensuit tout de suite qu'elle est vraie pour tout élément de $\bar{D}^y(V)$, donc pour ω.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOREL (Armand) et SERRE (Jean-Pierre). - Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. Soc. math. France, t. 86, 1958, p. 97-136.

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Théorie des ensembles, chap. 4 : Structures. - Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1258 ; Éléments de Mathématique, 22).

[3] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, London, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[4] REES (D.). - On the sections of coherent algebraic sheaves (non publié).

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 715-739.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Espaces fibrés algébriques, Séminaire Chevalley, t. 2, 1958 : Anneaux de Chow et applications, exposé n° 1.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Groupes algébriques et corps de classes. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1264 ; Publ. inst. Math. Univ. Nancago, 7).