C. Chevalley

Existence d'isogénies, II

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 24, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A11_0>

EXISTENCE D'ISOGÉNIES, II

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 27.1.1958)

Nous utiliserons les notations de l'exposé précédent.

Nous allons d'abord montrer qu'il suffit de démontrer le théorème 1 dans le cas où G et G' sont simplement connexes. Il existe en effet des groupes simplement connexes $\overline{G}$ et $\overline{G'}$ et des isogénies g de $\overline{G}$ sur G et g' de $\overline{G'}$ sur G' qui possèdent les propriétés suivantes : si $\overline{T}$, $\overline{T'}$ sont les tores maximaux de $\overline{G}$, $\overline{G'}$ tels que $g(\overline{T}) = T$, $g'(\overline{T'}) = T'$, les exposants radiciels des isomorphismes spéciaux γ de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ et γ' de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T'})$ attachés à g et g' sont tous égaux à 1. Il existe un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T'})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ tel que $\overline{\varphi} \circ \gamma' = \gamma \circ \varphi$. Montrons qu'il est spécial. Toute racine $\overline{\alpha}'$ de $\overline{G'}$ est l'image par γ' d'une racine α' de G' ; on a $\varphi(\alpha') = q\alpha$, où q est une puissance de l'exposant caractéristique de K et α une racine de G ; $\gamma(\alpha)$ est une racine de $\overline{G}$, et on a $\overline{\varphi}(\overline{\alpha}') = q\gamma(\alpha)$; réciproquement, on voit de la même manière que toute racine de $\overline{G}$ est le produit par une puissance de l'exposant caractéristique de K de l'image par $\overline{\varphi}$ d'une racine de $\overline{G'}$. Il reste à montrer que $\overline{\varphi}$ applique $X(\overline{T'})$ dans $X(\overline{T})$. Opérant comme ci-dessus pour les racines, on voit que, si on associe à toute opération $\overline{w}'$ du groupe de Weyl de $\overline{G'}$ l'automorphisme $\overline{w}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(\overline{T})$ défini par la condition $\overline{w} \circ \overline{\varphi} = \overline{\varphi} \circ \overline{w}'$, on obtient un isomorphisme du groupe de Weyl de $\overline{G'}$ sur celui de $\overline{G}$. Puisque $\overline{G'}$ est simplement connexe, $X(\overline{T'})$ est le groupe des poids. Si ϖ' est un poids de $\overline{G'}$, et $\overline{w}'$ une opération du groupe de Weyl, $\overline{w}'(\varpi') - \varpi'$ appartient au groupe $\overline{R}'$ des racines de $\overline{G'}$, dont l'image par $\overline{\varphi}$ est contenue dans le groupe $\overline{R}$ des racines de $\overline{G}$. Il s'ensuit que, pour toute opération $\overline{w}$ du groupe de Weyl de $\overline{G}$, $\overline{w}(\overline{\varphi}(\varpi')) - \overline{\varphi}(\varpi')$ appartient à $\overline{R}$; on en conclut que $\overline{\varphi}(\varpi')$ appartient au groupe des poids de $\overline{G}$, donc à $X(\overline{T})$ puisque $\overline{G}$ est simplement connexe. L'isomorphisme $\overline{\varphi}$ est donc bien spécial. Supposons que $\overline{\varphi}$ soit attaché à une isogénie $\overline{f}$ de $\overline{G}$ sur $\overline{G'}$. Alors $g' \circ \overline{f}$ est une isogénie de $\overline{G}$ sur G' à laquelle est attaché l'isomorphisme spécial $\overline{\varphi} \circ \gamma' = \gamma \circ \varphi$. Appliquant la proposition 5, exposé 18, on en conclut que φ est attaché à une isogénie de G sur G'.

Supposons donc G et G' simplement connexes. Pour toute racine α de G, la restriction de f_T à T_α se prolonge en une isogénie f_α de Z_α sur Z'_α telle que $f_\alpha(s_\alpha) = s'_\alpha$. Soient maintenant α et β des racines de G ; soit A l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires rationnelles de α et β ; supposons α et β linéairement indépendantes. Il existe deux racines γ, δ de A dont les restrictions à $T_{\alpha\beta}$ forment un système fondamental de racines de $Z_{\alpha\beta}$. La restriction de f_T à $T_{\alpha\beta}$ peut se prolonger en une isogénie $f_{\alpha\beta}$ de $Z_{\alpha\beta}$ sur $Z'_{\alpha\beta}$ qui applique s_γ sur s'_γ et s_δ sur s'_δ (exposé 23, proposition 8). On va montrer que $f_{\alpha\beta}$ prolonge f_α et f_β. Désignons par $\mathfrak{N}(T_{\alpha\beta})$ le normalisateur de $T_{\alpha\beta}$ dans $Z_{\alpha\beta}$; il est engendré par $T_{\alpha\beta}$ et par s_γ, s_δ. L'application $f_{\alpha\beta}$ coïncide avec $f_{\mathfrak{N}(T)}$ sur l'ensemble $T_{\alpha\beta} \cup \{s_\gamma, s_\delta\}$ elle coïncide donc avec $f_{\mathfrak{N}(T)}$ sur $\mathfrak{N}(T_{\alpha\beta})$, d'où il résulte qu'elle applique s_α sur s'_α et s_β sur s'_β. Elle induit donc une isogénie de Z_α sur Z'_α qui applique T_α sur T'_α et s_α sur s'_α. Or Z_α et Z'_α sont simplement connexes (proposition 2, exposé 23) ; il résulte alors de la proposition 4, exposé 23 que la restriction de $f_{\alpha\beta}$ à Z_α est identique à f_α ; on voit de même que sa restriction à Z_β est identique à f_β.

Nous allons maintenant définir une application f de G dans G'. Nous utiliserons les notations de la démonstration de la proposition 9, exposé 23 ; pour tout $w \in W$, nous désignerons par $B(w)$ l'ensemble des i $(1 \leq i \leq N)$ tels que $P_i \subset B^u_w$. Soit s un élément de G. Il y a un élément $w \in W$, des éléments $u_i \in P_i$ $(i \in B(w))$, un élément $t \in T$ et des éléments $u'_j \in P_j$ $(1 \leq j \leq N)$ tels que l'on ait

$$s = \prod_{i \in B(w)} u_i . s(w) t \prod_{j=1}^{n} u'_j \quad ;$$

de plus, ces éléments sont tous uniquement déterminés par la donnée de s. Pour tout i, nous désignerons par f_i la restriction de f à P_i ; nous poserons

$$f(s) = \prod_{i \in B(w)} f_i(u_i) . f_{\mathfrak{N}(T)} (s(w)t) \prod_{j=1}^{N} f_j(u'_j) .$$

L'application f ainsi définie prolonge manifestement f_T. Si α est l'une des racines δ_i, Z_α est engendré par P_i et par $s(w(\delta_i))$, où $w(\delta_i)$ est la symétrie par rapport à δ_i. Il en résulte immédiatement que f prolonge f_α ; comme toute racine est ou bien de la forme δ_i ou bien de la forme $-\delta_i$, on voit que la restriction de f à Z_α est un homomorphisme de ce groupe. On voit de même que, si α et β sont des racines quelconques, la restriction de f à $Z_{\alpha\beta}$ est un homomorphisme de ce groupe dans G'. Enfin, comme f prolonge

$f_{\mathfrak{M}(T)}$, sa restriction à $\mathfrak{M}(T)$ est un homomorphisme. Il résulte alors du corollaire à la proposition 9 , exposé 23 que f est un homomorphisme de G dans G' .

Montrons maintenant que f est un morphisme de la variété G . L'application $(t , u_1 , \ldots , u_n) \rightarrow tu_1 \ldots u_n$ est un isomorphisme de la variété $T \times P_1 \times \ldots \times P_n$ sur la variété B ; il en résulte immédiatement que f induit un morphisme de la variété B . Soit w_o une opération du groupe de Weyl qui change l'ensemble des δ_i en l'ensemble des $-\delta_i$; alors $(b^u , b') \rightarrow b^u s(w_o) b'$ est un isomorphisme de la variété $B^u \times B$ sur une sous-variété ouverte U de G ; il en résulte que la restriction de f à U est un morphisme de cette variété. Comme f est un homomorphisme de groupes et induit un morphisme d'une sous-variété ouverte de G dans G' , f est un morphisme de la variété G dans G' .

La composante connexe de l'élément neutre dans le noyau de f admet un tore maximal contenu dans T et est semi-simple ; comme f induit une isogénie de T sur T' , il résulte que le noyau de f est fini. Comme $f(G)$ contient tous les groupes Z'_α , on a $f(G) = G'$. L'application f est donc une isogénie. Comme elle prolonge f_T , l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ attaché à f n'est autre que φ . Le théorème 1 est donc établi.

COROLLAIRE 1. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples ; soient T et T' des tores maximaux de G et G' . Pour que G et G' soient isomorphes, il faut et suffit qu'il existe un isomorphisme φ de $X(T')$ sur $X(T)$ qui induise une bijection de l'ensemble des racines de G' sur celui des racines de G ; l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui prolonge φ est alors attaché à un isomorphisme de G sur G' .

La condition est évidemment nécessaire, car, s'il existe un isomorphisme de G sur G' , il en existe aussi un qui applique T sur T' . Le caractère suffisant de la condition et la dernière assertion se déduisent du théorème 1 et de la proposition 5 , exposé 18 .

COROLLAIRE 2. - Soient G un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal de G et $(\alpha_1 , \ldots , \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T . Soit π une permutation de l'ensemble $\{\alpha_1 , \ldots , \alpha_n\}$ qui définisse un automorphisme du diagramme de Dynkin. Soit φ l'automorphisme de $X(T)$ qui transforme α_i en $\pi(\alpha_i)$. L'automorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ qui prolonge φ est alors attaché à un automorphisme de G .

Cela résulte du corollaire 1 .

COROLLAIRE 3. - Les notations étant celles du corollaire 2 , le quotient du groupe des automorphismes de G par le groupe des automorphismes intérieurs est isomorphe au groupe des automorphismes de $X(T)$ qui permutent entre elles les racines $\alpha_1 , \dots , \alpha_n$.

Cela résulte du corollaire 2 et la proposition 1 , exposé 17 .

COROLLAIRE 4. - Utilisons les notations du corollaire 2 ; supposons de plus ou bien que G soit simplement connexe ou bien que $X(T)$ soit engendré par les racines. Le quotient du groupe des automorphismes de G par le groupe des automorphismes intérieurs est alors isomorphe au groupe des automorphismes d'un diagramme de Dynkin de G .

En effet, toute permutation de $\{\alpha_1 , \dots , \alpha_n\}$ qui définit un automorphisme du diagramme de Dynkin se prolonge en un automorphisme du groupe des racines, qui se prolonge lui-même en un automorphisme du groupe des poids.

On notera que tous les groupes de l'un des types G_2 , F_4 ou E_8 sont isomorphes entre eux ; en effet, dans le cas de ces groupes, le groupe des racines est identique au groupe des poids.

Supposons que le corps K soit de caractéristique 2 . Soit G un groupe de type F_4 ; soient T un tore maximal de G . Utilisons les notations de l'exposé 19 . Les formules

$$\varphi(\omega_1) = \omega_4 - \omega_1 \qquad \varphi(\omega_2) = \omega_2 + \omega_3$$
$$\varphi(\omega_3) = \omega_2 - \omega_3 \qquad \varphi(\omega_4) = \omega_1 + \omega_4 \ .$$

définissent un automorphisme φ de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ qui applique $X(T)$ dans lui-même ; on a

$$\varphi(\alpha_1) = 2\alpha_4 \ , \ \varphi(\alpha_2) = 2\alpha_3 \ , \ \varphi(\alpha_3) = \alpha_2 \ , \ \varphi(\alpha_4) = \alpha_1 \ .$$

Soit Q une forme quadratique définie positive sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ invariante par le groupe de Weyl ; notons $(\lambda | \mu)$ le produit scalaire de deux éléments λ et μ relativement à Q . On a $(\omega_i \mid \omega_j) = 0$ si $i \neq j$, et les $(\omega_i \mid \omega_i)$ sont tous égaux entre eux. Il en résulte aussitôt que l'on a $Q(\varphi(\lambda)) = 2Q(\lambda)$. Si donc w est une opération du groupe de Weyl, $\varphi \circ w \circ \varphi^{-1}$ laisse encore Q

invariants. Si w est la symétrie par rapport à l'une des racines fondamentales, $\varphi \circ w \circ \varphi^{-1}$ est la symétrie par rapport à un hyperplan de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$, et transforme l'une au moins des racines fondamentales en son opposée. Il en résulte aussitôt que $w \to \varphi \circ w \circ \varphi^{-1}$ est un automorphisme du groupe de Weyl, donc que, pour toute racine α, $\varphi(\alpha)$ est de la forme $q\alpha'$, où q est un nombre égal à 1 ou à 2. L'automorphisme φ est donc spécial ; il définit une isogénie du groupe G sur lui-même, qui n'a pas d'analogue en caractéristique 0.

Supposons toujours que K soit de caractéristique 2. Soient G un groupe de type B_n et G' un groupe de type C_n ; soient T et T' des tores maximaux de G et G', $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ des systèmes fondamentaux de racines de G et G' par rapport à T et T' respectivement donnant lieu aux diagrammes de Dynkin indiqués à l'exposé 19. Nous poserons

$$\alpha_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (i < n) \qquad \alpha_n = \omega_n$$
$$\alpha'_i = \omega'_i - \omega'_{i+1} \quad (i < n) \qquad \alpha'_n = 2\omega'_n \; .$$

Les formules $\varphi(\omega'_i) = \omega_i$ $(1 \leq i \leq n)$ définissent un isomorphisme φ de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Il est clair que, si α' est une racine quelconque de G', $\varphi(\alpha')$ est de la forme $q\alpha$, où α est une racine de G et q un entier égal à 1 ou à 2. Le groupe $X(T')$ est contenu dans le groupe engendré par les α'_i ; son image par φ est donc contenue dans $X(T)$. L'isomorphisme φ est donc spécial et est attaché à une isogénie de G sur G'. Considérons maintenant l'isomorphisme $2\varphi^{-1}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$; il applique toute racine de G soit sur racine de G' soit sur le double d'une racine de G'. Si G n'est pas simplement connexe, i.e. s'il est isomorphe à $SO(2n+1)$, $X(T)$ est engendré par les racines et $2\varphi^{-1}$ est spécial ; il définit donc une isogénie de $SO(2n+1)$ sur G'. Si G est simplement connexe, $X(T)$ est engendré par les racines et par l'élément $(1/2)\sum_{i=1}^{n} \omega_i$, dont l'image par $2\varphi^{-1}$ est $\sum_{i=1}^{n} \omega'_i$. Si G' est simplement connexe $\sum_{i=1}^{n} \omega'_i$ appartient toujours à $X(T')$, et $2\varphi^{-1}$ définit une isogénie de G' sur G ; il en est encore ainsi si G' n'est pas simplement connexe dans le cas où n est pair.

Il resterait à compléter les résultats précédents en montrant qu'il existe des groupes semi-simples de tous les types possibles. Dans le mémoire "Sur certains groupes simples" (Tohoku Math. Journ., 1954), j'ai montré que, pour tout type simple $\mathcal{C}$, il existe un groupe algébrique semi-simple de type $\mathcal{C}$; on montre facilement que, pour les groupes ainsi exhibés, le groupe des racines est identique au groupe des poids. Il en résulte que, pour tout type de diagramme de Dynkin, simple ou non, il existe un groupe G_o du type en question tel que, T_o désignant un tore maximal de G_o, $X(T_o)$ soit engendré par les racines. Si M est un sous-groupe du groupe des poids contenant le groupe des racines, M est engendré par des poids dominants ; le raisonnement de la démonstration de la proposition 1, exposé 23 permet alors d'établir qu'il existe un groupe semi-simple G et une isogénie f de G sur G_o qui possède les propriétés suivantes : si T est le tore maximal de G tel que $f(T) = T_o$ et φ l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T_o)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ attaché à f, les exposants radiciels de φ sont $= 1$, et φ applique $X(T)$ sur le groupe donné M.