C. Chevalley

Les systèmes linéaires sur G/B

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 15, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A2_0>

LES SYSTÈMES LINÉAIRES SUR G/B

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 8.4.1957)

1.- Compléments au théorème de BRUHAT.

On désigne par G un groupe algébrique irréductible semi-simple, par T un tore maximal de G, par B un groupe de Borel contenant T, par B^u l'ensemble des éléments unipotents de B, par $\mathfrak{n}(T)$ le normalisateur de T, par σ_o un élément de $\mathfrak{n}(T)$ tel que l'opération correspondante du groupe de Weyl transforme la chambre associée à B en sa symétrique par rapport à l'origine, par $\tilde{B}$ le groupe $\sigma_o^{-1} B \sigma_o$ et par $\tilde{B}^u$ l'ensemble des éléments unipotents de $\tilde{B}$. Rappelons que $\tilde{B} B$ est une partie ouverte de G, et que l'application $(\tilde{b}, b') \to \tilde{b} b'$ de $\tilde{B}^u \times B$ dans G est une bijection de $\tilde{B}^u \times B$ sur une partie ouverte de G (corollaire 2 au théorème 3, exposé 13). Nous nous proposons d'établir la

PROPOSITION 1.- *L'application* $(\tilde{b}, b') \to \tilde{b} b'$ *est un isomorphisme de* $\tilde{B}^u \times B$ *sur une sous-variété ouverte de* G.

Il nous suffira d'établir que cette application est birationnelle (cf. théorème 2, exposé 5, les variétés considérées étant normales puisque non singulières). Nous nous servirons pour cela de la notion d'espace tangent à une variété.

Soit x un point d'une variété U ; désignons par $\mathfrak{o}$ son anneau local et par $\mathfrak{m}$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{o}$; $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ est donc un $\mathfrak{o}$-module, d'ailleurs identique à K. Rappelons qu'on appelle vecteur tangent à U en x toute dérivation (K-linéaire) de l'algèbre $\mathfrak{o}$ dans le module $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. Les vecteurs tangents à U en x forment un espace vectoriel $\mathcal{L}(x)$, l'espace tangent à U en x, canoniquement isomorphe au dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, où $\mathfrak{m}^2$ est l'idéal engendré par les produits de deux éléments de $\mathfrak{m}$; si x est simple sur U, $\mathcal{L}(x)$ est de dimension égale à celle de U ; dans le cas contraire, $\mathcal{L}(x)$ est de dimension $>$ dim U. Soit f une fonction sur U à valeurs dans une variété V, définie en un point x, et soit $y = f(x)$; l'application $L \to L \circ \varphi$ (où φ est le cohomomorphisme de f) est une application linéaire $D_x f$ de l'espace tangent à U en x dans l'espace tangent à V en y , qu'on appelle la dérivée de f en x . Ceci dit, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 1.- *Soit f un morphisme bijectif d'une variété U sur une partie dense d'une variété V . Supposons qu'il existe un point $x \in U$ tel que $D_x f$ soit une application injective ; f est alors birationnel.*

Soit φ le cohomomorphisme de f , qui est un isomorphisme du corps F_V des fonctions numériques sur V sur un sous-corps du corps F_U des fonctions numériques sur U ; comme f est bijectif, F_U est une extension radicielle de $\varphi(F_V)$ (proposition 1, exposé 8). Soit $y = f(x)$; soient $\mathfrak{o}_x$ et $\mathfrak{o}_y$ les anneaux locaux de x et de y , $\mathfrak{m}_x$ et $\mathfrak{m}_y$ leurs idéaux premiers maximaux ; il résulte de l'hypothèse que l'application de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ déduite de φ est surjective, donc que $\mathfrak{o}_x$ est non ramifié par rapport à $\varphi(\mathfrak{o}_y)$ (Exposé 5, App. I) ; ceci entraîne comme on le sait que le corps des fractions F_U de $\mathfrak{o}_x$ est séparable sur $\varphi(F_V)$, donc lui est égal.

On sait par ailleurs que, si g est un isomorphisme d'une variété U sur une sous-variété d'une variété V , $D_x g$ est un isomorphisme de l'espace tangent à U en x sur un sous-espace de l'espace tangent à V en $g(x)$.

Ceci étant, nous pouvons aborder la démonstration de la proposition 1. Pour toute racine α de G par rapport à T , il existe un isomorphisme τ_α du groupe additif K sur un sous-groupe de G tel que $t\tau_\alpha(x)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)x)$ pour tout $x \in K$ et tout $t \in T$. L'espace tangent à K au point 0 s'identifie canoniquement à K ; posons $X_\alpha = (D_0 \tau_\alpha)\ (1)$; X_α est donc un élément non nul de l'espace tangent $\mathfrak{g}$ à G en e . Si la racine α est positive (resp. négative) sur la chambre associée à B , X_α appartient à l'espace tangent $\tilde{\mathfrak{b}}^u$ (resp. $\mathfrak{b}^u$) à $\tilde{B}^u$ (resp. B^u) en e . Soit par ailleurs $\mathfrak{t}$ l'espace tangent à T en e . Nous allons montrer que la somme $\mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in R} KX_\alpha$ (où R est l'ensemble des racines, que nous supposerons ordonné d'une manière quelconque) est directe. Pour tout $t \in T$, soit ζ_t l'automorphisme intérieur $s \to tst^{-1}$ de G . On a $\zeta_t(\tau_\alpha(x)) = \tau_\alpha(\alpha(t)x)$; si $c \in K$, l'homothétie de rapport c dans K est sa propre différentielle au point 0 , d'où il résulte immédiatement que l'automorphisme $D_e \zeta_t$ de $\mathfrak{g}$ transforme X_α en $\alpha(t)X_\alpha$. Par ailleurs, comme T est commutatif, $D_e \zeta_t$ laisse invariants les éléments de $\mathfrak{t}$. Il existe un élément $t \in T$ tel que les $\alpha(t)$, pour toutes les racines α, soient des éléments mutuellement distincts et $\neq 1$; comme des vecteurs propres appartenant à des valeurs propres distinctes d'un opérateur linéaire sont linéairement indépendants, il en résulte bien que la somme $\sum_{\alpha \in R} KX_\alpha + \mathfrak{t}$ est directe. Soient n le nombre des racines positives et ℓ la dimension de T ; soit R' (resp. R'') l'ensemble des racines positives (resp. négatives). Soit g l'application $(x_\alpha)_{\alpha \in R'} \to \prod_{\alpha \in R'} \tau_\alpha(x_\alpha)$ on sait que c'est une bijection de $K^{R'}$ sur $\tilde{B}^u$ (théorème 1, exposé 13) ; soit $D_0 g$ sa dérivée à l'origine 0 de $K^{R'}$. L'espace tangent à $K^{R'}$ au point 0 s'identifie à $K^{R'}$; il est clair que l'espace $(D_0 g)(K^{R'})$ contient tous les X_α pour $\alpha \in R'$, et est par suite de dimension $\geqslant n = \dim K^{R'}$; il est donc exactement de dimension n, et $D_0 g$ est une application injective. De plus, $(D_0 g)(K^{R'})$ est contenu dans $\tilde{\mathfrak{b}}^u$, qui est de dimension égale à celle de $\tilde{B}^u$, donc à n. Il résulte alors du lemme 1 que g est un isomorphisme de $K^{R'}$ sur $\tilde{B}^u$ et on a $\tilde{\mathfrak{b}}^u = \sum_{\alpha \in R'} KX_\alpha$. On voit de même que l'application $(t, (x_\alpha)_{\alpha \in R''}) \longrightarrow t \prod_{\alpha \in R''} \tau_\alpha(x_\alpha)$ est un isomorphisme de la variété $T \times K^{R''}$ sur B qui applique $K^{R''}$ sur B^u et que $\mathfrak{b}^u = \sum_{\alpha \in R''} KX_\alpha$; l'espace tangent $\mathfrak{b}$ à B en e est $\mathfrak{t} + \mathfrak{b}^u$. Ceci étant, soit f l'application $(\tilde{b}, b') \to \tilde{b}b'$ de $\tilde{B}^u \times B$ dans G ; il est clair que $(D_e f)(\mathfrak{b}^u \times \mathfrak{b})$ contient $\tilde{\mathfrak{b}}^u$ et $\mathfrak{b}$, donc est de dimension au moins égale à $2n + \ell = \dim G = \dim \tilde{B}^u \times B$; procédant comme plus haut, on en déduit que f est un isomorphisme de $\tilde{B}^u \times B$ sur une sous-variété ouverte de G.

De plus, la démonstration a donné les résultats suivants :

COROLLAIRE 1.- *Soit R l'ensemble des racines de G par rapport à T, rangé dans un ordre quelconque ; soit R' (resp. R'') l'ensemble des racines de R qui sont positives (resp. négatives) sur la chambre associée à B. Alors $(x_\alpha)_{\alpha \in R'} \to \prod_{\alpha \in R'} \tau_\alpha(x_\alpha)$ est un isomorphisme de la variété $K^{R'}$ sur $\tilde{B}^u$, $(x_\alpha)_{\alpha \in R''} \to \prod_{\alpha \in R''} \tau_\alpha(x_\alpha)$ est un isomorphisme de la variété $K^{R''}$ sur B^u, $(t, b^u) \to tb^u$ est un isomorphisme de la variété $T \times B^u$ sur B.*

COROLLAIRE 2.- L'application $(b^u, b') \rightarrow b^u \sigma_o b'$ est un isomorphisme de $B^u \times B$ sur une partie ouverte de G .

On a en effet $b^u \sigma_o b' = \sigma_o(\sigma_o^{-1} b^u \sigma_o)b'$, et $\sigma_o^{-1} B^u \sigma_o = \widetilde{B}^u$.

COROLLAIRE 3.- Soit π l'application canonique de G sur G/B ; posons $e_B = \pi(e)$, $x_o = \sigma_o . e_B$. Alors $b \rightarrow b.x_o$ est un isomorphisme de la variété B^u sur une sous-variété ouverte de G/B .

En effet, $B^u \sigma_o B$ est une partie ouverte de G saturée par rapport à la relation d'équivalence définie par les multiplications à droite par les éléments de B . La sous-variété ouverte $\pi(B^u \sigma_o B)$ de G/B est donc variété quotient de $B^u \sigma_o B$ par la restriction de π à cette variété, et le corollaire 3 résulte immédiatement du corollaire 2 .

COROLLAIRE 4.- Les variétés B^u , B , G , G/B sont rationnelles.

Cela résulte immédiatement des corollaires précédents et du fait que T , qui est isomorphe à une puissance de la variété composée des points $\neq 0$ de K , est une variété rationnelle.

2.- Les systèmes linéaires de diviseurs.

Rappelons que, si U est une variété sans singularités, on appelle diviseurs sur U les éléments du groupe commutatif libre engendré par les sous-variétés fermées de codimension 1 de U (variétés que nous appellerons les hypersurfaces de U). Si $D = \sum_i e_i V_i$ (les V_i étant des hypersurfaces distinctes et les e_i des entiers $\neq 0$) on appelle support de D , et on note Supp D , l'ensemble $\bigcup_i V_i$. Si tous les e_i sont positifs, on dit que D est un diviseur positif.

Soit V une sous-variété fermée de codimension 1 de U . L'anneau local $\mathcal{O}(V)$ de V est alors l'anneau d'une valuation discrète ω_V du corps F_U des fonctions numériques sur U , uniquement déterminée si on impose que son groupe des valeurs soit $\underline{Z}$. Si f est une fonction numérique $\neq 0$ sur U , il n'y a qu'un nombre fini de sous-variétés fermées V de codimension 1 telles que $\omega_V(f) \neq 0$; la somme $\sum_V \omega_V(f)V$ est un diviseur, qu'on appelle le diviseur de f et qu'on note (f) ; les diviseurs des fonctions $\neq 0$ sont dits principaux. Si f et g sont des fonctions numériques $\neq 0$, on a $(fg) = (f) + (g)$; les diviseurs principaux forment donc un groupe. On dit que deux diviseurs sont linéairement équivalents si leur différence est un diviseur principal. On appelle <u>système linéaire</u> sur U un ensemble Σ de diviseurs qui possède la propriété suivante : les éléments de Σ sont tous positifs ; il existe un diviseur D_o et un sous-espace vectoriel E de dimension finie du corps F_U des fonctions numériques sur U tels que Σ se compose de tous les diviseurs $(f) + D_o$, où f parcourt l'ensemble des éléments $\neq 0$ de E. L'espace E est dit être un <u>espace de définition</u> de Σ ; tout autre espace de définition de Σ est de la forme gE, où g est une fonction numérique fixe. Si on suppose la variété U complète, les éléments de Σ sont en correspondance bi-univoque avec les points de l'espace projectif $\mathfrak{P}(E)$ associé à E ; ceci définit sur Σ une structure d'espace projectif, bien déterminée à un isomorphisme près.

Ceci dit, nous allons étudier les systèmes linéaires de la variété complète sans singularité G/B. Nous désignerons par π l'application canonique de G sur G/B ; nous poserons $x_o = \pi(\sigma_o)$, $\Omega_o = B^u.x_o$; on sait que Ω_o est une sous-variété ouverte de G/B et que $b \to b.x_o$ est un isomorphisme de la variété B^u sur Ω_o ; Ω_o est donc isomorphe à K^n si $n = \dim B^u$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ les racines fondamentales relativement à B ; pour chaque k, soit σ_k une opération du normalisateur de T dont la classe modulo T soit la symétrie w_k par rapport à σ_k ; nous poserons $x_k = \sigma_k.x_o$. On sait que G/B est la réunion de Ω_o, des $B^u x_k$ $(1 \leq k \leq \ell)$ et d'un certain nombre d'ensembles de codimensions > 1 (corollaire 2 au théorème 3, exposé 13) ; chaque $B^u x_k$ est de codimension 1 et contenu dans $\Omega - \Omega_o$; son adhérence, que nous désignerons par Δ_k, est donc une hypersurface contenue dans $\Omega - \Omega_o$, et les Δ_k $(1 \leq k \leq \ell)$ sont les seules hypersurfaces contenues dans $\Omega - \Omega_o$. Le groupe G, qui opère sur G/B, opère de manière évidente sur le groupe des diviseurs de G/B ; il est clair que toute opération de G transforme tout diviseur principal en un diviseur principal. D'une manière plus précise, si on désigne par μ_s le cohomomorphisme de la transformation de G/B définie par s, et si u est une fonction numérique sur G/B, on a $s.(u) = (\mu_{s^{-1}}(u))$.

<u>PROPOSITION 2.- Soit</u> D <u>un diviseur quelconque sur</u> G/B. <u>Il existe alors un système et un seul d'entiers</u> e_k $(1 \leq k \leq \ell)$ <u>tel que</u> D <u>soit linéairement équivalent à</u> $\sum_k e_k \Delta_k$.

Si V est une hypersurface de G/B qui rencontre Ω_o, $V \cap \Omega_o$ est une hypersurface de la variété Ω_o ; il y a un homomorphisme ρ du groupe des diviseurs de G/B sur celui de Ω_o qui applique une hypersurface quelconque V de G/B sur $V \cap \Omega_o$ si $V \cap \Omega_o \neq \emptyset$, sur 0 dans le cas contraire. Il est clair que, pour toute fonction numérique u sur G/B, $\rho((u)) = (\rho(u))$ où $\rho(u)$ est la restriction de u à Ω_o. Par ailleurs, si W est une hypersurface de K^n, c'est l'ensemble des zéros dans K^n d'un polynome irréductible w, et le diviseur W est (w) ; on en conclut que tout diviseur de K^n, et par suite aussi de Ω_o, est principal. Ceci dit, soit D un diviseur de G/B ; $\rho(D)$ peut alors se mettre sous la forme (v), où v est une fonction numérique sur Ω_o, qui est la restriction à Ω_o d'une fonction numérique u sur G/B. Le diviseur $D - (u)$ appartient au noyau de ρ, qui est le groupe engendré par les Δ_k, de sorte que D est linéairement équivalent à une combinaison linéaire des Δ_k. Par ailleurs, si $\sum_{k=1}^{\ell} e_k \Delta_k$ est le diviseur d'une fonction numérique u, le diviseur de $\rho(u)$ est 0 ; or il est clair qu'une fonction numérique sur K^n dont le diviseur est nul est constante ; $\rho(u)$ est donc constante, et il en est de même de u, d'où $e_k = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant \ell)$; la proposition 2 est donc établie.

PROPOSITION 3.- Chacune des hypersurfaces Δ_k est invariante par les opérations de B ; tout diviseur qui est transformé en lui-même par les opérations de B^u est une combinaison linéaire des Δ_k.

Si $s \in B^u$, on a $sB^u x_k = B^u x_k$, d'où $s.\Delta_k = \Delta_k$; si $t \in T$, on a $tB^u x_k = tB^u t^{-1} t x_k = B^u x_k$ puisque $tB^u t^{-1} = B^u$, $tx_k = x_k$, d'où $t.\Delta_k = \Delta_k$; les Δ_k sont donc invariants par les opérations de B. Soit D un diviseur invariant par les opérations de B^u ; Supp D est alors transformé en lui-même par les opérations de B^u ; or Ω_o est une orbite du groupe B^u opérant dans G/B, et n'est évidemment pas contenu dans Supp D ; on a donc Supp $D \subset \Omega - \Omega_o$, ce qui démontre la deuxième assertion.

PROPOSITION 4.- Si $s \in G$ et si D est un diviseur de G/B, sD est linéairement équivalent à D.

C'est vrai si $s \in B$ en vertu des propositions 2 et 3. Si s est un élément quelconque de G, il y a un $g \in G$ tel que $gsg^{-1} \in B$; on a $sD = sg^{-1}gD = g^{-1}(gsg^{-1}).gD$; or $gsg^{-1}.gD$ est linéairement équivalent à gD, donc à $g^{-1}gD = D$.

Soit $(e) = (e_1, \dots, e_\ell)$ une suite de ℓ entiers $e_k \geqslant 0$; nous désignerons par $D_{(e)}$ le diviseur $\sum_{k=1}^{\ell} e_k \Delta_k$. Nous allons montrer que les $sD_{(e)}$, $s \in G$, font partie d'un système linéaire. Pour tout $s \in G$, nous choisirons une fonction numérique u_s sur G/B telle que $(u_s) = sD_{(e)} - D_{(e)}$; on peut supposer que $u_s = 1$ si $s \in B$ (proposition 3). Par ailleurs, nous poserons pour toute fonction numérique u, $u^s = \mu_{s^{-1}}(u)$ ($\mu_{s^{-1}}$ étant le cohomomorphisme de l'automorphisme produit par s^{-1} dans G/B) ; on a donc $s.(u) = (u^s)$. Comme toute fonction numérique de diviseur 0 est une constante, et comme $(u_{s's}) = (u_s^{s'}) + (u_{s'})$, on a $u_{s's} = c(s', s)u_s^{s'}u_{s'}$ si s, $s' \in G$, avec $c(s', s) \in K^*$; il s'en suit que $u_{s''s's} = c(s'', s's)c(s', s)u_s^{s''s'}\, u_{s'}^{s''}\, u_{s''}$, et par suite, si b, $b' \in B$, $\sigma \in G$,

$$u_{b\sigma b'} = c(b, \sigma b')c(\sigma, b')\, u^b \ .$$

Par ailleurs, soit f l'application $b \to bx_o$ de B^u sur Ω_o ; pour tout $s \in G$, la fonction u_s est partout définie sur Ω_o, de sorte que $u_s \circ f$ est une fonction numérique partout définie sur B^u. Si $b \in B^u$, on a $u_s^b \circ f = (u_s \circ f)^b$, où v^b représente la transformée d'une fonction numérique v sur B^u par le cohomomorphisme de la translation à gauche par b^{-1}. On sait que, si v est partout définie, les v^b, pour tous les $b \in B^u$, engendrent un espace vectoriel de dimension finie. On en conclut que, si σ est un élément fixe de G, les $u_{b\sigma b'}$ pour tous les $b \in B^u$, $b' \in B$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie ; comme G est la réunion d'un nombre fini d'ensembles de la forme $B^u \sigma B$, on en conclut que les u_s $(s \in G)$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie. Nous désignerons par $\Sigma_{(e)}$ le plus petit système linéaire contenant tous les diviseurs $sD_{(e)}$, $s \in G$.

REMARQUE.- Il n'est pas difficile d'établir (en utilisant le théorème de complète réductibilité) que, si le corps de base K est de caractéristique 0, $\Sigma_{(e)}$ est l'ensemble de tous les diviseurs positifs linéairement équivalents à $D_{(e)}$. Il n'en est plus en général ainsi dans le cas où K est de caractéristique $\neq 0$.

Si $s \in G$, nous désignerons par $\rho_{(e)}(s)$ la permutation $D \to sD$ de l'ensemble $\Sigma_{(e)}$; il est clair que $\rho_{(e)}$ est un homomorphisme de G dans le groupe des permutations de $\Sigma_{(e)}$. Par ailleurs, $\Sigma_{(e)}$ est muni d'une structure d'espace projectif ; montrons que les $\rho_{(e)}(s)$ sont des automorphismes de cet espace projectif. Soit E l'espace vectoriel engendré par les u_s ; $\Sigma_{(e)}$ est donc l'espace projectif associé à E. Soit $D \in \Sigma_{(e)}$, $D - D_{(e)} = (u)$, où $u \in E$; on a $sD - D_{(e)} = (u^s u_s)$, et notre assertion résulte de ce que l'application $u \to u^s u_s$ est un automorphisme de E. Le groupe $PL(\Sigma_{(e)})$ des automorphismes de $\Sigma_{(e)}$ possède une structure évidente de groupe algébrique ; montrons que $\rho_{(e)}$ est un morphisme de G dans $PL(\Sigma_{(e)})$. Nous allons d'abord montrer que sa restriction à B est un morphisme. Si $s \in B$, on a $u_s = 1$, et il suffira de montrer que l'application qui, à tout $s \in B$ fait correspondre l'automorphisme $u \to u^s$ de E est une représentation rationnelle de B. Or, soit f' l'application $b \to bx_o$ de B sur Ω_o ; pour tout $u \in E$, $u \circ f'$ est une fonction numérique partout définie sur B, et $u \to u \circ f'$ est un isomorphisme de E sur un sous-espace E' de l'espace des fonctions numériques sur B ; ce sous-espace est invariant par les cohomomorphismes des translations à gauche de B ; il est alors bien connu que l'application qui à tout $b \in B$ fait correspondre la restriction à E' du cohomomorphisme de la translation à gauche par b^{-1} est une représentation rationnelle de B. Ceci montre que la restriction de $\rho_{(e)}$ à B est un morphisme. On conclut alors au moyen du lemme suivant :

LEMME 1.- Un homomorphisme h du groupe G dans un groupe algébrique H qui induit un morphisme de B dans H est lui-même rationnel.

L'application $(b, b') \to h(b)h(\sigma_o)h(b')$ est évidemment un morphisme. Il en résulte (corollaire 2) que la restriction de h à la partie ouverte $U = B^u \sigma_o B$ de G est un morphisme. Si s_o est un point quelconque de G, la formule $h(s_o s) = h(s_o)h(s)$ montre que la restriction de h à $s_o U$ est un morphisme ; comme G est la réunion des parties ouvertes $s_o U$, h est un morphisme.

Nous appellerons représentation projective d'un groupe G tout homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes d'un espace projectif Σ sur K ; si $\emptyset$ et Σ sont les seules variétés linéaires de Σ

stables par G et $\Sigma \neq \emptyset$, nous dirons que ρ est <u>simple</u>.

<u>PROPOSITION 5</u>.- <u>Les représentations projectives rationnelles</u> $\rho_{(e)}$ <u>sont simples</u>.

Soit Σ' une sous-variété linéaire $\neq \emptyset$ de $\Sigma_{(e)}$ stable par G . Comme Σ' est une variété complète, il y a au moins un point D de Σ' qui est stable par les opérations de B ; D est alors de la forme $D_{(e')}$ pour un système convenable (e') d'entiers (proposition 3) ; comme $D_{(e')}$ est linéairement équivalent à $D_{(e)}$, il lui est égal (proposition 2), d'où $(e') = (e)$, $D_{(e)} \in \Sigma'$, ce qui entraîne $\Sigma' = \Sigma_{(e)}$ puisque Σ' est stable par G .

<u>REMARQUE</u>.- On notera que le raisonnement que nous venons de faire montre que $\Sigma_{(e)}$ ne contient qu'un point invariant par B .

Si $\mathfrak{P}$ est l'espace projectif associé à un espace vectoriel E , l'espace $\mathfrak{P}^*$ des hyperplans de $\mathfrak{P}$ s'identifie canoniquement à l'espace projectif associé au dual de E ; de plus, $\mathfrak{P}$ s'identifie canoniquement au dual $\mathfrak{P}^*$. Si ρ est une représentation projective de G d'espace $\mathfrak{P}$, on obtient une représentation projective ρ^* de G , d'espace $\mathfrak{P}^*$, en associant à tout $s \in G$ la permutation $H \to sH$ des hyperplans de $\mathfrak{P}$; on dit que ρ^* est la <u>contragrédiente de</u> ρ . Si ρ est rationnelle (resp. simple), il en est de même de ρ^* ; la représentation contragrédiente de ρ^* s'identifie à ρ .

<u>PROPOSITION 6</u>.- <u>Toute représentation projective rationnelle simple de</u> G <u>est équivalente à l'une des représentations</u> $\rho_{(e)}$ <u>construites ci-dessus</u>.

Il suffira d'établir que, si ρ est une représentation projective rationnelle simple de G , d'espace $\mathfrak{P}$, la contragrédiente ρ^* de ρ est équivalente à l'une des représentations $\rho_{(e)}$. Il existe au moins un point y_o de $\mathfrak{P}$ qui est invariant par les opérations de $\rho(B)$, puisque B est résoluble. Nous désignerons par Θ l'orbite de ce point relativement à G . L'application $s \to \rho(s).y_o$ définit par passage aux quotients un morphisme f de G/B sur la variété Θ ; Θ est donc une variété complète sans singularité. La sous-variété linéaire de $\mathfrak{P}$ engendrée par Θ est stable par G , et par suite identique à $\mathfrak{P}$; Θ n'est donc contenu dans aucun hyperplan de $\mathfrak{P}$. Par ailleurs, il y a au moins un point H_o de $\mathfrak{P}^*$ invariant par les opérations de $\rho^*(B)$; H_o est donc un hyperplan transformé en lui-même par les opérations de $\rho(B)$. Il est clair que deux hyperplans quelconques de $\mathfrak{P}$ sont des diviseurs linéairement équivalents et que les fonctions numériques v sur $\mathfrak{P}$ telles que $(v) + H_0$ soit un hyperplan forment un espace vectoriel V de dimension finie. Comme Θ n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathfrak{P}$, toute fonction $v \in V$ induit une fonction numérique $\bar{v}$ sur Θ ; nous poserons $\psi(v) = \varphi(\bar{v})$, où φ est le cohomomorphisme de f ; comme la condition $v \neq 0$ entraîne $\bar{v} \neq 0$, ψ est un isomorphisme de V sur un espace vectoriel E composé de fonctions numériques sur G/B. Il est clair que $f(s.x) = \rho(s).f(x)$ si $s \in G$, $x \in G/B$; l'ensemble fermé $\overset{-1}{f}(H_0 \cap \Theta)$ est donc transformé en lui-même par les opérations de B ; comme cet ensemble n'est pas G/B tout entier, et comme Ω_0 est l'orbite de chacun de ses points relativement à B, on en conclut que $\overset{-1}{f}(\Theta \cap H_0) \subset \Omega - \Omega_0$. Si $v \in V$, la fonction $\bar{v}$ est définie en tout point de Θ n'appartenant pas à H_0, d'où il résulte que $\psi(v)$ est définie en tout point de Ω_0, et par suite que son diviseur est de la forme $D - D'$ où D, D' sont des diviseurs positifs tels que D' soit combinaison linéaire des Δ_k. Comme E est de dimension finie, il résulte immédiatement de là qu'il y a un système (e) et un seul d'entiers $\geqslant 0$ tels que l'ensemble des $\psi(v) + D_{(e)}$ $(v \in V$, $v \neq 0)$ se compose de diviseurs positifs et n'ait pas de composante fixe (i.e. il n'existe aucune hypersurface de G/B qui intervienne avec un coefficient > 0 dans tous les diviseurs de l'ensemble). Pour tout $H \in \mathfrak{P}^*$, désignons par v_H une fonction telle que $(v_H) = H - H_0$, et posons $j(H) = (\psi(v_H)) + D_{(e)}$. Si s est un élément de G, et v une fonction numérique sur $\mathfrak{P}$ (resp. sur Θ, sur G/B) nous désignerons par v^s la transformée de v par le cohomomorphisme de $\rho(s^{-1})$ (resp. de la restriction de $\rho(s^{-1})$ à Θ, de l'automorphisme de G/B défini par s^{-1}). Il est clair que, si v induit sur Θ une fonction $\bar{v}$, v^s induit sur Θ la fonction $\bar{v}^s$; comme $f(s.x) = \rho(s).f(x)$ si $x \in G/B$, $s \in G$, on en déduit que $\psi(v^s) = (\psi(v))^s$ si $v \in V$. Pour simplifier, nous désignerons par sH le transformé d'un hyperplan H de P par $\rho(s)$. Il est clair que l'on a $v_{sH} = c v_H^s v_{sH_0}$, d'où $\psi(v_{sH}) = c(\psi(v_H))^s \psi(v_{sH_0})$, c étant un élément $\neq 0$ de K ; on en déduit qu'il y a un diviseur A_s, ne dépendant pas de H, tel que $j(sH) = sj(H) + A_s$. Comme l'ensemble des $j(H)$ pour tous les $H \in \mathfrak{P}^*$ n'a pas de composante fixe, il en est de même de l'ensemble des $sj(H)$; on en conclut immédiatement que $A_s = 0$,

$j(sH) = sj(H)$. Par ailleurs, $\mathfrak{P}^*$ peut être identifié de manière évidente à l'espace projecrif associé à V ; comme ψ est un isomorphisme de V sur E , j est un isomorphisme de l'espace projectif $\mathfrak{P}^*$ sur le système linéaire $j(\mathfrak{P}^*)$. Ce dernier contient $D_{(e)}$, car $j(H_0) = D_{(e)}$; de plus, il est stable par les opérations de G ; il contient donc $\Sigma_{(e)}$. Comme $j^{-1}(\Sigma_{(e)})$ est une variété linéaire de $\mathfrak{P}^*$ transformée en elle-même par toutes les opérations de $\rho^*(G)$, cette variét é est $\mathfrak{P}^*$ tout entier, et on a $j(\mathfrak{P}^*) = \Sigma_{(e)}$. L'existence de l'isomorphisme j montre que la représentation ρ^* est équivalente à $\rho_{(e)}$.

<u>COROLLAIRE 1.- Si</u> ρ <u>est une représentation projective rationnelle simple de</u> G , <u>il n'y a qu'un seul point de l'espace de</u> ρ <u>qui soit invariant par les opérations de</u> $\rho(B)$.

Cela résulte immédiatement de la proposition 6 et de la remarque qui suit la démonstration de la proposition 5.

<u>COROLLAIRE 2.- Soit</u> ρ <u>une représentation linéaire rationnelle simple de</u> G . <u>L'ensemble des points de l'espace</u> V <u>de</u> ρ <u>qui sont invariants par les opérations de</u> B^u <u>est un sous-espace de dimension 1</u> .

Soit $\mathfrak{P}(V)$ l'espace projectif associé à V ; pour tout $s \in G$, soit $\rho'(s)$ l'automorphisme de $\mathfrak{P}(V)$ défini par l'automorphisme $\rho(s)$ de V ; il est clair que ρ' est une représentation projective rationnelle simple de G . Soit V l'ensemble des points de V invariants par B^u ; cet espace est transformé en lui-même par les opérations de $\rho(T)$; il a donc une base $(x_1 , \ldots , x_m)$ composée de points tels que les espaces Kx_i soient invariants par les opérations de $\rho(T)$; mais les points Kx_i de $\mathfrak{P}(V)$ sont alors invariants par B , d'où $m \leq 1$. Réciproquement, il y a au moins un $x \neq 0$ de V tel que Kx soit invariant par B ; dans ces conditions, on a, pour $s \in B$, $\rho(s).x = a(s)x$, $a(s) \in K$: il est clair que la fonction $a(s)$ est constante et de valeur 1 sur B^u .