C. Chevalley

Les sous-groupes radiciels

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 17, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A4_0>

LES SOUS-GROUPES RADICIELS

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 6.5.1957)

Notations. Nous désignerons par G un groupe linéaire algébrique semi-simple irréductible, par T un tore maximal de G, par R l'ensemble des racines de G par rapport à T ; pour tout $\alpha \in R$, nous désignerons par τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G tel que l'on ait

$$t.\tau_\alpha(\lambda)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\lambda) \quad (t \in T, \lambda \in K) \ ;$$

nous poserons $P_\alpha = \tau_\alpha(K)$. Nous désignerons par Q_α la composante de l'élément neutre dans le noyau de α, par Z_α le centralisateur de Q_α, par Z'_α le groupe dérivé de Z_α, par T_α un tore maximal de Z'_α contenu dans T ; nous désignerons par w_α la symétrie par rapport à la racine α, et par σ_α un élément du normalisateur de T_α dans Z'_α n'appartenant pas à T_α ; σ_α appartient donc au normalisateur de T et sa classe suivant T est w_α. Pour tout tore T', nous désignerons par $\Gamma(T')$ le groupe des groupes à un paramètre de T' et par $X(T')$ le groupe des caractères rationnels de T' ; nous poserons $\Gamma^{Q}(T') = Q \otimes \Gamma(T')$, $X^{Q}(T') = Q \otimes X(T')$; on rappelle que les tores contenus dans T' sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces de l'espace vectoriel $X^{Q}(T')$, le tore qui correspond à un sous-espace Y de $X^{Q}(T')$ étant l'ensemble des éléments t tels que $\chi(t) = 1$ pour tout $\chi \in Y \cap X(T')$. Les espaces vectoriels $\Gamma^{Q}(T')$ et $X^{Q}(T')$ sont en dualité l'un avec l'autre ; il y a une correspondance bi-univoque entre les sous-espaces Z de $\Gamma^{Q}(T')$ et les sous-tores de T' ; si T'' est le tore associé à Z, $\Gamma(T'') = Z \cap \Gamma(T')$. Le groupe $\Gamma(T_\alpha)$ contient un élément γ_α tel que $\alpha(\gamma_\alpha) = 2$, $w_\alpha(\gamma_\alpha) = -\gamma_\alpha$.

Nous dirons qu'un ensemble S de racines est fermé si toute combinaison linéaire à coefficients entiers de racines de S qui est une racine appartient à S.

Nous désignerons par S un ensemble fermé de racines et par H le groupe engendré par les Z'_α pour tous les $\alpha \in S$. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- Le groupe H est semi-simple ; le groupe $T_H = T \cap H$ est un tore maximal de H ; les racines de H par rapport à T_H sont les restrictions à T_H des éléments de S ; il y a un groupe de Borel B de G contenant T tel que $B_H = B \cap H$ soit un groupe de Borel de H ; B_H est engendré par les P_α pour celles des racines $\alpha \in S$ qui sont négatives sur la chambre de Weyl associée à B .

Nous aurons besoin au cours de la démonstration d'un résultat relatif aux formules de multiplication dans la partie unipotente B^u d'un groupe de Borel B de G contenant T . Désignons par R_- l'ensemble des racines α qui sont négatives sur la chambre associée à B ; nous supposerons l'ensemble R_- ordonné d'une manière quelconque. On sait que l'algèbre $K[B^u]$ des fonctions numériques partout définies sur B^u est engendrée par des fonctions v_α ($\alpha \in R_-$) telles que l'on ait

$$s = \prod_{\alpha \in R_-} \tau_\alpha(v_\alpha(s)) \quad (s \in B^u) .$$

Il en résulte que l'on a

$$v_\alpha(ss'^{-1}) = P_\alpha(\ldots , v_\beta(s) , \ldots , v_{\beta'}(s'), \ldots) ,$$

les $P_\alpha(\ldots , X_\beta , \ldots , Y_{\beta'} , \ldots)$ étant des polynomes à coefficients dans K en $2n$ arguments X_β , $Y_{\beta'}$, (si n est le nombre d'éléments de R_-) .

LEMME 1.- Le polynome $P_\alpha(\ldots , X_\beta , \ldots , Y_{\beta'}, \ldots)$ est combinaison linéaire des monômes $\prod_{\beta, \beta' \in R_-} X_\beta^{i(\beta)} Y_{\beta'}^{j(\beta')}$ pour lequels on a $\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta') = \alpha$.

On a évidemment, pour tout élément $t \in T$, $v_\alpha(tst^{-1}) = \alpha(t)v_\alpha(s)$; tenant compte de ce que $t(ss'^{-1})t^{-1} = tst^{-1}(ts't^{-1})^{-1}$, il vient

$$\begin{aligned} P_\alpha(\ldots , \beta(t)X_\beta , \ldots , \beta'(t)Y_{\beta'}, \ldots) &= \\ &= \alpha(t)P_\alpha(\ldots , X_\beta , \ldots , Y_{\beta'} , \ldots) . \end{aligned}$$

Si donc on désigne par c le coefficient du monôme

$$\prod_{\beta, \beta' \in R_-} X_\beta^{i(\beta)} Y_{\beta'}^{j(\beta')} \quad \text{dans } P_\alpha \text{ , il vient}$$

$$c \prod_{\beta, \beta' \in R_-} (\beta(t))^{i(\beta)} (\beta'(t))^{j(\beta')} = c\,\alpha(t) \quad ;$$

il en résulte bien que l'on a $c = 0$ si α n'est pas égal à $\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta')$ (en notation additive), se qui démontre le lemme 1 .

<u>COROLLAIRE.- Soit</u> A <u>une partie de</u> R_- <u>qui possède la propriété suivante : si</u> α , β <u>sont des éléments de</u> A <u>et si</u> $i\alpha + j\beta$ <u>est une racine</u> (i <u>et</u> j <u>étant des entiers</u> >0) , <u>alors</u> $i\alpha + j\beta$ <u>est dans</u> A . <u>L'ensemble</u> B' <u>des éléments de la forme</u> $\prod_{\alpha \in A} s_\alpha$, <u>où</u> $s_\alpha \in P_\alpha$ <u>pour tout</u> $\alpha \in A$, <u>et où</u> A <u>est muni de la structure d'ordre induite par celle de</u> R_- , <u>est un sous-groupe de</u> B^u .

Les éléments s de B' sont caractérisés par la condition que l'on ait $v_\alpha(s) = 0$ pour tout $\alpha \notin A$. Ceci étant, si α est une racine de R_- n'appartenant pas à A et si on met α sous la forme $\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta')$, il y a ou bien une racine $\beta \notin A$ telle que $i(\beta) > 0$ ou bien une racine $\beta' \notin A$ telle que $j(\beta') > 0$; dans les deux cas on a

$$\prod_{\beta, \beta' \in R_-} (v_\beta(s))^{i(\beta)} (v_{\beta'}(s'))^{j(\beta')} = 0 \quad \text{si } s , s' \text{ sont dans } B' ,$$

ce qui montre le corollaire.

<u>LEMME 2.- Soient</u> $\alpha_1 , \dots , \alpha_r$ <u>des racines linéairement indépendantes ; la composante connexe</u> T' <u>de l'élément neutre dans</u> $Q_{\alpha_1} \cap \dots \cap Q_{\alpha_r}$ <u>est un tore de codimension</u> r <u>dans</u> T ; <u>le groupe</u> T'' <u>engendré par</u> $T_{\alpha_1} , \dots , T_{\alpha_r}$ <u>est un tore de dimension</u> r ; $T' \cap T''$ <u>est fini, et on a</u> $T = T'T''$.

Le groupe T' est la composante de l'élément neutre dans l'intersection des noyaux de $\alpha_1 , \dots , \alpha_r$; il en résulte que $\Gamma(T')$ est l'ensemble des $\gamma \in \Gamma(T)$ tels que $\langle \gamma , \alpha_i \rangle = 0$ $(1 \leq i \leq r)$; comme les α_i sont linéairement indépendantes, ces éléments engendrent un sous-espace de codimension r de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$, ce qui démontre la première assertion. Munissons $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ d'une forme quadratique définie positive invariante par les opérations du groupe de Weyl ; $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T_\alpha)$ est alors, pour toute racine α , la droite orthogonale à l'hyperplan de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ d'équation $\alpha = 0$. L'espace engendré par les $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T_{\alpha_i})$ est donc le complémentaire orthogonal de l'intersection des hyperplans $\alpha_i = 0$ et est par suite de dimension r puisque $\alpha_1 , \dots , \alpha_r$ sont linéairement indépendantes. Cet espace est contenu dans $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T'')$; par ailleurs il est de la forme $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T''_0)$, où T''_0 est un tore qui, contenant chacun des T_{α_i} , contient T'' ; on en conclut que $T'' = T''_0$, donc que T'' est de dimension r . Les éléments de $\Gamma(T')$ sont dans tous les hyperplans $\alpha_i = 0$, donc orthogonaux aux éléments de $\Gamma(T'')$; on en conclut que $\Gamma(T') \cap \Gamma(T'') = \{0\}$, donc qu

$T' \cap T''$ est fini ; l'homomorphisme canonique de $T'T''$ sur $T'T''/T'$ induit un homomorphisme de noyau fini de T'' , d'où $\dim T'T''/T' \geqslant \dim T'' = r$ et par suite $\dim T'T'' \geqslant r + \dim T' = \dim T$, d'où $T'T'' = T$.

Ceci dit, nous allons aborder la démonstration du théorème 1.

Si α est une racine de S , w_α transforme une racine β en $\beta - \beta(\gamma_\alpha)\alpha$, et $\beta(\gamma_\alpha)$ est entier ; il en résulte que w_α transforme en lui-même le sous-groupe de $X(T)$ engendré par S , donc aussi l'ensemble S et le sous-espace Y de $X^{Q}(T)$ engendré par S . Appliquant les résultats de la proposition 1, exposé 14 aux éléments de S et à l'espace vectoriel déduit de Y par extension du corps de base au corps des réels, on voit que, si $r = \dim Y$, il y a r éléments linéairement indépendants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de S tels que tout élément de S puisse se mettre sous forme de combinaison linéaire à coefficients tous $\geqslant 0$ ou tous $\leqslant 0$ de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$; ces coefficients sont rationnels, car $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ forment une base de Y . Nous poserons $w_i = w_{\alpha_i}$, $P_i = P_{\alpha_i}$, $Q_i = Q_{\alpha_i}$, $Z'_i = Z'_{\alpha_i}$, $T_i = T_{\alpha_i}$, $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Tout élément α de S est le transformé de l'un des α_i par une opération w du groupe engendré par $w_1, \dots, w_r$ (corollaire à la proposition 3, exposé 14) ; comme $w_\alpha = w w_i w^{-1}$ si $\alpha = w.\alpha_i$, on voit que le groupe W_H engendré par les w_α ($\alpha \in S$) est déjà engendré par les w_i . De plus, les opérations de W_H transforment en lui-même le groupe engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (car $w_i . \alpha_j$ appartient à ce groupe si $1 \leq i , j \leq r$) et par suite tout élément de S est combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i.

Soient T' la composante de l'élément neutre dans $\bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ et $T_H = T_1 \dots T_r$. Il résulte du lemme 2 que $T_H T' = T$ et que $T_H \cap T'$ est fini. Les éléments de T' commutent avec ceux de H ; en effet, si $\alpha \in S$, α est combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i , d'où $\alpha(T') = \{1\}$; ceci montre que t' commute avec les éléments de P_α et de $P_{-\alpha}$; il commute évidemment avec ceux de T_α ; comme l'ensemble $P_\alpha T_\alpha P_{-\alpha}$ est ouvert dans Z'_α, c' en est un ensemble de générateurs, ce qui montre que t' commute avec les éléments de Z'_α ; ceci étant vrai pour tout α , t' commute avec les éléments de H . Comme chaque Z'_α est son propre groupe dérivé, H est son propre groupe dérivé ; il résulte alors du lemme 2, exposé 16 que $H \cap T'$ est fini. Le tore T_H est contenu dans H ; il est donc contenu dans un tore maximal $\overline{T}_H$ de H ;

comme les éléments de T' commutent avec ceux de $\bar{T}_H$, $\bar{T}_H T'$ est un tore qui, contenant $T_H T' = T$, lui est identique. Comme $\bar{T}_H \cap T'$ est fini, il en résulte que $\bar{T}_H / T_H$ est fini, d'où $\bar{T}_H = T_H$; T_H est donc un tore maximal de H . Le groupe $H \cap T$ est un sous-groupe commutatif de H qui contient T_H et dont les éléments sont semi-simples ; il en résulte que $H \cap T = T_H$ (car le centralisateur de T_H dans H est le produit semi-direct de T_H par un groupe d'éléments unipotents) ; on a en particulier $T_\alpha \subset T_H$ pour toute racine $\alpha \in S$. De plus, si $\alpha \in S$, l'élément σ_α , qui est dans H et dans le normalisateur de T , est dans le normalisateur de T_H . Nous désignerons par N_H le groupe engendré par T_H et par les σ_i $(1 \leq i \leq r)$; N_H/T_H est donc isomorphe au groupe W_H ; pour tout élément w de W_H , nous choisirons un élément σ_w de N_H qui produise l'opération w du groupe de Weyl de G .

Il y a au moins un élément γ de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ tel que l'on ait $\alpha_i(\gamma) < 0$ $(1 \leq i \leq r)$, puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont linéairement indépendants. Choisissons d'autre part un élément γ_1 appartenant à une chambre de l'espace $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$; on peut alors trouver un nombre rationnel a tel que l'on ait
$\rho(\gamma + a\gamma_1) \neq 0$ pour toute racine ρ de G et de plus
$\alpha_i(\gamma + a\gamma_1) < 0$ $(1 \leq i \leq r)$; l'élément $\gamma' = \gamma + a\gamma_1$ appartient alors à une chambre sur laquelle $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont négatives ; soit B le groupe de Borel qui correspond à cette chambre. Nous désignerons par R_- l'ensemble des racines de G qui sont négatives sur la chambre associée à B , ensemble que nous supposerons ordonné d'une manière quelconque, et par S_- l'ensemble $S \cap R_-$; S_- se compose des éléments de S qui sont des combinaisons linéaires à coefficients ≤ 0 de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Si une combinaison linéaire à coefficients entiers > 0 d'éléments de S_- est une racine, cette racine est dans S_- . Nous désignerons par B_H^u le sous-groupe de B engendré par les P_α pour $\alpha \in S_-$; ce sous-groupe se compose des éléments de la forme $\prod_{\alpha \in S_-} s_\alpha$, avec $s_\alpha \in P_\alpha$ pour tout $\alpha \in S_-$ (lemme 1) ; nous poserons $B_H = B_H^u T_H$; nous nous proposons de montrer que H est la réunion des ensembles $B_H \sigma_w B_H$ pour tous les $w \in W_H$.

Observons d'abord que H est identique au groupe H' engendré par les Z_i' $(1 \leq i \leq r)$. En effet, le groupe H' contient T_H et les éléments σ_i $(1 \leq i \leq r)$, donc N_H . Si α est un élément quelconque de S , il y a une opération $w \in W_H$ et un indice i $(1 \leq i \leq r)$ tels que $w \cdot \alpha_i = \alpha$, d'où

$\sigma_w Z'_i \sigma_w^{-1} = Z'_\alpha$; comme $\sigma_w \in H'$, on a $Z'_\alpha \subset H'$, ce qui démontre notre assertion. Désignant par E la réunion des $B_H \sigma_w B_H$, il suffira donc de montrer que $Z'_i E \subset E$ $(1 \leq i \leq r)$. Soit $S_-^{(i)}$ l'ensemble des éléments $\neq \alpha_i$ de S_- . Soit C_i le groupe engendré par les P_α pour $\alpha \in S_-^{(i)}$; on a $B_H^u = C_i P_i$. Comme C_i est un sous-groupe fermé de codimension ≤ 1 dans B_H^u , c'est un sous-groupe distingué de B_H^u . Par ailleurs, si $\alpha \in S_-^{(i)}$, $w_i . \alpha$ est de la forme $\alpha + k\alpha_i$; comme α n'est pas multiple de α_i , il ya au moins un indice $j \neq i$ tel que le coefficient de α_j dans l'expression de α comme combinaison linéaire de $\alpha_1 , \ldots , \alpha_r$ soit > 0 ; il en résulte que le coefficient de α_j dans l'expression de $w_i . \alpha$ est > 0 , donc que $w_i . \alpha \in S^{(i)}$; comme on a $\sigma_i P_\alpha \sigma_i^{-1} = P_{w_i . \alpha}$, on en conclut que σ_i appartient au normalisateur de C_i . Ce normalisateur contient donc $P_i T_i \sigma_i P_i$, qui est dense dans Z'_i ; il en résulte que Z'_i est contenu dans le normalisateur de C_i . On a donc $Z'_i B_H \sigma_w B_H = C_i Z'_i P_i T_H \sigma_w B_H = C_i Z'_i \sigma_w T_H B_H$ puisque $P_i \subset Z'_i$ et que σ_w appartient au normalisateur de H . Supposons d'abord que $w^{-1} . \alpha_i \in S$; dans ce cas, observons que Z'_i est la réunion de $P_i T_i$ et de $P_i \sigma_i P_i$, et que $P_i \sigma_w = \sigma_w P_{w^{-1} . \alpha_i}$ est contenu dans $\sigma_w B_H$. Comme $C_i P_i T_i \subset B_H$, on a dans ce cas $Z'_i B_H \sigma_w B_H \subset E$. Dans le cas où $w^{-1} . \alpha_i$ n'appartient pas à S , posons $w' = w_i w$, d'où $w'^{-1} . \alpha_i = - w^{-1} . \alpha_i \in S$; comme $Z'_i = Z'_i \sigma_i$, on a $Z'_i \sigma_w = Z'_i \sigma_i \sigma_w$ qui est contenu dans $Z'_i \sigma_{w'} T_H$ puisque $\sigma_i \sigma_w \equiv \sigma_{w'}$ (mod T_H) . On est alors ramené au cas précédent, et on voit que, dans tous les cas, $Z'_i B_H \sigma_w B_H \subset E$, ce qui montre bien que $E = H$.

Montrons maintenant que B_H est un groupe de Borel de H . Comme c'est un sous-groupe résoluble connexe de H , il est en tous cas contenu dans un groupe de Borel $\bar{B}_H$ de B_H . La formule $H = \bigcup_{w \in W_H} B_H \sigma_w B_H$ montre alors que, pour établir que $\bar{B}_H = B_H$, il suffit de montrer que $\sigma_w \notin \bar{B}_H$ si w est une opé~~ration distincte~~ de l'identité de W_H . Or on sait qu'il existe au moins une racine $\alpha \in S_-$ telle que $w . \alpha \notin S_-$ (Proposition 6, exposé 14) ; on a alors $w . \alpha = - \beta$ où β est une racine de S_- . Le groupe engendré par B_H et σ_w contient donc P_β , T_β et $P_{-\beta}$, ce qui montre qu'il contient le groupe non résoluble Z'_β , et établit notre assertion. Comme $B \cap H$ est un sous-groupe résoluble de H contenant B_H , on a $B \cap H = B_H$. Si M est le radical de H , M est contenu dans B_H et $M \cap B_H^u$ est engendré par ~~ceux~~ des P_α qu'il contient (car ce sous-groupe est transformé en lui-même par les opérations de T ; cf. proposition 1, exposé 13). Or, pour toute racine $\alpha \in S_-$, $M \cap Z'_\alpha$ est un sous-groupe résoluble distingué de Z'_α , donc fini, ce qui montre que $P_\alpha \not\subset M$ et que $M \cap B_H^u = \{e\}$. Le groupe algébrique connexe M ne contient donc aucun élément unipotent $\neq e$, ce qui montre que ses éléments sont semi-simples et que c'est un tore ; étant distingué dans H , il appartient au centre de H ; mais, comme H est son propre groupe dérivé, son centre ne contient aucun tore de dimension > 0 (lemme 2, exposé 15) ; M est donc fini, d'où $M = \{e\}$, ce qui montre que H est semi-simple. On a $\alpha(K) = P_\alpha \subset H$ pour tout $\alpha \in S$, ce qui montre que les restrictions à T_H des racines de S sont des racines de H ; comme la dimension du groupe de Borel B_H de H est égale au nombre d'éléments de S_- , donc à la moitié du nombre d'éléments de S , il en résulte que les restrictions à T_H des racines de S sont toutes les racines de H . Le théorème1 est établi.

REMARQUE.- Pour toute racine $\alpha \in S$, désignons par $\tilde{\alpha}$ la restriction de α à T_H ; il est clair que la symétrie $w_{\tilde{\alpha}}$ par rapport à $\tilde{\alpha}$, considérée comme opérant dans $\Gamma(T_H)$, n'est autre que la restriction à $\Gamma(T_H)$ de l'opération w_α sur $\Gamma(T)$. Par ailleurs, l'inclusion $T_H \longrightarrow T$ définit un homomorphisme $j : X(T) \longrightarrow X(T_H)$ et il est clair que, si on considère w_α (resp. $w_{\tilde{\alpha}}$) comme opérant dans $X(T)$ (resp. $X(T_H)$) , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(T) & \xrightarrow{\ j\ } & X(T_H) \\ {\scriptstyle w_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w_\alpha} \\ X(T) & \xrightarrow{\ j\ } & X(T_H) \end{array}$$

est commutatif ; il en résulte que, si β est une autre racine de S et si $w_\alpha \cdot \beta = \beta + k\alpha$, on a $w_{\tilde{\alpha}} \cdot \tilde{\beta} = \tilde{\beta} + k\tilde{\alpha}$.

Les groupes définis à partir d'un ensemble fermé S de racines par le procédé indiqué ci-dessus s'appellent les <u>sous-groupes radiciels de</u> G .

Nous nous proposons maintenant d'étudier les sous-groupes distingués connexes fermés de G , et notamment de montrer qu'ils sont radiciels. Etablissons d'abord la

<u>PROPOSITION 1</u>.- <u>Soient</u> A <u>le groupe des automorphismes de</u> G <u>et</u> J <u>le groupe des automorphismes intérieurs ; le groupe</u> A/J <u>est alors fini ; si</u> B <u>est un groupe de Borel contenant</u> T , A/J <u>est isomorphe à un groupe de permutation de l'ensemble des racines fondamentales par rapport à</u> B .

Un automorphisme u de G transforme B en un groupe de Borel, qui est conjugué à B dans G ; il y a donc un automorphisme $u_1 \in Ju$ tel que $u_1(B) = B$; u_1 transforme T en un tore maximal contenu dans B, qui est conjugué à T dans B ; il y a donc un automorphisme $u_2 \in u_1 J = uJ$ tel que $u_2(B) = B$, $u_2(T) = T$. Si α est une racine, il en est évidemment de même de la fonction $\alpha' : t \longrightarrow \alpha(u_2^{-1}(t))$; de plus, on a $u_2(P_\alpha) = P_{\alpha'}$. Si α est négative sur la chambre associée à B, on a $P_\alpha \subset B$, d'où $P_{\alpha'} \subset B$, et α' négative sur la chambre associée à B ; l'application $\alpha \longrightarrow \alpha'$ permute donc entre elles les racines fondamentales relatives à B. Soit A_1 le groupe des automorphismes qui conservent B et T et qui conservent toutes les racines relatives à T ; le groupe $A_1 J$ est donc d'indice fini dans A ; si A_o est le groupe de tous les automorphismes qui conservent T et B, on a $A = A_o J$ et $A_o \cap J = A_1$ (car on sait qu'aucune opération distincte de l'identité du groupe de Weyl ne laisse fixes toutes les racines fondamentales). Le groupe A_1 est un sous-groupe distingué de A_o et A_o/A_1 est un isomorphe à un groupe de permutations des racines fondamentales ; $A_1 J$ est donc distingué dans A, et $A/A_1 J$ est isomorphe à A_o/A_1. Nous allons maintenant montrer que $A_1 \subset J$. Soit à partir de maintenant u un élément de A_1 ; on a donc $u(P_\alpha) = P_\alpha$ pour toute racine α. Comme les seuls automorphismes de K sont les homothéties, il y a un élément $c_\alpha \neq 0$ de K tel que l'on ait $u(\tau_\alpha(\lambda)) = \tau_\alpha(c_\alpha \lambda)$ $(\lambda \in K)$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ les racines fondamentales par rapport à B ; comme elles sont linéairement indépendantes, il y a un élément t de T tel que $c_{\alpha_i} = \alpha_i(t)$ $(1 \leq i \leq \ell)$; multipliant u par l'automorphisme intérieur produit par t^{-1}, on se ramène au cas où les c_{α_i} $(1 \leq i \leq \ell)$ sont égaux à 1 ; supposons désormais qu'il en soit ainsi ; u laisse donc fixes les éléments des groupes P_{α_i}. Par ailleurs, u laisse fixes les éléments de T ; en effet, les éléments de la forme $u(t)t^{-1}$ $(t \in T)$ forment un sous-groupe connexe T_o de T sur lequel chaque racine est constante de valeur 1 ; comme les racines engendrent $X^{\mathbb{Q}}(T)$, il en résulte que T_o se réduit à l'élément neutre, ce qui montre que u laisse fixes les éléments de T. Par ailleurs, on a $u(P_{-\alpha_i}) = P_{-\alpha_i}$; comme $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i} P_{-\alpha_i}$ est un système de générateurs de Z'_{α_i}, u transforme le groupe Z'_{α_i} en lui-même ; comme le normalisateur de T_{α_i} dans Z'_{α_i} est $T_{\alpha_i} \cup T_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_i}$, on a $u(\sigma_{\alpha_i}) = t_o \cdot \sigma_{\alpha_i}$, t_o étant un élément de T_{α_i}. Or, soit s' un élément distinct de l'élément neutre de $P_{-\alpha_i}$; rappelons que Z'_{α_i} est la réunion des ensembles disjoints $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_i} P_{\alpha_i}$ et $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i}$; s' peut donc se mettre sous la forme $s_1 t_1 \sigma_{\alpha_i} s_2$, où s_1 , $s_2 \in P_{\alpha_i}$, $t_1 \in T_{\alpha_i}$; s_1 , s_2 et et t_1 sont laissés fixes par u , et on a

$$s'^{-1} u(s') = s_2\ \sigma_{\alpha_i}^{-1}\ t_o\ \sigma_{\alpha_i} s_2\ ;$$

cet élément est d'une part dans $P_{-\alpha_i}$ et d'autre part, comme le montre le second membre, dans $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i}$; c'est donc l'élément neutre, ce qui montre que u laisse invariants les éléments de $P_{-\alpha_i}$ ainsi que σ_{α_i} ; on en déduit que u laisse invariants tous les éléments du groupe Z'_{α_i} , et par suite aussi du groupe $Z_{\alpha_i} = TZ'_{\alpha_i}$. Or on sait que les groupes Z_{α_i} $(1 \leq i \leq \ell)$ engendrent le groupe G (théorème 2, exposé 12) ; u est donc l'automorphisme identique, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

COROLLAIRE.- *Soit* H *un sous-groupe distingué fermé connexe de* G ; H *est alors semi-simple ; si* H' *est la composante connexe de l'élément neutre dans le centralisateur de* H , *on a* $G = HH'$ *et* $H \cap H'$ *est fini ; le groupe* G/H *est semi-simple.*

Le radical de H est évidemment transformé en lui-même par tout automorphisme de H ; c'est donc un sous-groupe résoluble distingué connexe de G , ce qui montre qu'il se réduit à son élément neutre. Si on fait correspondre à tout $s \in G$ l'automorphisme $h \longrightarrow shs^{-1}$ de H , on obtient un homomorphisme de G sur un groupe A d'automorphismes de H , qui contient le groupe J des automorphismes intérieurs ; A/J est donc fini. Or, si H'_o est le centralisateur de H , l'image réciproque de J par l'homomorphisme en question est le sous-groupe fermé HH'_o ; comme ce sous-groupe est d'indice fini dans G , il est égal à G d'où $HH' = G$ puisque H' est d'indice fini dans H'_o . Le groupe $H \cap H'$ est dans le centre de H , et est donc fini. L'homomorphisme canonique de G sur G/H induit un épimorphisme rationnel de H' sur G/H ; H' est semi-simple comme sous-groupe distingué fermé connexe de G ; G/H est donc semi-simple en vertu du

LEMME 3.- *Si* ρ *est un épimorphisme rationnel de noyau fini de* G *sur un groupe algébrique* G' , G' *est semi-simple.*

Le noyau N de ρ , étant un sous-groupe distingué fini de G , est dans le centre de G ; si M' est le radical de G' , $\rho^{-1}(M')/N$ est isomorphe à M', donc résoluble ; $\rho^{-1}(M')$ est donc un sous-groupe distingué résoluble de G , et est par suite fini, ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2.- Tout sous-groupe distingué fermé connexe H de G est radiciel ; pour qu'une partie S de l'ensemble R des racines R de G détermine un sous-groupe radiciel distingué H de G , il faut et il suffit que chacun des ensembles S et $R-S$ soit fermé ; s'il en est ainsi, le groupe radiciel déterminé par $R-S$ est la composante connexe de l'élément neutre dans le centralisateur de H .

Soit H un sous-groupe distingué fermé connexe de G , et soit H' la composante de l'élément neutre dans son centralisateur. Soient T_H (resp. $T_{H'}$) un tore maximal de H (resp. H') et B_H (resp. $B_{H'}$) un groupe de Borel de H (resp. H') . Alors $B_H B_{H'}$ est résoluble et connexe, donc contenu dans un groupe de Borel de G , et $T_H T_{H'}$ est un tore, donc contenu dans un tore maximal de G. Comme tous les tores maximaux de G sont conjugués, on peut supposer que $T_H T_{H'} \subset T$. Comme $G = HH'$, un élément de T peut se mettre sous la forme ss' , avec $s \in H$, $s' \in H'$; comme s' et ss' commutent avec les éléments de T_H , il en est de même de s , d'où $s \in T_H$ puisque T_H est son propre centralisateur dans H ; on voit de même que $s' \in T_{H'}$, d'où $T = T_H T_{H'}$. Soit B un groupe de Borel de G contenant $B_H B_{H'}$, donc T ; le groupe $B \cap H$ (resp. $B \cap H'$) est un sous-groupe résoluble de H (resp. H') contenant B_H (resp. $B_{H'}$) ; on a donc $B_H = B \cap H$, $B_{H'} = B \cap H'$, ce qui montre que B_H , $B_{H'}$ sont des sous-groupes distingués de B . Un élément de B se met sous la forme $s_1 s_1'$ où $s_1 \in H$, $s_1' \in H'$; comme $s_1 s_1'$ et s_1' appartiennent au normalisateur de B_H , il en est de même de s_1 , d'où $s_1 \in B_H$, puisque B_H est son propre normalisateur dans H ; on voit de même que $s_1' \in B_{H'}$, ce qui montre que $B = B_H B_{H'}$. Soit B_H^u l'ensemble des éléments unipotents de B_H ; comme c'est un sous-groupe distingué de B contenu dans B^u , il est engendré par ceux des P_α qu'il contient. Soient R_- l'ensemble des racines de G qui sont négatives sur la chambre associée à B et S_- l'ensemble des $\alpha \in R_-$ tels que $P_\alpha \in B_H$; il est clair que la condition $\alpha \in R_- - S_-$ entraîne $P_\alpha \in B_{H'}$. Soit $\alpha \in S_-$; le groupe $P_{-\alpha}$, qui est conjugué à P_α dans G , est dans H ; or Z'_α est engendré par P_α et $P_{-\alpha}$; en effet, le normalisateur dans Z'_α du groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ contient

T_α , et est donc identique à Z'_α , puisque $P_\alpha T_\alpha P_{-\alpha}$ est un ensemble de générateurs de Z'_α ; le groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ est donc un sous-groupe distingué de Z'_α , et par suite semi-simple ; comme tout groupe semi-simple de dimension > 0 est de dimension ≥ 3 , le groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ est Z'_α tout entier. On a donc $Z'_\alpha \subset H$ pour tout $\alpha \in S_-$; de plus, il est clair que le groupe $\widetilde{B}_H$ engendré par les $P_{-\alpha}$ pour $\alpha \in S_-$ est le groupe de Borel de H opposé à B_H (relativement à T_H) ; le groupe engendré par les Z'_α pour $\alpha \in S_-$ contient $B_H\widetilde{B}_H$, qui est une partie ouverte de H ; ce groupe est donc identique à H . Soit S l'ensemble composé de S_- et des opposées des racines de S_- ; comme les éléments de $T_{H'}$ commutent avec ceux de H , il est clair que les racines appartenant à S prennent la valeur 1 sur $T_{H'}$. On voit de même que H' est engendré par les Z'_α pour $\alpha \in R_- - S_-$; $R - S$ est l'ensemble des $\pm\alpha$ pour $\alpha \in R_- - S_-$, et les racines de $R - S$ prennent la valeur 1 sur T_H . Comme $T_H T_{H'} = T$, aucune racine ne peut être égale à 1 à la fois sur T_H et sur $T_{H'}$; S (resp. $R - S$) est donc l'ensemble de toutes les racines de G qui sont égales à 1 sur $T_{H'}$ (resp. T_H) , ce qui montre que S et $R - S$ sont fermés.

Soit réciproquement S un ensemble fermé de racines tel que $R - S$ soit fermé. Nous allons montrer que, si $\alpha \in S$, $\beta \in R - S$, tout élément de P_α commute avec tout élément de P_β . Observons d'abord que, puisque S et $R - S$ sont fermés, aucun élément de la forme $i\alpha + j\beta$, où i , j sont des entiers > 0 ne peut appartenir à S ou à $R - S$; on en conclut que $i\alpha + j\beta$ n'est pas une racine si $i \neq 0$, $j \neq 0$. Par ailleurs, il y a au moins un groupe de Borel B contenant T tel que α et β soient négatives sur la chambre associée à B ; en effet, α et β étant linéairement indépendantes, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ tels que $\alpha(\gamma)$ et $\beta(\gamma)$ soient < 0 est une partie ouverte non vide de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$, et rencontre par suite au moins une chambre. Ceci étant, il résulte du lemme 1 que $P_\alpha P_\beta$ est un sous-groupe de B . Comme les éléments de ce groupe sont unipotents et comme P_α et P_β en sont des sous-groupes fermés de codimension 1 , P_α et P_β sont des sous-groupes distingués de $P_\alpha P_\beta$. Si $s \in P_\alpha$, on a $s\,\tau_\beta(\lambda)s^{-1} = \tau_\beta(c(s)\lambda)$, $c(s) \in K^*$ (le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K) . L'application $s \longrightarrow c(s)$ est un homomorphisme rationnel (puisque $\tau_\alpha(c(s)) = s\,\tau_\alpha(1)s^{-1}$) de P_α dans K^* ; il en résulte que $c(s) = 1$ pour tout $s \in P_\alpha$, donc que tout élément de P_α commute avec tout élément de P_β . Nous avons vu plus haut que Z'_α (resp.

Z'_β) est engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ (resp. P_β et $P_{-\beta}$) ; comme $-\alpha \in S$, $-\beta \in R - S$, on voit que tout élément de Z'_α commute avec tout élément de Z'_β. Soient H et H' les groupes radiciels définis par les ensembles S et R − S ; il résulte de ce qu'on vient d'établir que tout élément de H' commute avec tout élément de H . Par ailleurs, le groupe HH' contient Z'_α pour toute racine α ; comme il contient tous les T_α, il contient T , donc aussi les $Z_\alpha = Z'_\alpha T$, ce qui montre que c'est G tout entier. La formule HH' = G montre alors que H et H' sont des sous-groupes distingués de G . Le théorème 2 est donc établi.

Soit S un ensemble fermé de racines tel que R − S soit fermé ; si $\alpha \in S$, $\beta \in R - S$, $w_\alpha \cdot \beta$ est de la forme $\beta + k\alpha$, k étant un entier ; cet entier est nul puisque $i\alpha + j\beta$ n'est pas racine si $i \neq 0$, $j \neq 0$. Soit $\sum$ un système fondamental de racines ; alors $\sum$ est la réunion de $\sum \cap S = \sum_1$ et de $\sum \cap (R - S) = \sum_2$, et, si $\alpha \in \sum_1$, $\beta \in \sum_2$, l'entier de Cartan relatif à α et β est nul. Supposons réciproquement donnée une décomposition $\sum = \sum_1 \cup \sum_2$ de $\sum$ en deux ensembles tels que l'entier de Cartan relatif à une racine de $\sum_i$ et une racine de $\sum_j$ soit nul si $i \neq j$. Soit S (resp. S') l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires de racines de $\sum_1$ (resp. $\sum_2$) . Alors toute racine appartient soit à S soit à S' . En effet, si α appartient par exemple à $\sum_1$, w_α permute entre elles les racines de S et laisse invariantes les racines appartenant à $\sum_2$, donc aussi toutes celles de S' ; de même, si $\alpha \in \sum_2$, w_α laisse invariantes les racines de S et permute entre elles celles de S' . Comme le groupe de Weyl est engendré par les w_α pour $\alpha \in \sum$, ses opérations transforment chacun des ensembles S , S' en lui-même. Comme toute racine est transformée d'une racine de $\sum$ par une opération du groupe de Weyl, il en résulte bien que $S \cup S'$ est l'ensemble de toutes les racines. Par ailleurs, il est clair que S et S' sont fermés.

Munissons $X^{\mathbb{Q}}(T)$ d'un produit scalaire défini par une forme quadratique définie positive et invariante par le groupe de Weyl ; on voit alors tout de suite que, α et β étant des racines, une condition nécessaire et suffisante pour que w_α laisse β fixe est que α et β soient orthogonales.

Nous dirons qu'un système de racines est simple s'il est impossible de le décomposer en deux parties fermées non vides disjointes. Il résulte alors du théorème 2 que l'on a la

PROPOSITION 1.- Pour que G n'admette pas d'autres sous-groupes distingués fermés connexes que $\{e\}$ et lui-même, il faut et il suffit que l'ensemble de ses racines soit simple.

Par ailleurs, dans le cas général, soient $S_1, \ldots, S_h$ les éléments minimaux de l'ensemble des parties $S \neq \emptyset$ de l'ensemble R des racines telles que S et $R - S$ soient fermés ; il est clair que R est la réunion des ensembles disjoints S_i. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Le groupe G contient un certain nombre de sous-groupes fermés distingués connexes G_i qui possèdent les propriétés suivantes : pour tout i, l'ensemble des racines de G_i est simple ; on a $G = G_1, \ldots, G_h$; si $i \neq j$, tout élément de G_i commute avec tout élément de G_j ; le groupe $G_i \cap \overline{\prod_{j \neq i} G_j}$ est fini.

De plus, on voit facilement que l'ensemble des groupes G_i est bien déterminé par la connaissance de G.

Nous appellerons presque simple un groupe semi-simple dont l'ensemble des racines est simple ; les notations étant celles de la proposition 2, nous dirons que les G_i sont les composantes presque simples de G.