C. Chevalley

Les groupes de type C_2

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 22, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A9_0>

LES GROUPES DE TYPE C_2

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 13.1.1958)

1. Le groupe Sp n .

Soit β la forme bilinéaire sur $K^{2n} \times K^{2n}$ définie par

$$\beta(x , y) = \Sigma_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_{i+n} - \xi_{i+n} \eta_i)$$

si $x = (\xi_1 , \ldots , \xi_{2n})$, $y = (\eta_1 , \ldots , \eta_{2n})$. Nous désignerons par Sp n le groupe des automorphismes de K^{2n} qui laissent la forme β invariante. On montre facilement que, si (x , y) et (x' , y') sont deux éléments de $K^{2n} \times K^{2n}$ tels que $\beta(x , y) = \beta(x' , y') = 1$, il existe une opération de Sp n qui transforme x en x' et y en y' (cela résulte immédiatement de la théorie de la réduction des formes bilinéaires alternées). Soit $(e_1 , \ldots , e_{2n})$ la base canonique de K^{2n} . Les opérations de Sp n qui laissent fixes les points e_n , e_{2n} forment un sous-groupe G isomorphe à Sp(n - 1) , et on a une bijection naturelle de l'espace homogène Sp n/G sur l'ensemble des points (x , y) de $K^{2n} \times K^{2n}$ tels que $\beta(x , y) = 1$, ensemble qui est évidemment une hypersurface quadrique irréductible. Comme Sp 1 = $SL(K^2)$ est connexe, on en déduit par récurrence sur n que Sp n est connexe. Comme Sp n opère transitivement sur l'ensemble des éléments $\neq 0$ de K^{2n} , son application identique dans GL K^{2n} est une représentation simple. Soit T l'ensemble des matrices diagonales appartenant à Sp n ; pour qu'une matrice diagonale diag $(a_1 , \ldots , a_{2n})$ appartienne à T , il faut et il suffit que l'on ait $a_i a_{i+n} = 1$ $(1 \leq i \leq n)$. Il en résulte que T contient une matrice $t_0 = \mathrm{diag}\,(a_1 , \ldots , a_{2n})$ telle que les a_i soient tous distincts ; le centralisateur de t_0 dans GL K^{2n} étant le groupe des matrices inversibles diagonales, on voit que T est son propre centralisateur dans Sp n , donc est un tore maximal de Sp n . Il résulte du lemme de Schur qu'une matrice z_0 du centre de Sp n est de la forme cI , $c \in K$, I étant la matrice unité ; exprimant que cI $\in$ Sp n , il vient $c = \pm 1$; le centre de Sp n est donc d'ordre 2 ou 1 suivant que la caractéristique de K est $\neq 2$ ou $= 2$. Ce centre étant fini, Sp n est semi-simple (exp. 20 , lemme 1). Posons, pour $t \in T$, $t.e_i = \omega_i(t)e_i$; il est clair que l'on a (en notation additive) $\omega_{i+n} = -\omega_i$ et que $\omega_1, \dots, \omega_n$ forment une base du groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T.

Soient i et j des indices distincts entre 1 et n ; si $\xi \in K$, les formules

$$\tau_{ij}(\xi).e_i = e_i + \xi e_j$$
$$\tau_{ij}(\xi).e_{j+n} = e_{j+n} - \xi e_{i+n}$$
$$\tau_{ij}(\xi).e_k = e_k \quad \text{si } k \neq i, j+n$$

$$\tau'_{ij}(\xi).e_{i+n} = e_{i+n} + \xi e_j$$
$$\tau'_{ij}(\xi).e_{j+n} = e_{j+n} + \xi e_i$$
$$\tau'_{ij}(\xi).e_k = e_k \quad \text{si } k \neq i+n, j+n$$

$$\tau''_{ij}(\xi).e_i = e_i + \xi e_{j+n}$$
$$\tau''_{ij}(\xi).e_j = e_j + \xi e_{i+n}$$
$$\tau''_{ij}(\xi).e_k = e_k \quad \text{si } k \neq i, j$$

$$\tau_i(\xi).e_{i+n} = e_{i+n} + \xi e_i$$
$$\tau_i(\xi).e_k = e_k \quad \text{si } k \neq i+n$$

$$\tau'_i(\xi).e_i = e_i + \xi e_{i+n}$$
$$\tau'_i(\xi).e_k = e_k \quad \text{si } k \neq i$$

définissent des automorphismes $\tau_{ij}(\xi)$, $\tau'_{ij}(\xi)$, $\tau''_{ij}(\xi)$, $\tau_i(\xi)$, $\tau'_i(\xi)$ de K^{2n}. On vérifie facilement que ces automorphismes appartiennent à $\mathrm{Sp}\, n$, et que les applications $\xi \longrightarrow \tau_{ij}(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau'_{ij}(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau''_{ij}(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau_i(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau'_i(\xi)$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $\mathrm{Sp}\, n$. De plus, on a, si $t \in T$,

$$t\, \tau_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau_{ij}(\omega_i(t)(\omega_j(t))^{-1}\xi)$$

$$t\, \tau'_{ij}(\xi) t^{-1} = \tau'_{ij}(\omega_i(t)\, \omega_j(t)\, \xi)$$

$$t\,\tau''_{ij}(\xi)t^{-1} = \tau''_{ij}((\omega_i(t)\,\omega_j(t))^{-1}\xi)$$

$$t\,\tau_i(\xi)t^{-1} = \tau_i((\omega_i(t))^2\,\xi)$$

$$t\,\tau'_i(\xi)t^{-1} = \tau'_i((\omega_i(t))^{-2}\,\xi) \quad .$$

Il en résulte que $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j)$, $\pm 2\omega_i$ sont des racines de Sp n . Or il résulte de ce qui a été dit plus haut que l'on a, pour $n > 1$,

$$\dim \mathrm{Sp}\ n = \dim \mathrm{Sp}\ (n-1) + 4n - 1 \quad ;$$

comme $\dim \mathrm{Sp}\ 1 = 3$, on a $\dim \mathrm{Sp}\ n = n(2n+1)$. Comme $\dim T = n$, il en résulte que le nombre des racines de Sp n est $2n^2 = 2n(n-1) + 2n$, donc que les racines que nous avons déjà trouvées sont toutes les racines. Il est clair que $\omega_1 - \omega_2$, ... , $\omega_{n-1} - \omega_n$, $2\omega_n$ forment un système fondamental de racines et que le diagramme de Dynkin correspondant est de type C_n . De plus, on sait que le groupe des poids est engendré par les ω_i ; le groupe Sp n est donc un groupe simplement connexe de type C_n (si $n > 1$).

Le groupe projectif associé à Sp n s'appelle le groupe symplectique projectif, et se note PSp n . Soit f l'application canonique de Sp n sur PSp n , et soit $f(T) = T'$. L'isogénie f définit un isomorphisme spécial φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$; on sait que les exposants radiciels de φ sont tous égaux à 1 , d'où il résulte que PSp n est encore de type C_n . De plus, $\varphi(X(T'))$ est engendré par les différences mutuelles des éléments $\pm\omega_i$ de $X(T)$; ce groupe n'est donc autre que le groupe des racines. Il en résulte que, dans le cas de PSp n , $X(T')$ est engendré par les racines.

2. Le groupe SO(2n + 1) .

Désignons par e_0 , ... , e_{2n} la base canonique de K^{2n+1} et par SO(2n + 1) le groupe des automorphismes de déterminant 1 de K^{2n+1} qui conservent la forme quadratique Q définie par

$$Q(\Sigma_{i=0}^{n}\,\xi_i\,e_i) = \xi_0^2 + \Sigma_{i=1}^{n}\,\xi_i\,\xi_{i+n} \quad .$$

Supposons d'abord que K ne soit pas de caractéristique 2 . Dans ce cas, la forme quadratique Q est non dégénérée ; désignons par β la forme bilinéaire associée à cette forme quadratique. Il résulte du théorème de Witt que, si $n > 0$, les opérations de SO(2n + 1) permutent transitivement entre eux les couples $(x\ ,\ y)$ de points de K^{2n+1} tels que $Q(x) = 1$, $Q(y) = -1$, $\beta(x\ ,\ y) = 0$;

ces couples forment une variété irréductible de dimension $4n - 1$ dans $K^{2n+1} \times K^{2n+1}$. Par ailleurs, les opérations de $SO(2n + 1)$ qui laissent fixes les deux points $x_o = e_n + e_{2n}$, $y_o = e_n - e_{2n}$ forment un groupe qui est manifestement isomorphe à $SO(2n - 1)$. On en conclut, en procédant par récurrence sur n, que $SO(2n + 1)$ est un groupe connexe de dimension $n(2n + 1)$. Procédant comme dans le cas de $Sp\ n$, on voit que les matrices diagonales

$$t = (a_o , a_1 , \ldots , a_{2n})$$

contenues dans $SO(2n + 1)$ sont celles pour lesquelles on a $a_o = 1$, $a_i\, a_{i+n} = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; elles forment un tore maximal T, et le groupe des caractères rationnels de T est engendré par $\omega_1 , \ldots , \omega_n$ si $t.e_i = \omega_i(t)e_i$ $(0 \leqslant i \leqslant 2n)$. Montrons que l'application identique de $SO(2n + 1)$ dans $GL(K^{2n+1})$ est une représentation simple. Soit V un sous-espace $\neq \{0\}$ de K^{2n+1} stable par les opérations de $SO(2n + 1)$; V est stable par les opérations de T ; comme les fonctions $1 , \omega_i , \omega_i^{-1}$ sur T sont toutes distinctes, il en résulte que V est engendré par ceux des vecteurs $e_o , e_1 , \ldots , e_{2n}$ qu'il contient. Or, si $n > 0$, les opérations de $SO(2n + 1)$ permutent transitivement les vecteurs x tels que $Q(x) = 1$; si donc $e_o \in V$, V contient aussi les vecteurs $e_o + e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$, d'où $V = K^{2n+1}$. Par ailleurs, les opérations de $SO(2n + 1)$ permutent aussi transitivement entre eux les vecteurs x tels que $Q(x) = 0$; si donc $e_i \in V$ pour un $i > 0$, V contient aussi e_{i+n}, donc contient $e_i + e_{i+n}$ et par suite aussi e_o, ce qui achève de montrer que $V = K^{2n+1}$. Comme tout élément du centre de $SO(2n + 1)$ est une matrice scalaire, on voit tout de suite que le centre de $SO(2n + 1)$ se réduit à son élément neutre. Il en résulte que $SO(2n + 1)$ est un groupe semi-simple.

Si K est de caractéristique 2, la forme bilinéaire β associée à Q est dégénérée ; l'espace des vecteurs x tels que $\beta(x , y) = 0$ pour tout $y \in K^{2n+1}$ est Ke_o. On en déduit l'existence d'une représentation linéaire ω de $SO(2n+1)$ opérant dans K^{2n+1}/Ke_o. Cette représentation est injective. Soit en effet s un élément de $SO(2n+1)$ tel que $\omega(s)$ soit l'identité ; on a donc

$$s.x = x + u(x)e_o$$

pour tout $x \in K^{2n+1}$; on a $Q(x) = Q(s.x) = Q(x) + u^2(x)$, d'où $u(x) = 0$, ce qui démontre notre assertion. Par ailleurs, $\beta(x , y)$ ne dépend que des classes de x , y modulo Ke_o, de sorte que β définit une forme bilinéaire $\bar{\beta}$ sur $(K^{2n+1}/Ke_o) \times (K^{2n+1}/Ke_o)$, évidemment invariante par les opérations de

$\omega(SO(2n+1))$. On a $\beta(x , x) = 2Q(x) = 0$, ce qui montre que $\overline{\beta}$ est alternée. La restriction de Q à l'espace engendré par $e_1 , \ldots , e_{2n}$ étant une forme quadratique non dégénérée sur cet espace, la forme bilinéaire $\overline{\beta}$ est non dégénérée. Montrons que tout automorphisme $\overline{s}$ de K^{2n+1}/Ke_o qui laisse la forme $\overline{\beta}$ invariante appartient à $\omega(SO(2n+1))$. Soit r l'application canonique de K^{2n+1} sur K^{2n+1}/Ke_o , et soit W l'espace engendrée par $e_1 , \ldots , e_{2n}$; il y a un automorphisme s^* de K^{2n+1} qui laisse e_o fixe, qui transforme W en lui-même et qui est tel que $r \circ s^* = \overline{s} \circ r$. Il est clair que s^* laisse invariante la forme bilinéaire β ; si donc on pose $Q_1(x) = Q(s^*.x) - Q(x)$, Q_1 est une forme quadratique dont la forme bilinéaire associée est nulle. Comme K est algébriquement clos, Q_1 est le carré d'une forme linéaire u ; on a $u(e_o) = 0$. Posons $s.x = s^*.x + u(x)e_o$; on a encore $r \circ s = \overline{s} \circ r$, $s(e_o) = e_o$, de sorte que s est un automorphisme ; son déterminant est égal à celui de $\overline{s}$, donc à 1 . On a $Q(s.x) = Q(s^*.x) + u^2(x)$, ce qui montre que $s \in SO(2n+1)$; il est clair que $\omega(s) = \overline{s}$. Le groupe $\omega(SO(2n+1))$ est donc isomorphe à $Sp\ n$; ω étant une isogénie, on voit que $SO(2n+1)$ est encore semi-simple dans ce cas. De plus, le groupe T des matrices diagonales contenues dans $SO(2n+1)$ est encore un tore maximal ; nous définirons les ω_i comme plus haut. On notera que $\dim SO(2n+1) = \dim Sp\ n = n(2n+1)$.

Si i et j sont des indices distincts entre 1 et n , les formules

$$\begin{aligned}
&\tau_{ij}(\xi).e_i = e_i + \xi e_j \\
&\tau_{ij}(\xi).e_{j+n} = e_{j+n} - \xi e_{i+n} \\
&\tau_{ij}(\xi).e_k = e_k \qquad \text{si } k \neq i , j+n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau'_{ij}(\xi).e_{i+n} = e_{i+n} + \xi e_j \\
&\tau'_{ij}(\xi).e_{j+n} = e_{j+n} - \xi e_i \\
&\tau'_{ij}(\xi).e_k = e_k \qquad \text{si } k \neq i+n , j+n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tau''_{ij}(\xi).e_i = e_i + \xi e_{j+n} \\
&\tau''_{ij}(\xi).e_j = e_j - \xi e_{i+n} \\
&\tau''_{ij}(\xi).e_k = e_k \qquad \text{si } k \neq i , j
\end{aligned}$$

$$\tau_i(\xi).e_{i+n} = e_{i+n} + \xi e_o - \xi^2 e_i$$
$$\tau_i(\xi).e_o = e_o - 2\xi e_i$$
$$\tau_i(\xi).e_k = e_k \qquad \text{si} \quad k \neq 0 \ , \ i + n$$

$$\tau_i'(\xi).e_i = e_i + \xi e_o - \xi^2 e_{i+n}$$
$$\tau_i'(\xi).e_o = e_o - 2\xi e_{i+n}$$
$$\tau_i'(\xi).e_k = e_k \qquad \text{si} \quad k \neq 0 \ , \ i$$

définissent des automorphismes de K^{2n+1} ; on vérifie facilement que ces automorphismes appartiennent à $SO(2n + 1)$ et que les applications $\xi \longrightarrow \tau_{ij}(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau_{ij}'(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau_{ij}''(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau_i(\xi)$, $\xi \longrightarrow \tau_i'(\xi)$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $SO(2n + 1)$. De plus on a , si $t \in T$,

$$t\, \tau_{ij}(\xi)t^{-1} = \tau_{ij}(\omega_i(t)(\omega_j(t))^{-1}\xi)$$
$$t\, \tau_{ij}'(\xi)t^{-1} = \tau_{ij}'(\omega_i(t)\ \omega_j(t)\,\xi)$$
$$t\, \tau_{ij}''(\xi)t^{-1} = \tau_{ij}''((\omega_i(t)\ \omega_j(t))^{-1}\xi)$$
$$t\ \tau_i(\xi)t^{-1} = \tau_i(\omega_i(t)\,\xi)$$
$$t\ \tau_i'(\xi)t^{-1} = \tau_i'((\omega_i(t))^{-1}\xi) \ .$$

Procédant comme dans le cas de $Sp\ n$, on voit que $SO(2n + 1)$ est de type B_n (en convenant que $B_1 = A_1$, $B_2 = C_2$).

On notera que, si K est de caractéristique 2 , et si ω désigne l'isogénie construite ci-dessus, $\omega \circ \tau_{ij}$, $\omega \circ \tau_{ij}'$, $\omega \circ \tau_{ij}''$ sont des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $\omega(SO(2n + 1))$, tandis que $(\omega \circ \tau_i)(\xi) = \bar{\tau}_i(\xi^2)$, $(\omega \circ \tau_i')(\xi) = \bar{\tau}_i'(\xi^2)$, $\bar{\tau}_i$ et $\bar{\tau}_i'$ étant des isomorphismes de K sur des sous-groupes de $\omega(SO(2n + 1))$.

3. Les groupes de type C_n .

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type C_n . Soient T un tore maximal de G et $\omega_1 , \dots , \omega_n$ des éléments de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tels que les racines soient les $\pm (\omega_i \pm \omega_j)$ $(i \neq j)$, $\pm 2\omega_i$. Posons

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2 \ , \ \dots \ , \ \alpha_{n-1} = \omega_{n-1} - \omega_n \ , \quad \alpha_n = 2\omega_n \ ;$$

les α_i forment alors un système fondamental de racines. Le poids dominant fondamental ϖ_1 qui correspond à α_1 est ω_1 ; soit ρ une représentation projective simple admettant ω_1 comme poids dominant. Le poids ω_1 est un poids dominant minimal et n'est pas combinaison linéaire entière des racines ; les poids de ρ sont donc les transformés $\pm \omega_i$ $(1 \leq i \leq n)$ de ω_1 par les opérations du groupe de Weyl et sont de multiplicité 1 (exp. 20 , proposition 1 et son corollaire). La représentation ρ est donc de degré $2n$; elle opère sur l'espace projectif $\mathfrak{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V de dimension $2n$. De plus, l'automorphisme de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ qui change tout élément en son opposé appartient au groupe de Weyl ; toute représentation projective de G est donc équivalente à sa contragrédiente. On en conclut que, si G' est le groupe linéaire associé à ρ , les opérations de G' laissent invariante une forme bilinéaire non dégénérée β sur $V \times V$, symétrique ou alternée. Nous allons montrer que β est alternée. Posons $Q(x) = \beta(x , x)$; c'est une forme quadratique sur V , invariante par les opérations de G' ; les opérations de G' laissent invariante la forme bilinéaire β' associée à Q . Comme l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation simple, β' est ou bien nulle ou bien non dégénérée ; dans le second cas, Q est non dégénérée. Or, on a

$$\dim G' = \dim \rho(G) = \dim G = n(2n + 1) \ ,$$

et on sait que le groupe orthogonal d'une forme quadratique non dégénérée sur un espace de dimension $2n$ est $n(2n - 1)$. Il est donc impossible que $\beta' \neq 0$. Si K est de caractéristique $\neq 2$, il en résulte que $Q = 0$; si K est de caractéristique 2 , il en résulte que Q est le carré d'une forme linéaire ; mais cette dernière, étant invariante par G' , est nulle. On a donc bien $Q = 0$ dans tous les cas, et β est alternée. Or le groupe de tous les automorphismes de V qui invarient la forme β est de dimension $n(2n + 1)$ égale à celle de G' , et lui est par suite identique ; il en résulte que ce groupe est G' , donc que G' est isomorphe à $Sp\ n$ et que $\rho(G)$ est isomorphe à $PSp\ n$. Nous allons maintenant déterminer les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial attaché à ρ .

Soit plus généralement f une isogénie quelconque de G sur un groupe $\overline{G}$; posons $\overline{T} = f(T)$, et soit φ l'isomorphisme spécial de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(\overline{T})$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ associé à f . Soit $\overline{\alpha}_i$ la racine de $\overline{G}$ telle que $\varphi(\overline{\alpha}_1) = q_i \alpha_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K . Les racines $\alpha_1 , \dots , \alpha_{n-1}$ sont transformées les unes des autres par des opérations du groupe de Weyl ; les nombres $q_1 , \dots , q_{n-1}$ sont donc égaux entre eux (exp. 18 , proposition 4) ; soit q' leur valeur commune, et soit $q'' = q_n$. Soient $c(i , j)$ (resp. $\overline{c}(i , j)$) les entiers de Cartan du système fondamental $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$ (resp. du système fondamental $(\overline{\alpha}_1 , \dots , \overline{\alpha}_n)$) ; on sait que l'on a

$$c(i , j) = \overline{c}(i , j)\, q_i\, q_j^{-1}$$

(exp. 18 , proposition 4). On en conclut que $c(i , i + 1) = 1$ si $1 \leq i \leq n - 2$, $2 = \overline{c}(n - 1 , n) q' q''^{-1}$. Comme $\overline{c}(n - 1 , n)$ ne peut prendre que les valeurs 1 , 2 ou 3 , on a ou bien $\overline{c}(n - 1 , n) = 1$, $q' = 2q''$ ou bien $\overline{c}(n - 1 , n) = 2$, $q' = q''$. Dans le premier cas, K est nécessairement de caractéristique 2 et on a $\overline{c}(n , n - 1) = 2$, de sorte que $\overline{G}$ est de type B_n . Dans le second cas, $\overline{G}$ est de type C_n .

Revenons maintenant au cas où f est la représentation projective ρ considérée ci-dessus ; on sait que l'on a alors $q_1 = 1$ (exp. 20 , corollaire au lemme 2), de sorte qu'on se trouve dans le second cas (cela résulte d'ailleurs aussi de ce que $\rho(G)$, étant isomorphe à PSp n , est de type C_n). Les exposants radiciels de ρ sont donc tous égaux à 1 . Nous avons donc montré que <u>tout groupe G de type C_n admet une isogénie sur PSp n dont tous les exposants radiciels sont égaux à 1</u> .

Soit G^* un autre groupe de type C_n , et soit T^* un tore maximal de G^* . Soit $(\alpha_1^* , \dots , \alpha_n^*)$ un système fondamental de racines de G^* tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\overset{1}{\bullet} - \overset{1}{\bullet} - \dots \overset{1}{\bullet} - \overset{2}{\bullet}$$

Il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T^*)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui applique α_i^* sur α_i $(1 \leq i \leq n)$. Si cet isomorphisme applique $X(T^*)$ sur $X(T)$, les groupes G et G^* sont isomorphes (exp. 18 , proposition 5). Par ailleurs, dans le cas d'un groupe de type C_n , le groupe des poids contient le groupe des racines comme sous-groupe d'indice 2 . On en conclut que, si l'indice dans $X(T^*)$ du groupe des racines de G^* est égal à l'indice dans $X(T)$ du groupe des racines de G , G et G^* sont isomorphes. Nous arrivons donc au résultat suivant :

THÉORÈME 1. – <u>Tout groupe algébrique semi-simple de type C_n est isomorphe à l'un ou l'autre des groupes Sp n ou PSp n</u> .

4. Isogénies d'un groupe de type C_2 .

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit G un groupe algébrique semi-simple de type C_2 ; soit T un tore maximal de G . Soient G' un groupe algébrique et T' un tore maximal de G' . Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial φ de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$; φ est alors attaché à une isogénie de G sur G' .

On sait déjà qu'il existe un groupe simplement connexe G_o de type C_2 et une isogénie f_o de G_o sur G ; si T_o est le tore maximal de G_o tel que $f(T_o) = T$, f_o définit un isomorphisme spécial φ_o de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T_o)$. L'application $\varphi_o \circ \varphi$ est un isomorphisme spécial de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T_o)$; s'il est associé à une isogénie de G_o sur G' , le théorème sera établi en vertu de la proposition 5 , exp. 18 . On peut donc supposer G simplement connexe. Soit (α_1 , α_2) un système fondamental de racines de G tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}$$

Soient q_1 et q_2 les exposants radiciels de φ relativement à α_1 et α_2 ; on a ou bien $q_1 = q_2$ ou bien $q_1 = 2q_2$. L'isogénie des puissances q_2-ièmes applique G sur un groupe $\overline{G}$ et T sur un tore $\overline{T}$; il lui correspond un isomorphisme spécial $\overline{\varphi}$ de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(\overline{T})$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ dont les exposants radiciels sont égaux à q_2 . Comme $\overline{\varphi}$ applique $X(\overline{T})$ sur $q_2\, X(T)$, il est clair que $\overline{G}$ est encore simplement connexe. L'isomorphisme φ se met sous la forme $\overline{\varphi} \circ \varphi_1$, où φ_1 est un isomorphisme de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(\overline{T})$, qui applique le groupe des racines de G' dans celui de $\overline{G}$. Comme $\overline{G}$ est simplement connexe, φ_1 est spécial. Si φ_1 est attaché à une isogénie de $\overline{G}$ sur G' , φ est attaché à une isogénie de G sur G' . Nous pouvons donc nous ramener au cas où G est simplement connexe et $q_2 = 1$. Supposons désormais qu'il en soit ainsi.

Considérons d'abord le cas où on a aussi $q_1 = 1$. Soit T'' un tore maximal de PSp 2 et soit $(\alpha''_1 , \alpha''_2)$ un système fondamental de racines de PSp 2 par rapport à T'' tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}$$

Nous savons qu'il existe des isogénies g et g' de G et G' sur PSp 2 telles que $g(T) = g'(T') = T''$ et que les isomorphismes spéciaux γ , γ' attachés à g et g' appliquent α''_i sur α_i et α'_i respectivement, α'_i étant la racine de G' telle que $\varphi(\alpha'_i) = \alpha_i$. On a $\gamma = \varphi \circ \gamma'$; il en résulte que φ est attaché à une isogénie de G sur G' (exp. 18, proposition 6).

Considérons maintenant le cas où $q_1 = 2$; K est alors de caractéristique 2. Posons $G^* = SO(5)$, $G^{**} = Sp\ 2$; nous avons vu plus haut qu'il existe une isogénie ω de G^* sur G^{**}, des tores maximaux T^* et T^{**} de G^* sur G^{**} tels que $\omega(T^*) = T^{**}$ et des systèmes fondamentaux de racines (α_1^*, α_2^*) et $(\alpha_1^{**}, \alpha_2^{**})$ de G^* et G^{**} qui possèdent les propriétés suivantes : les diagrammes de Dynkin associés à ces systèmes fondamentaux sont tous deux le diagramme

$$\overset{1}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{2}{\bullet}$$

et les exposants radiciels de l'isomorphisme spécial θ de $\mathbb{Q} \otimes X(T^{**})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T^*)$ attaché à ω sont 2 et 1 respectivement. Par ailleurs, $SO(5)$ est de type $B_2 = C_2$ et $Sp\ 2$ est simplement connexe de type C_2 ; il existe donc des isogénies g de G sur $SO(5)$ et g' de $Sp\ 2$ sur G' telles que $g(T) = T^*$, $g'(T^{**}) = T'$ et que les exposants radiciels des isomorphismes spéciaux γ et γ' attachés à g et g' soient égaux à 1. On a alors $\varphi = \gamma \circ \theta \circ \gamma'$; il en résulte que φ est attaché à l'isogénie $g' \circ \omega \circ g$ de G sur G', ce qui achève la démonstration du théorème.

5. <u>Isogénies d'un groupe de type</u> $A_1 + A_1$.

THÉORÈME 3. - <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique semi-simple de type</u> $A_1 + A_1$ <u>et</u> T <u>un tore maximal de</u> G. <u>Soient</u> G' <u>un groupe algébrique semi-simple et</u> T' <u>un tore maximal de</u> G'. <u>Supposons qu'il existe un isomorphisme spécial</u> φ <u>de</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ <u>sur</u> $\mathbb{Q} \otimes X(T)$; G' <u>est alors de type</u> $A_1 + A_1$ <u>et</u> φ <u>est attaché à une isogénie de</u> G <u>sur</u> G'.

Il résulte immédiatement de la proposition 4, exp. 18 que G' est de type $A_1 + A_1$. Soit $\overline{G}$ le groupe $SL(K^2) \times SL(K^2)$, et soit $\overline{T}$ un tore maximal de $\overline{G}$. Le groupe $\overline{G}$ est manifestement simplement connexe. On voit facilement qu'il existe des isomorphismes spéciaux γ et γ' de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ tels que $\gamma' = \gamma \circ \varphi$. Tenant compte de la proposition 5, exp. 18, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème 3 dans le cas où $G = SL(K^2) \times SL(K^2)$. Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T ; soient α'_1 et α'_2 les racines de G' par rapport à T' telles que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$ $(i = 1,2)$, les q_i étant des puissances de l'exposant caractéristique de K.

Si $i = 1$ ou 2, les racines α_i, $-\alpha_i$ (resp. α'_i, $-\alpha'_i$) forment un système fermé de racines de G (resp. G') ; il lui correspond un sous-groupe G_i (resp. G'_i) de G (resp. G') ; G_i est isomorphe à $SL(K^2)$; on a $G = G_1 G_2$, $G' = G'_1 G'_2$ et tout élément de G_1 (resp. G'_1) commute à tout élément de G_2 (resp. G'_2). Le groupe G_i (resp. G'_i) a un tore maximal T_i (resp. T'_i) contenu dans T (resp. T') et on a $T = T_1 T_2$, $T' = T'_1 T'_2$. La restriction $\overline{\alpha}_i$ (resp. $\overline{\alpha}'_i$) de α_i (resp. α'_i) à T_i (resp. T'_i) est une racine de G_i (resp. G'_i). Comme G_i est isomorphe à $SL(K^2)$, il y a une isogénie f_i de G_i sur G'_i qui applique T_i sur T'_i telle que l'isomorphisme spécial φ_i de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T'_i)$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T_i)$ associé à f_i applique α'_i sur $q_i\, \alpha_i$. Comme l'application $(s_1, s_2) \to s_1 s_2$ est un isomorphisme de $G_1 \times G_2$ sur G, il y a une isogénie f de G sur G' telle que $f(s_1 s_2) = f_1(s_1)\, f_2(s_2)$ si $s_i \in G_i$ $(i = 1, 2)$. Il est clair que f applique T sur T' et que l'isomorphisme spécial de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ associé à f est φ, ce qui démontre le théorème.