C. CHEVALLEY

Les diagrammes de Dynkin

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 19, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A6_0>

LES DIAGRAMMES DE DYNKIN.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 9.12.57)

1. Correction à l'exposé 17.

On a admis (exposé 17, p. 11) que, si R est l'ensemble des racines d'un groupe semi-simple et S une partie de R telle que S et $R - S$ soient tous deux fermés, alors, si $\alpha \in S$, $\beta \in R - S$, aucun élément de la forme $i\alpha + j\beta$, où i, j sont des entiers > 0, n'est une racine. Voici comment on peut démontrer cette assertion. Soient w_α et w_β les symétries par rapport aux racines α et β ; on a

$$w_\alpha . \beta = \beta + k\alpha \qquad\qquad w_\beta . \alpha = \alpha + k'\beta$$

où k, k' sont des entiers. On peut considérer les racines comme des éléments d'un espace vectoriel V sur le corps des rationnels sur lequel opère le groupe de Weyl et qui est muni d'une métrique définie positive invariante par le groupe de Weyl ; désignant par $(\lambda | \mu)$ le produit scalaire de deux éléments λ, μ relativement à cette métrique, on a

$$k = -2(\alpha | \beta)(\alpha | \alpha)^{-1} \qquad k' = -2(\alpha | \beta)(\beta | \beta)^{-1} \ ;$$

comme $\beta \neq \pm \alpha$, α et β sont linéairement indépendantes d'où il résulte que $kk' < 4$; k et k' étant de même signe, l'un au moins de ces entiers est ≤ 1 en valeur absolue. Or $\alpha \pm \beta$ ne peut être ni dans S ni dans $R - S$ et n'est par suite pas une racine ; l'un des nombres k, k' est donc nul, ce qui entraîne $(\alpha | \beta) = 0$. Ceci montre que toute racine de S est orthogonale à toute racine de $R - S$. Si $i\alpha + j\beta$ était une racine et appartenait disons à S, on aurait $(i\alpha + j\beta | \beta) = 0$, d'où $j^2(\beta | \beta) = 0$, $j = 0$ en contradiction avec l'hypothèse $j > 0$; on voit de même que $i\alpha + j\beta$ ne peut être dans $R - S$.

2. Le diagramme de Dynkin.

Soient G un groupe algébrique semi-simple connexe, T un tore maximal de G, $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T et w_i la symétrie par rapport à α_i. On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ muni d'une métrique définie positive invariante par le groupe de Weyl, et on dénote par $(\lambda|\mu)$ le produit scalaire relativement à cette métrique. On a

$$w_i . \alpha_j = \alpha_j + c(i , j)\alpha_i$$

les $c(i , j)$ étant des entiers que l'on appelle les entiers de Cartan ; on a $c(i , i) = -2$, $c(i , j) \geqslant 0$ si $i \neq j$,

$$c(i , j) = -2(\alpha_i \mid \alpha_j)(\alpha_i \mid \alpha_i)^{-1} \quad ;$$

il en résulte que, si $c(i , j) \neq 0$, d'où $c(j , i) \neq 0$, on a

$$c(i , j)(c(j , i))^{-1} = (\alpha_j \mid \alpha_j)(\alpha_i \mid \alpha_i)^{-1} .$$

On appelle diagramme de Dynkin du groupe G un objet constitué par un graphe à n sommets $S_1 , \ldots , S_n$ et par des nombres σ_i attachés à ces sommets et qui se décrit de la manière suivante : si $i \neq j$, S_i et S_j sont joints par une arête du graphe si et seulement si $c(i , j) \neq 0$, i.e. si et seulement si $(\alpha_i \mid \alpha_j) \neq 0$; dans ce cas, S_i et S_j ne sont joints que par une seule arête ; il n'y a aucune arête du graphe dont les extrémités coïncident avec un même sommet ; si C est l'ensemble des sommets d'une composante du graphe, les nombres σ_i relatifs aux sommets $S_i \in C$ sont proportionnels aux $(\alpha_i \mid \alpha_i)$, le facteur de proportionalité étant tel que le plus petit des σ_i pour $S_i \in C$ soit 1. Le diagramme de Dynkin est déterminé à un isomorphisme près par le groupe G . Cela résulte facilement des faits suivants : deux tores maximaux de G peuvent se déduire l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de G ; une fois T fixé, deux systèmes fondamentaux de racines peuvent se déduire l'un de l'autre par une opération du groupe de Weyl ; si S_i et S_j sont des sommets qui sont les extrémités d'une arête, on a

$$(1) \qquad \sigma_j \sigma_i^{-1} = c(i , j)(c(j , i))^{-1}$$

ce qui montre que la connaissance des entiers de Cartan détermine les rapports mutuels des σ_i relatifs aux sommets S_i d'une même composante connexe du diagramme. Réciproquement, la connaissance du diagramme de Dynkin permet de calculer les entiers de Cartan. En effet, on a $c(i , i) = -2$, $c(i , j) = 0$ si S_i , S_j sont des sommets distincts qui ne sont les extrémités d'aucune arête ; enfin, si S_i et S_j sont les extrémités d'une arête, les entiers $c(i , j)$, $c(j , i)$ sont déterminés par la formule (1) et par le fait que ce sont des entiers > 0 dont le produit est < 4.

Nous appellerons <u>diagramme admissible</u> un objet constitué par un graphe fini et par des nombres $\sigma_i > 0$ associés aux sommets S_i du graphe qui possède les propriétés suivantes :

1. deux sommets distincts ne sont jamais joints par plus d'une arête ; aucune arête n'a ses extrémités confondues en un même sommet ;

2. pour chaque composante connexe C du graphe, le plus petit des nombres σ_i attachés aux sommets de C est 1 ;

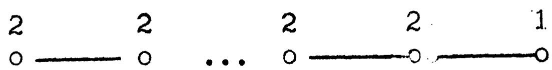
3. si S_i et S_j sont les extrémités d'une arête du graphe, $\sigma_j \sigma_i^{-1}$ se met sous la forme $c(i\,,\,j)(c(j\,,\,i))^{-1}$ où $c(i\,,\,j)$, $c(j\,,\,i)$ sont des entiers > 0 de produit < 4 ;

4. posant de plus $c(i\,,\,i) = -2$, $c(i\,,\,j) = 0$ si S_i et S_j sont des sommets distincts qui ne sont liés par aucune arête, il existe un espace vectoriel V sur le corps des rationnels de dimension égale au nombre des sommets, une base $(\alpha_1\,,\,\ldots\,,\,\alpha_n)$ de V et une métrique définie positive sur V tels que l'on ait $c(i\,,\,j) = -2(\alpha_i \,|\, \alpha_j)(\alpha_i \,|\, \alpha_i)^{-1}$ pour tout couple $(i\,,\,j)$.

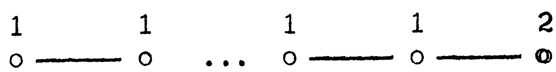
Il est clair que les composantes connexes d'un diagramme admissible sont encore des diagrammes admissibles. On peut déterminer tous les diagrammes admissibles connexes (cf. Séminaire Sophus Lie, E.N.S., exposé 13) : on trouve les types suivants :

1° type A_n :

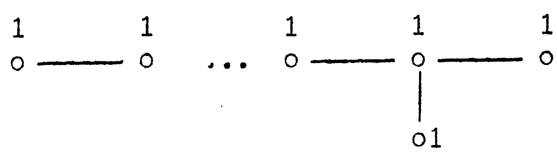
2° type B_n $(n \geqslant 3)$:



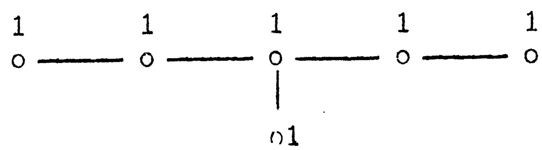
3° type C_n $(n \geqslant 2)$:



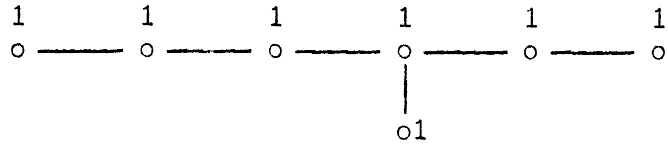
4° type D_n $(n \geqslant 4)$:



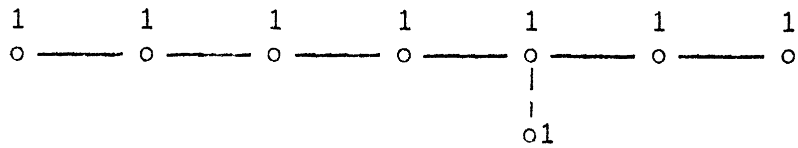
5° type E_6 :



6° type E_7 :



7° type E_8 :



8° type F_4 :

9° type G_2 :

Si un diagramme admissible se décompose en diagrammes connexes de types $T_1, \dots, T_h$ (chaque T_k étant l'un des symboles A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2), nous dirons qu'il est de type $T_1 + \dots + T_h$. Nous dirons qu'un groupe semi-simple G est de type T si ses diagrammes de Dynkin sont de type T.

Considérons un diagramme admissible D ; utilisons les mêmes notations que dans l'énoncé des conditions pour qu'un diagramme soit admissible. Pour chaque i, les formules $w_i \cdot \alpha_j = \alpha_j + c(i, j)\alpha_i$ définissent un automorphisme w_i d'ordre 2 de V qui laisse invariante la métrique de l'espace V. Comme les matrices qui représentent les w_i par rapport à la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont entières, le groupe W engendré par les w_i est fini ; il s'appelle le groupe de Weyl du diagramme. Les transformés des α_i par les opérations de W sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers tous de même signe des α_i. Les transformés des α_i par toutes les opérations de W forment un ensemble fini dont les éléments s'appellent les racines. Par ailleurs, il y a une base $(\varpi_1, \dots, \varpi_n)$ de V composée d'éléments ϖ_i tels que l'on ait

$$w_i \cdot \varpi_i = \varpi_i - \alpha_i \qquad w_i \cdot \varpi_j = \varpi_j \quad \text{si } i \neq j ;$$

ces éléments s'appellent les poids fondamentaux.

Si on suppose que D est le diagramme de Dynkin d'un groupe G (relativement à un tore maximal T et à un système fondamental de racines $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) et si on prend $V = \mathbb{Q} \otimes X(T)$, les racines du diagramme sont celles du groupe, et les poids fondamentaux du diagramme sont ceux du groupe. Il en résulte que la connaissance du diagramme de Dynkin de G détermine les expressions des racines de G et de ses poids fondamentaux comme combinaisons linéaires des racines fondamentales. Par ailleurs, la connaissance du nombre des racines de G détermine la dimension de G en vertu du

LEMME 1. - Si G est un groupe algébrique semi-simple et T un tore maximal de G, $\dim G$ est la somme de $\dim T$ et du nombre des racines.

Choisissons en effet un groupe de Borel B de G contenant T, et désignons par B^u l'ensemble des éléments unipotents de B ; la dimension de B^u est alors égale au nombre N des racines qui sont < 0 sur la chambre de Weyl associée à B (exposé 13, théorème 1). Par ailleurs, la dimension de G/B est égale à celle de B^u (exposé 13, corollaire 2 au théorème 3) ; comme

$$\dim B = \dim B^u + \dim T ,$$

on a $\dim G = 2N + \dim T$; or $2N$ est le nombre de toutes les racines.

Nous appellerons dimension de groupe d'un diagramme admissible D la somme du nombre des sommets de D et du nombre des racines de D.

Nous donnons dans ce qui suit un certain nombre de résultats relatifs aux diagrammes admissibles connexes des divers types.

I. Type A_n. La dimension de groupe est $(n+1)^2 - 1$. Il existe $n+1$ éléments ω_i de V tels que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i = 0 \quad ;$$

on a

$$\omega_k = (n+1)^{-1}\Big(- \sum_{i=1}^{k-1} i\,\alpha_i + \sum_{i=k}^{n} (n-i+1)\,\alpha_i\Big) .$$

L'opération w_i échange ω_i et ω_{i+1} en laissant ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; le groupe W se compose des automorphismes de V qui permutent entre eux les éléments ω_i de toutes les manières possibles. Les racines sont les $\pm \sum_{k \leq i \leq k'} \alpha_i$ pour $1 \leq k \leq k' \leq n$; ce sont aussi les $\omega_i - \omega_j$ pour $i \neq j$. Les poids dominants fondamentaux sont les

$$\varpi_i = \omega_1 + \dots + \omega_i \qquad (1 \leq i \leq n) \quad ;$$

on a aussi

$$\varpi_k = (n+1)^{-1}(n+1-k) \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha_i - (n+1)^{-1} k \sum_{i=k}^{n} (n-i+1)\alpha_i$$

II. <u>Type</u> B_n . La dimension de groupe est $n(2n+1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) \qquad \alpha_n = \omega_n \ ;$$

on a

$$\omega_k = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i \ .$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse fixe ω_j si $j \neq i, i+1$; w_n change ω_n en $-\omega_n$ et laisse ω_i fixe si $i \neq n$. Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w.\omega_i = e(i)\omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont des entiers égaux à ± 1 . Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$, $\pm\omega_i$, $\pm(\omega_i + \omega_j)$ $(i \neq j)$. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad (k < n) \ , \quad \varpi_n = (1/2) \sum_{i=1}^{n} \omega_i \ ;$$

on a

$$\varpi_k = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i + k \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \quad (k < n) \quad ; \quad \varpi_n = (1/2)\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i \ .$$

III. <u>Type</u> C_n . La dimension de groupe est $n(2n+1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i < n) \qquad \alpha_n = 2e_n \ .$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse fixe ω_j si $j \neq i, i+1$; w_n change ω_n en $-\omega_n$ et laisse ω_i fixe si $i < n$. Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w.\omega_i = e(i)\omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont égaux à ± 1 . Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$, $\pm 2\omega_i$, $\pm(\omega_i + \omega_j)(i \neq j)$. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \ (1 \leq k \leq n) \ ;$$

on a

$$\varpi_k = \sum_{i=1}^{k} i\alpha_i + k\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i + (1/2)k\alpha_n \ .$$

IV. <u>Type</u> D_n . La dimension de groupe est $n(2n-1)$. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i < n) \quad \alpha_n = \omega_{n-1} + \omega_n .$$

Si $i < n$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$. L'opération w_n transforme ω_{n-1} en $-\omega_n$, ω_n en $-\omega_{n-1}$ et laisse ω_i fixe si $i \neq n-1$, n . Le groupe W se compose des automorphismes de V définis par les formules

$$w.\omega_i = e(i)\,\omega_{\pi(i)}$$

où π est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$ et où les $e(i)$ sont égaux à ± 1 , avec $\prod_{i=1}^{n} e(i) = 1$. Les racines sont les

$$\omega_i - \omega_j (i \neq j) , \pm (\omega_i + \omega_j)(i \neq j) .$$

Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_k = \omega_1 + \dots + \omega_k \quad (k < n-1) , \qquad \varpi_{n-1} = (1/2) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \omega_{n-1}$$

$$\varpi_n = (1/2) \textstyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \ ;$$

on a

$$\varpi_k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} i\,\alpha_i + k\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + (1/2)k(\alpha_{n-1} + \alpha_n) \qquad (k \leq n-2)$$

$$\varpi_{n-1} = \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} i\,\alpha_i + (1/2)(n-1)(\alpha_{n-1} + \alpha_n)$$

$$\varpi_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} i\,\alpha_i + (1/2)(n-2)\,\alpha_{n-1} + (1/2)n\,\alpha_n .$$

V. <u>Type</u> E_6 . La dimension de groupe est 78. Il existe une base $(\omega_1, \dots, \omega_6)$ de l'espace V telle que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{j+1} \ (1 \leq i \leq 5) \qquad \alpha_6 = \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 - s$$

où on a posé $s = (1/3)\sum_{i=1}^{6} \omega_i$. Si $1 \leq i \leq 5$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; l'opération w_6 laisse ω_i fixe si $i \leq 3$ et change ω_4 en $s - (\omega_5 + \omega_6)$, ω_5 en $s - (\omega_6 + \omega_4)$, ω_6 en $s - (\omega_4 + \omega_5)$. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j (i \neq j)$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k - s)(i, j, k$ distincts), $\pm s$
On peut munir l'espace V d'une métrique invariante par W telle que l'on ait $(\omega_i \mid \omega_i) = 4/3$, $(\omega_i \mid \omega_j) = 1/3$ si $i \neq j$; on a $(\omega_i \mid s) = 1$, $(s|s) = 2$, $(\alpha \mid \alpha) = 2$ pour toute racine α . Les racines orthogonales à s sont les $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$; elles forment un système isomorphe au système des racines d'un diagramme de type (A_5) . Les opérations de W qui permutent entre elles les racines $\omega_i - \omega_j$ forment un groupe W' qui contient le groupe W'' engendré par

les symétries par rapport aux $\omega_i - \omega_j$; on déduit facilement du fait qu'un diagramme de Dynkin de type A_5 n'admet que deux automorphismes que W'' est d'indice 2 ou 4 dans W'. Si cet indice était 4, W' contiendrait l'opération w' qui transforme s en s et $\omega_i - \omega_j$ en $\omega_{\sigma-j+1} - \omega_{\sigma-i+1}$; or w' permute $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ entre elles de manière non triviale et n'appartient par suite pas à W'. Donc W'' est d'indice 2 dans W'. Comme W'' est d'ordre $6!$, W' est d'ordre $2.6!$. Par ailleurs, les seules racines qui sont orthogonales à toutes les $\omega_i - \omega_j$ sont s et $-s$; on en déduit tout de suite que l'ordre de W est $(1/2).72.2.6! = 72.6!$ Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_1 = \omega_1 = (1/3)(4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5) + \alpha_6$$

$$\varpi_2 = \omega_1 + \omega_2 = (1/3)(5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5) + 2\alpha_6$$

$$\varpi_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 4\alpha_4 + 2\alpha_5 + 3\alpha_6$$

$$\varpi_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - s = (1/3)(4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 + 10\alpha_4 + 5\alpha_5) + 2\alpha_6$$

$$\varpi_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 2s = (1/3)(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5) + \alpha_6$$

$$\varpi_6 = s = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 .$$

Les transformés de $\varpi_1 = \omega_1$ par les opérations de W sont les

$$\omega_i \ , \ \omega_i - s \ , \ s - (\omega_i + \omega_j)(i \neq j) \quad ;$$

le nombre de ces transformés est 27 ; parmi eux ne figure pas $-\omega_i$, ce qui montre que l'automorphisme $\omega \to -\omega$ de V n'appartient pas au groupe de Weyl.

VI. Type E_7 . La dimension de groupe est 133. Il existe une base $(\alpha_1 , \ldots , \alpha_7)$ de l'espace V telle que l'on ait

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \ (i \leq 6) \quad \alpha_7 = \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 - s$$

où $s = (1/3)\sum_{i=1}^{7} \omega_i$. Si $i \leq 6$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i , i+1$. L'opération w_7 transforme ω_i en lui-même si $i \leq 4$ et en $\omega_i - \alpha_7$ si $i \geq 5$. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j (i \neq j)$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k - s)$ $(i , j , k$ distincts) et $\pm(s - \omega_i)$. On peut munir l'espace V d'une métrique positive invariante par W en posant $(\omega_i \mid \omega_i) = 3/2$, $(\omega_i \mid \omega_j) = 1/2$ si $i \neq j$; on a $(\omega_i \mid s) = 3/2$, $(s|s) = 7/2$, $(\alpha|\alpha) = 2$ pour toute racine α . Les racines α telles que $(\omega_1 , \alpha) = 0$ sont toutes celles qui sont combinaisons linéaires de $\alpha_2 , \ldots , \alpha_7$; leur ensemble est isomorphe à l'ensemble des racines d'un diagramme de type E_6. Les opérations de W qui permutent ces racines entre elles forment un groupe W' qui contient le groupe W'' engendré par les symétries par rapport aux racines $\alpha_2, \ldots, \alpha_7$; ce dernier est isomorphe au groupe de Weyl d'un diagramme de type E_6. On déduit du fait qu'un diagramme de type E_6 n'admet que deux automorphismes que l'indice de W'' dans W' est 1, 2 ou 4. Par ailleurs, l'homothétie w_o de rapport -1 de V permute entre elles les racines; on en déduit qu'il y a une opération w'_o de W telle que $w'_o w_o$ permute entre elles les α_i $(1 \leq i \leq 7)$; comme un diagramme de type E_7 n'admet aucun automorphisme distinct de l'identité, $w'_o w_o$ est l'identité, d'où $w_o \in W$. Or nous avons vu dans l'étude du type E_6 que w_o ne peut appartenir à W'' ; de plus, on voit facilement qu'il n'y a aucune opération de W qui change ω_1 en $-\omega_1$ et qui conserve $\alpha_2, \ldots, \alpha_7$; W'' est donc d'indice 2 dans W'. Les transformés de ω_1 par les opérations du groupe de Weyl sont les $\pm \omega_i$, $\pm (s - \omega_i - \omega_j)(i \neq j)$; leur nombre est 56, et, parmi eux, les seuls qui soient orthogonaux à $\alpha_2, \ldots, \alpha_7$ sont $\pm \omega_1$. On en conclut que l'indice de W' dans W est $(1/2)56$ et que l'ordre de W est $56.72.6!$

Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_1 = \omega_1 = (1/2)(3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 3\alpha_7)$$

$$\varpi_2 = \omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 6\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 3\alpha_7$$

$$\varpi_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = (1/2)(5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 15\alpha_3 + 18\alpha_4 + 12\alpha_5 + 6\alpha_6 + 9\alpha_7)$$

$$\varpi_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6 + 6\alpha_7 .$$

$$\varpi_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - s = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 6\alpha_5 + 3\alpha_6 + 4\alpha_7$$

$$\varpi_6 = s - \omega_7 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$$

$$\varpi_7 = s = (1/2)(3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 8\alpha_5 + 4\alpha_6 + 7\alpha_7) .$$

VII. Type E_8. La dimension de groupe est 248. L'espace V est engendré par 9 éléments ω_i $(1 \leq i \leq 9)$ dont la somme est nulle tels que

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i \leq 7) \qquad \alpha_8 = \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 .$$

Si $i \leq 7$, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$. L'opération w_8 transforme ω_i en $\omega_i + (1/3)\alpha_8$ si $i \neq 6, 7, 8$; en $\omega_i - (2/3)\alpha_8$ si $i = 6, 7$ ou 8. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$ $(i, j, k$ distincts). On peut munir l'espace V d'une métrique définie positive invariante par W en posant $(\omega_i \mid \omega_i) = 8/9$, $(\omega_i \mid \omega_j) = -1/9$

si $i \neq j$; or a $(\alpha|\alpha) = 2$ pour toute racine α. Les racines orthogonales à $\omega_1 - \omega_9$ sont celles qui expriment comme combinaisons linéaires de $\alpha_2, \dots, \alpha_8$; elles forment un système de racines isomorphe à l'ensemble des racines d'un diagramme de type E_7. Les opérations de W qui permutent ces racines entre elles forment un groupe W' ; comme le groupe de Weyl d'un diagramme de type E_7 n'admet aucun automorphisme distinct de l'identité, W' contient le groupe engendré par les symétries par rapport à $\alpha_2, \dots, \alpha_8$ comme sous-groupe d'indice 2. Il en résulte que l'ordre de W est $240.56.72.6!$. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_1 = \omega_1 - \omega_9 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$$

$$\varpi_2 = \omega_1 + \omega_2 - 2\omega_9 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 10\alpha_4 + 12\alpha_5 + 8\alpha_6 + 4\alpha_7 + 6\alpha_8$$

$$\varpi_3 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - 3\omega_9 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 15\alpha_4 + 18\alpha_5 + 12\alpha_6 + 6\alpha_7 + 9\alpha_8$$

$$\varpi_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - 4\omega_9 = 5\alpha_1 + 10\alpha_2 + 15\alpha_3 + 20\alpha_4 + 24\alpha_5 + 16\alpha_6 + 8\alpha_7 + 12\alpha_8$$

$$\varpi_5 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 - 5\omega_9 = 6\alpha_1 + 12\alpha_2 + 18\alpha_3 + 24\alpha_4 + 30\alpha_5 + 20\alpha_6 + 10\alpha_7 + 15\alpha_8$$

$$\varpi_6 = -\omega_7 - \omega_8 - 4\omega_9 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 16\alpha_4 + 20\alpha_5 + 14\alpha_6 + 7\alpha_7 + 10\alpha_8$$

$$\varpi_7 = -\omega_8 - 2\omega_9 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 8\alpha_4 + 10\alpha_5 + 7\alpha_6 + 4\alpha_7 + 5\alpha_8$$

$$\varpi_8 = -3\omega_9 = 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 + 12\alpha_4 + 15\alpha_5 + 10\alpha_6 + 5\alpha_7 + 8\alpha_8$$

VIII. <u>Type</u> F_4. La dimension de groupe est 52 . L'espace V a une base $(\omega_1, \dots, \omega_4)$ telle que

$$\alpha_1 = \omega_1 - \omega_2 \qquad \alpha_2 = \omega_2 - \omega_3 \qquad \alpha_3 = \omega_3$$

$$\alpha_4 = (1/2)(\omega_4 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) .$$

Si $i = 1$ ou 2, w_i échange ω_i et ω_{i+1} et laisse ω_j fixe si $j \neq i, i+1$; w_3 change ω_3 en $-\omega_3$ et laisse ω_i fixe si $i \neq 3$. L'opération w_4 change ω_i en $\omega_i + \alpha_4$ si $i = 1, 2$ ou 3 et change ω_4 en $\omega_4 - \alpha_4$. Les racines sont les $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$, $\pm\omega_i$, $\pm(\omega_i + \omega_j)$ $(i \neq j)$ et $(1/2)\sum_{i=1}^{4} e(i)\,\omega_i$, où les $e(i)$ sont égaux à ± 1. On peut munir l'espace V d'une métrique définie positive invariante par W en posant $(\omega_i|\omega_i) = 1$, $(\omega_i|\omega_j) = 0$ si $i \neq j$. Les seules racines α telles que $(\alpha|\alpha) = 2$ sont les $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j)$; ces racines sont donc permutées entre elles par les opérations de W. Elles forment un système de racines isomorphe à l'ensemble des racines d'un diagramme de type D_4. Soit W' le groupe engendré par les symétries par rapport à ces racines ; comme le groupe des automorphismes d'un diagramme de type D_4 est d'ordre 6, l'indice de W'

dans W est un diviseur de 6. Or le produit des symétries par rapport à $\omega_3 - \omega_4$ et ω_3 conserve $\omega_1 - \omega_2$ et $\omega_2 - \omega_3$ et échange $\omega_3 - \omega_4$ avec $\omega_3 + \omega_4$; par ailleurs, la symétrie par rapport à la racine $(1/2)(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + \omega_4$ conserve $\omega_2 - \omega_3$ et $\omega_3 + \omega_4$ et échange $\omega_1 - \omega_2$ avec $\omega_3 - \omega_4$. Il en résulte facilement que W' est d'indice 6 dans W , donc que W est d'ordre $6.2^3.4!$. Les poids dominants fondamentaux sont.

$$\varpi_1 = \omega_1 + \omega_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$$

$$\varpi_2 = \omega_1 + \omega_2 + 2\omega_4 = 4\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 4\alpha_1$$

$$\varpi_3 = (1/2)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 3\omega_4) = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 3\alpha_1$$

$$\varpi_4 = \omega_4 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 .$$

IX. Type G_2 . La dimension de groupe est 14. L'espace V est engendré par 3 éléments ω_0 , ω_1 , ω_2 de somme nulle tels que

$$\alpha_1 = \omega_0 \qquad \alpha_2 = \omega_1 - \omega_0 .$$

L'opération w_1 change ω_0 en $-\omega_0$ et ω_1 en $\omega_1 + \omega_0$; w_2 change ω_0 en ω_1 , ω_1 en ω_0 . Les racines sont les $\pm\,\omega_i$, $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j)$. On définit une métrique positive invariante par le groupe de Weyl en posant $(\omega_i \mid \omega_i) = 1$, $(\omega_i \mid \omega_j) = -1/2$ si $i \neq j$. Les opérations de W sont les automorphismes w définis par $w.\omega_i = e\,\omega_{\pi(i)}$, où π est une permutation de $\{0 , 1 , 2\}$ et $e = \pm 1$; W est donc d'ordre 12. Les poids dominants fondamentaux sont

$$\varpi_1 = \omega_1 + \omega_0 = \alpha_2 + 2\alpha_1 \qquad \varpi_2 = \omega_1 - \omega_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_1 .$$