C. Chevalley

Existence d'isogénies, I

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. nº 23, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A10_0>

EXISTENCE D'ISOGÉNIES, I

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 20.1.1958)

1. Existence de groupes simplement connexes.

PROPOSITION 1. - *Soit G un groupe algébrique semi-simple. Il existe alors une isogénie h d'un groupe algébrique semi-simple simplement connexe G' sur G. De plus, T étant un tore maximal de G et T' le tore maximal de G' tel que $h(T') = T$, on peut supposer que les exposants radiciels de l'isomorphisme η de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ attaché à h sont tous égaux à 1.*

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T ; soit ϖ_i le poids dominant fondamental relatif à α_i et soit ρ_i une représentation projective simple de poids dominant ϖ_i de G. Nous désignerons par G_i le groupe linéaire associé à la représentation ρ_i et par f_i l'application naturelle de G_i sur $\rho_i(G)$. Soit G' la composante algébrique de l'élément neutre dans le groupe des $(s_1, \dots, s_n, s) \in G_1 \times \dots \times G_n \times G$ tels que l'on ait $\rho_i(s) = f_i(s_i)$ $(1 \leq i \leq n)$; les projections de $G_1 \times \dots \times G_n \times G$ sur ses différents facteurs définissent des homomorphismes $h_1, \dots, h_n, h$ de G' dans $G_1, \dots, G_n, G$; on a $f_i \circ h_i = \rho_i \circ h$. Les noyaux des f_i étant finis, il en est de même de celui de h. Pour tout $s \in G$, il existe des $s_i \in G_i$ tels que $f_i(s_i) = \rho_i(s)$, d'où on déduit que $\dim G' \geq \dim G$; h est par suite une isogénie. Soit T' le tore maximal de G' tel que $h(T') = T$, et soit η l'isomorphisme de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T)$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T')$ attaché à h. Posons $\eta(\alpha_i) = q_i \alpha'_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K et et α'_i une racine de G'. Soit τ'_i un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G' associé à la racine α'_i ; si $\eta(\alpha_i) = q_i \alpha'_i$, on a $h(\tau'_i(\xi)) = \tau_i(\xi^{q_i})$, où τ_i est un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à la racine α_i ; nous voulons montrer que $q_i = 1$. Or $\rho_i \circ \tau_i$ est un homomorphisme de K sur un sous-groupe de $\rho_i(G)$ formé d'éléments unipotents. Il en résulte (exp. 18, proposition 3) qu'il existe un homomorphisme $\tilde{\tau}_i$ de K dans G_i tel que $f_i \circ \tilde{\tau}_i = \rho_i \circ \tau_i$. On a donc

$$(f_i \circ \tilde{\tau}_i)(\xi^{q_i}) = \rho_i(\tau_i(\xi^{q_i})) = (\rho_i \circ h)(\tau'_i(\xi)) = f_i((h_i \circ \tau'_i)(\xi)) \quad ;$$

il en résulte immédiatement (le noyau de f_i étant composé d'éléments semi-simples) que $h_i(\tau'_i(\xi)) = \tilde{\tau}_i(\xi^{q_i})$. Or on a

$$\tau'_i(\xi) = (h_1(\tau'_i(\xi)\ , \ \dots \ , \ h_n(\tau'_i(\xi))\ , \ h(\tau'_i(\xi)))\ ;$$

il en résulte immédiatement que $q_i = 1$. Nous avons donc montré que les exposants radiciels de η sont tous égaux à 1 (ce qui montre incidemment que G' est du même type que G) . Il en résulte que les $\varpi'_i = \eta(\varpi_i)$ sont les poids dominants fondamentaux de G' relatifs au système fondamental $(\alpha'_1\ , \dots , \alpha'_n)$. Pour chaque i , $\rho_i \circ h$ est une représentation projective simple de poids dominant ϖ'_i de G' . Comme cette représentation s'écrit $f_i \circ h_i$, on voit que h_i est une représentation linéaire simple de poids dominant ϖ'_i de G' , d'où $\varpi'_i \in X(T')$. Ceci étant vrai pour tout i , G' est simplement connexe.

PROPOSITION 2. - Soient G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe et T un tore maximal de G . Pour toute racine α de G par rapport à T , soit Z_α le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G associé à la racine α . Les groupes Z_α sont alors tous isomorphes à $SL(K^2)$.

Soit $(\alpha_1\ , \dots , \alpha_n)$ un système fondamental de racines. Comme toute racine peut être transformée en l'une des α_i par une opération du groupe de Weyl, il suffit de faire la démonstration dans le cas où α est une racine fondamentale, soit $\alpha = \alpha_i$. Soit ϖ le poids dominant fondamental relatif à la racine α , et soit ρ une représentation linéaire simple de G de poids dominant ϖ (il en existe une puisque G est simplement connexe). La représentation ρ induit une représentation linéaire ρ^* de Z_α ; si T_α est le tore maximal de Z_α contenu dans T , la restriction ϖ^* de ϖ à T_α est un poids de ρ^* . Or, si w est la symétrie par rapport à α , on a $w(\varpi) = \varpi - \alpha$. Soit α^* la restriction de α à T_α , qui est l'une des racines de Z_α , et soit w^* la symétrie par rapport à cette racine, opérant dans $X(T_\alpha)$; on a $w^*(\varpi^*) = \varpi^* - \alpha^*$, mais aussi $w^*(\varpi^*) = -\varpi^*$; il en résulte que $\varpi^* = (1/2)\,\alpha^*$. Puisque $(1/2)\,\alpha^*$ appartient à $X(T_\alpha)$, Z_α est isomorphe à $SL(K^2)$.

2. Isogénies attachées à un même isomorphisme spécial.

PROPOSITION 3. - Soient G et G' des groupes algébriques semi-simples, T et T' des tores maximaux de G et G' , f et f' des isogénies de G sur G' telles que $f(T) = f'(T) = T'$. Si les isomorphismes spéciaux de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associés à f et f' sont identiques, on a $f' = f \circ g$, où g est un automorphisme intérieur de G produit par un élément de T.

Faisant usage de la proposition 6, exp. 18, on voit qu'il y a une isogénie g de G sur lui-même qui applique T sur lui-même, et qui possède les propriétés suivantes : on a $f' = f \circ g$, et l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ sur lui-même attaché à h est l'automorphisme identique ; de plus, g est un automorphisme de G. Il est clair que g coïncide avec l'identité sur T. Il en résulte que h est un automorphisme intérieur produit par un élément de T (cf. la démonstration de la proposition 1, exp. 17).

PROPOSITION 4. - *Les notations étant celles de la proposition 3, soit de plus $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G par rapport à T ; pour chaque i, soient Z_i le sous-groupe presque simple de G associé à α_i, T_i le tore maximal de Z_i contenu dans T et s_i un élément du normalisateur de T_i dans Z_i n'appartenant pas à T_i. Supposons que G et G' soient simplement connexes, que les isomorphismes spéciaux associés à f et f' soient identiques et que $f'(s_i) = f(s_i)$ pour tout i. On a alors $f' = f$.*

Comme $Z_1, \ldots, Z_n$ engendrent G, il suffit de montrer que, pour tout i, les restrictions f_i et f'_i de f et f' à Z_i sont égales. Comme $f' = f \circ h$, où h est un automorphisme intérieur de G produit par un élément de T, d'où $h(Z_i) = Z_i$ pour tout i, on a $f_i(Z_i) = f'_i(Z_i)$. Soit $T'_i = f_i(T_i) = f'_i(T_i)$; comme f_i et f'_i coïncident sur T_i, les isomorphismes spéciaux de $\mathbb{Q} \otimes X(T'_i)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T_i)$ associés à f_i et f'_i sont identiques ; il en résulte que $f'_i = f_i \circ h_i$, où h_i est un automorphisme intérieur de Z_i produit par un élément t_i de T_i. Par ailleurs, f_i est bijective. En effet, s'il n'en était pas ainsi, le centre de Z_i serait d'ordre 2, de sorte que la caractéristique de K serait $\neq 2$, et $Z'_i = f_i(Z_i)$ serait isomorphe à $PL(K^2)$; mais Z'_i est le sous-groupe de dimension 3 de G' associé à une racine de G' par rapport à T' et est par suite isomorphe à $SL(K^2)$ puisque G' est simplement connexe. L'égalité $f_i(s_i) = f'_i(s_i)$ entraîne donc $h_i(s_i) = s_i$. Il nous suffira de montrer que ceci entraîne que h_i est l'identité. Or on a $s_i^{-1}\ t_i\ s_i = t_i^{-1}$, d'où $s_i = t_i\ s_i\ t_i^{-1} = s_i\ t_i^{-2}$ et par suite $t_i^{-2} = e$ (l'élément neutre). Or, T_i est isomorphe au groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K. Si K est de caractéristique 2, la relation $t_i^2 = e$ entraîne $t_i = e$. Sinon, T_i n'a qu'un seul élément d'ordre 2, et cet élément appartient au centre de Z_i, car Z_i, étant isomorphe à $SL(K^2)$, a un centre d'ordre 2. Donc, dans tous les cas, t_i appartient au centre de Z_i, ce qui montre que h_i est l'identité.

PROPOSITION 5. - *Soient* G *un groupe algébrique semi-simple,* T *un tore maximal de* G, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *un système fondamental de racines de* G *par rapport à* T. *Pour chaque* i, *soit* Z_i *le sous-groupe presque simple de dimension 3 de* G *associé à* α_i, T_i *le tore maximal de* Z_i *contenu dans* T *et* s_i, s'_i *des éléments du normalisateur de* T_i *dans* Z_i *n'appartenant pas à* T_i. *Il existe alors un élément* t *de* T *tel que* $ts_i t^{-1} = s'_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

On a $s'_i = t_i s_i$, où t_i est un élément de T_i. Observons maintenant que, pour tout $t \in T$, on a $tZ_i t^{-1} = Z_i$, $tT_i t^{-1} = T_i$; il en résulte que $ts_i t^{-1} s_i^{-1} \in T_i$. Soit f l'application

$$t \longrightarrow (ts_1 t^{-1} s_1^{-1}, \dots, ts_n t^{-1} s_n^{-1})$$

de T dans $T_1 \times \dots \times T_n$. Comme T est commutatif, f est un homomorphisme. Montrons qu'il est de noyau fini. Soit t un élément de ce noyau. L'opération du groupe de Weyl qui correspond à s_i est la symétrie par rapport à α_i ; on a donc $\alpha_i(s_i t' s_i^{-1}) = (\alpha_i(t'))^{-1}$ pour tout $t' \in T$, d'où $\alpha_i(t) = \pm 1$ $(1 \leq i \leq n)$ d'où notre assertion résulte immédiatement. On en conclut que

$$\dim f(T) = \dim T = n = \dim T_1 \times \dots \times T_n ,$$

d'où $f(T) = T_1 \times \dots \times T_n$, ce qui démontre la proposition 5.

3. *Énoncé du théorème. Notations.*

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. - *Soient* G *et* G' *des groupes algébriques semi-simples,* T *et* T' *des tores maximaux de* G *et* G' *et* φ *un isomorphisme spécial de* $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ *sur* $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. *Il existe alors une isogénie* f *de* G *sur* G' *telle que* φ *soit l'isomorphisme spécial attaché à* f.

Nous utiliserons les notations suivantes. Pour chaque racine α de G par rapport à T, nous désignerons par τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G associé à α et par Z_α le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G associé à α ; si α' est la racine de G' telle que $\varphi(\alpha') = q(\alpha)\alpha$, $q(\alpha)$ étant une puissance de l'exposant caractéristique de K, nous désignerons par τ'_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G' associé à α' et par Z'_α le sous-groupe presque simple de dimension 3 de G' associé à α'. Si α et β sont des racines de G, nous désignerons par $Z_{\alpha\beta}$ le sous-groupe radiciel de G

défini par l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de α et β et par $Z'_{\alpha\beta}$ le sous-groupe radiciel de G' défini par l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients rationnels de α', β' ; $Z_{\alpha\beta}$ et $Z'_{\alpha\beta}$ sont donc des groupes semi-simples de rang 1 ou 2. Nous désignerons par T_α (resp. T'_α, $T_{\alpha\beta}$, $T'_{\alpha\beta}$) le tore maximal de Z_α (resp. Z'_α, $Z_{\alpha\beta}$, $Z'_{\alpha\beta}$) contenu dans T (resp. T', T, T'). Nous désignerons par $\mathfrak{N}(T)$ et $\mathfrak{N}(T')$ les normalisateurs de T et T' ; pour toute racine α, nous désignerons par s_α (resp. s'_α) un élément de $\mathfrak{N}(T) \cap Z_\alpha$ (resp. $\mathfrak{N}(T') \cap Z'_\alpha$) non contenu dans T (resp. T'). Nous désignerons par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système fondamental de racines de G ; pour chaque i, nous désignerons par α'_i la racine de G' telle que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$, q_i étant une puissance de l'exposant caractéristique de K ; $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ forment donc un système fondamental de racines de G'. Si $\alpha = \alpha_i$, nous écrirons τ_i, Z_i, T_i, s_i, τ'_i, Z'_i, T'_i, s'_i au lieu de τ_α, Z_α, T_α, s_α, τ'_α, Z'_α, T'_α, s'_α. Si $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \alpha_j$, nous écrirons T_{ij}, Z_{ij}, T'_{ij}, Z'_{ij} au lieu de $T_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$, $T'_{\alpha\beta}$, $Z'_{\alpha\beta}$.

Il est clair qu'il existe un homomorphisme f_T de T sur T' tel que $\chi'(f_T(t)) = (\varphi(\chi'))(t)$ pour tout $t \in T$ et tout caractère rationnel χ' de T' ; si φ est attaché à une isogénie f de G sur G', f prolonge f_T. Si α, β sont des racines, f_T applique $T_{\alpha\beta}$ sur $T'_{\alpha\beta}$.

PROPOSITION 6. - <u>Si φ est attaché à une isogénie f de G sur G', φ est aussi attaché à une isogénie f' de G sur G' telle que l'on ait</u> $f'(s_i) = s'_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

On a évidemment $f(Z_{\alpha\beta}) = Z'_{\alpha\beta}$, $f(\mathfrak{N}(T)) \subset \mathfrak{N}(T')$; $f(s_\alpha)$ est donc un élément de $Z'_\alpha \cap \mathfrak{N}(T')$. Comme on a $s_\alpha t s_\alpha^{-1} = t^{-1}$ pour tout $t \in T_\alpha$, on a $f(s_\alpha)\, t'\, f(s_\alpha^{-1}) = t'^{-1}$ pour tout $t' \in T'_\alpha$. Il résulte de là qu'on a

$$f(s_i) = t'_i\, s'_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

avec des $t'_i \in T'_i$. Il y a un automorphisme intérieur h' de G', produit par un élément de T', qui transforme $f(s_i)$ en s'_i $(1 \leq i \leq n)$ (proposition 5) ; posons $f' = h' \circ f$. L'application f' est encore une isogénie de G sur G' ; comme h' laisse fixes les éléments de T', on a $f'(T) = T'$ et l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ attaché à f' est encore φ, ce qui démontre la proposition 6.

Soient α et β des racines de G ; la restriction de f_T à $T_{\alpha\beta}$ est une isogénie de ce groupe sur $T'_{\alpha\beta}$; elle définit un isomorphisme $\varphi_{\alpha\beta}$ de $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T'_{\alpha\beta})$ sur $\underset{\sim}{Q} \otimes X(T_{\alpha\beta})$ qui applique $X(T'_{\alpha\beta})$ sur un sous-groupe de $X(T_{\alpha\beta})$. Considérant $T_{\alpha\beta}$ et $T'_{\alpha\beta}$ comme des tores maximaux des groupes $Z_{\alpha\beta}$ et $Z'_{\alpha\beta}$, montrons que $\varphi_{\alpha\beta}$ est spécial. Les racines de $Z'_{\alpha\beta}$ sont les restrictions à $T'_{\alpha\beta}$ de celles des racines de G' qui sont combinaisons linéaires rationnelles de α' et β'. Si γ' est l'une de ces racines, on a $\varphi(\gamma') = q(\gamma)\gamma$, où γ est une racine de G qui est combinaison linéaire rationnelle de α et β, et on obtient de cette manière toutes les racines de G qui sont combinaisons linéaires rationnelles de α et β ; de plus, il est clair que $\varphi_{\alpha\beta}$ applique la restriction de γ' à $T'_{\alpha\beta}$ sur le produit par $q(\gamma)$ de la restriction de γ à $T_{\alpha\beta}$; ceci établit bien que $\varphi_{\alpha\beta}$ est spécial. Or $Z_{\alpha\beta}$ est de rang 1 ou 2 ; s'il est de rang 1, il est de type A_1 ; s'il est de rang 2, il est de l'un des types A_2, C_2, G_2 ou $A_1 + A_1$. Faisant usage des théorèmes 1 (exposé 20), 2 (exposé 22), 3 (exposé 22) et 2 (exposé 21), on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 7. - <u>La restriction de</u> f_T <u>à</u> $T_{\alpha\beta}$ <u>peut se prolonger en une isogénie de</u> $Z_{\alpha\beta}$ <u>sur</u> $Z'_{\alpha\beta}$.

Démontrons maintenant la

PROPOSITION 8. - <u>L'application</u> f_T <u>peut se prolonger en un épimorphisme de</u> $\mathfrak{N}(T)$ <u>sur</u> $\mathfrak{N}(T')$ <u>qui applique</u> s_i <u>sur</u> s'_i $(1 \leq i \leq n)$.

Désignons par W le groupe de Weyl de G et par w_i la symétrie par rapport à α_i. Introduisons un groupe libre W^* à n générateurs w_i^* $(1 \leq i \leq n)$; il y a un homomorphisme a^* de W^* dans le groupe des automorphismes de T qui associe à tout w_i^* l'automorphisme $t \to s_i t s_i^{-1}$ de T ; formons le produit semi-direct $\mathfrak{N}^*(T)$ de T et W^* relativement aux opérateurs $a^*(w^*)$; nous considererons T comme un sous-groupe distingué de ce groupe. Il est clair qu'il y a un homomorphisme u^* de $\mathfrak{N}^*(T)$ dans $\mathfrak{N}(T)$ qui coïncide avec l'identité sur T et qui applique w_i^* sur s_i $(1 \leq i \leq n)$. Déterminons le noyau U^* de u^*. Si i et j sont des indices entre 1 et n, soit $m(i, j)$ l'ordre de l'élément $w_i w_j$ de W ; posons $(s_i s_j)^{m(i,j)} = t_{ij} \in T$. Il est clair que U^* contient le plus petit sous-groupe distingué U_o^* de $\mathfrak{N}^*(T)$ qui contienne les éléments

$$z_{ij}^* = t_{ij}^{-1}(w_i^* w_j^*)^{m(i,j)} \quad .$$

Nous allons montrer que l'on a $U_o^* = U^*$. L'homomorphisme u^* définit par passage aux quotients un homomorphisme u_o^* de $\mathfrak{N}^*(T)/U_o^*$ dans $\mathfrak{N}(T)$ dont il suffira de montrer que c'est un monomorphisme. Il est clair que u_o^* induit un isomorphisme de TU_o^*/U_o^* sur T ; il suffira donc de montrer que l'homomorphisme u_1^* de $\mathfrak{N}^*(T)/TU_o^*$ dans $\mathfrak{N}(T)/T$ déduit de u_o^* par passage aux quotients est un monomorphisme. Or $\mathfrak{N}^*(T)/T$ est canoniquement isomorphe à W^* et le groupe qui correspond à TU_o^*/T dans cet isomorphisme est le plus petit sous-groupe distingué de W^* contenant les $(w_i^* w_j^*)^{m(i,j)}$. On sait que ce groupe n'est autre que le noyau de l'homomorphisme de W^* sur W qui applique w_i^* sur w_i $(1 \leq i \leq n)$ (exposé 14 , théorème 1). On en conclut que l'ordre de $\mathfrak{N}^*(T)/TU_o^*$ est égal à celui de W , donc à celui de $\mathfrak{N}(T)/T$. Par ailleurs, $u_1^*(\mathfrak{N}^*(T)/TU_o^*)$ contient les classes des s_i modulo T et est par suite $\mathfrak{N}(T)/T$ tout entier, ce qui montre bien que u_1^* est un monomorphisme, et même que u_o^* est un isomorphisme de $\mathfrak{N}^*(T)/U_o^*$ sur $\mathfrak{N}(T)/T$.

Ceci étant, montrons que f_T se prolonge en un homomorphisme f^* de $\mathfrak{N}^*(T)$ dans $\mathfrak{N}(T')$ qui applique w_i^* sur s_i' $(1 \leq i \leq n)$. Il suffit pour cela de montrer que l'on a $s_i' f_T(t) s_i'^{-1} = f_T(s_i t s_i^{-1})$ si $t \in T$. Or, désignons par χ' un caractère rationnel quelconque de T' et par w_i' la symétrie par rapport à α_i' ; on a

$$\chi'(s_i' f_T(t) s_i'^{-1}) = (w_i'(\chi'))(f_T(t)) = (\varphi(w_i'(\chi')))(t) \quad ;$$

mais on sait que l'on a $\varphi \circ w_i' = w_i \circ \varphi$ (exposé 18 , proposition 4) ; la formule à démontrer résulte immédiatement de là.

Montrons maintenant que U^* est contenu dans le noyau de f^* . Il suffit de montrer que, si i et j sont des indices entre 1 et n , z_{ij}^* appartient au noyau de f^* . Or la restriction de f_T à T_{ij} peut se prolonger en une isogénie f_{ij} de Z_{ij} sur Z_{ij}' (proposition 7), et on peut même supposer en vertu de la proposition 6 que $f_{ij}(s_i) = s_i'$, $f_{ij}(s_j) = s_j'$. Il en résulte que l'on a

$$f_T(t_{ij}) = (s_i' s_j')^{m(i,j)} \quad ,$$

d'où il résulte immédiatement que l'on a $f^*(z_{ij}^*) = 1$. Il résulte de là que f^* définit par passage aux quotients un homomorphisme $f_{\mathfrak{N}(T)}$ de $\mathfrak{N}(T)$ dans $\mathfrak{N}(T')$ qui prolonge f_T et applique s_i sur s_i' $(1 \leq i \leq n)$. Cet homomorphisme est un épimorphisme car $\mathfrak{N}(T')$ est engendré par T' et par les s_i' .

Nous désignerons dans ce qui suit par $f_{\mathfrak{N}(T)}$ l'homomorphisme (évidemment unique) de $\mathfrak{N}(T)$ sur $\mathfrak{N}(T')$ qui prolonge f_T et applique s_i sur s'_i $(1 \leq i \leq n)$ Soient s un élément quelconque de $\mathfrak{N}(T)$ et w l'opération correspondante du groupe de Weyl ; posons $f_{\mathfrak{N}(T)}(s) = s'$ et soit w' l'opération du groupe de Weyl de G' définie par s' ; w et w' sont alors liés par la relation $\varphi \circ w' = w \circ \varphi$. Soit en effet χ' un caractère rationnel de T'. On a, pour $t \in T$, $\chi'(f_{\mathfrak{N}(T)}(s^{-1}ts)) = (\varphi(\chi'))(s^{-1}ts) = ((w \circ \varphi)(\chi'))(t)$; mais le premier membre est aussi égal à $\chi'(s'^{-1} f_T(t)s')$, donc à

$$(w'(\chi'))(f_T(t)) = ((\varphi \circ w')(\chi'))(t) \quad ,$$

ce qui démontre notre assertion.

Montrons que l'on a $f(s_\alpha) \in Z'_\alpha$ pour toute racine α. Il y a une racine fondamental α_i et une opération w du groupe de Weyl telles que $\alpha = w.\alpha_i$; soit s un élément de $\mathfrak{N}(T)$ qui produise l'opération w. Il est clair que l'on a alors $sZ_i s^{-1} = Z_\alpha$, de sorte que l'on peut écrire $s_\alpha = s\bar{s}_i s^{-1}$, où $\bar{s}_i$ est un élément de Z_i qui ne diffère de s_i que par un élément de T_i. Il en résulte que l'on a $f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha) = s' f_{\mathfrak{N}(T)}(\bar{s}_i)s'^{-1}$, en posant $s' = f_{\mathfrak{N}(T)}(s)$. Si w' est l'opération du groupe de Weyl de G' qui correspond à s', il résulte de la relation $f_{\mathfrak{N}(T)}(\bar{s}_i) \in T'_i s'_i \subset Z'_i$ que $f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha)$ appartient au groupe $Z'_{\beta'}$ avec $\beta' = w'(\alpha'_i)$. Or on a

$$\varphi(\beta') = w(\varphi(\alpha'_i)) = q(\alpha_i)\, w(\alpha_i) = q(\alpha_i)\alpha \quad ,$$

ce qui montre bien que β' n'est autre que la racine α' de G' qui correspond à α. Nous pouvons donc supposer les s'_α choisis de telle manière que l'on ait

$$f_{\mathfrak{N}(T)}(s_\alpha) = s'_\alpha$$

pour tout α ; c'est ce que nous ferons désormais.

PROPOSITION 9. - *Soient* G^* *un groupe abstrait et* h *un homomorphisme de* G^* *dans* G ; *supposons les conditions suivantes satisfaites* :

1° G^* *contient un sous-groupe* $\mathfrak{N}^*(T)$ *tel que* h *induise une bijection de ce groupe sur* $\mathfrak{N}(T)$; *si* α *est une racine de* G, *on désigne par* s^*_α *l'élément de* $\mathfrak{N}^*(T)$ *tel que* $h(s^*_\alpha) = s_\alpha$; *on désigne par* T^*_α *le sous-groupe de* $\mathfrak{N}^*(T)$ *tel que* $h(T^*_\alpha) = T_\alpha$; *si* α, β *sont des racines, on désigne par* $T^*_{\alpha\beta}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{N}^*(T)$ *tel que* $h(T^*_{\alpha\beta}) = T_{\alpha\beta}$;

2° pour chaque racine α, G^* contient un sous-groupe Z^*_α tel que h induise une bijection de Z^*_α sur Z_α et que $T^*_\alpha \subset Z^*_\alpha$, $s^*_\alpha \in Z^*_\alpha$;

3° si α et β sont des racines de G, G^* contient un sous-groupe $Z^*_{\alpha\beta}$ tel que h induise une bijection de $Z^*_{\alpha\beta}$ sur $Z_{\alpha\beta}$ et que l'on ait $Z^*_\gamma \subset Z^*_{\alpha\beta}$ pour toute combinaison linéaire rationnelle γ de α et β qui est une racine ;

4° G^* est engendré par les Z^*_α pour toutes les racines α. L'homomorphisme h est alors un isomorphisme.

Nous choisirons un groupe de Borel B de G contenant T. Rappelons que, si $\Gamma(T)$ est le groupe des groupes à un paramètre de T, l'espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes \Gamma(T)$ est en dualité avec $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Nous choisirons un élément λ de la chambre de Weyl C qui correspond à B tel que les valeurs prises en λ par deux racines distinctes soient toujours distinctes. Nous désignerons par $\delta_1, \dots, \delta_N$ les racines qui sont négatives sur C arrangées dans un ordre tel que l'on ait $\delta_1(\lambda) < \delta_2(\lambda) < \dots < \delta_N(\lambda)$; les $\delta_i(\lambda)$ étant < 0, on voit que, si δ_k est combinaison linéaire à coefficients entiers > 0 de δ_i et δ_j, on a $k < \min(i, j)$. Soit B^u le groupe des éléments unipotents de B ; si $1 \leq i \leq N$, $B^u \cap Z_{\delta_i}$ est un groupe P_i isomorphe à K ; nous désignerons par P^*_i le sous-groupe de $Z^*_{\delta_i}$ tel que $h(P^*_i) = P_i$. Si $1 \leq k \leq N$, nous désignerons par B^u_k l'ensemble $P_1 \dots P_k$ (i.e. l'ensemble des $u_1 \dots u_k$, $u_i \in P_i$) et par B^{*u}_k l'ensemble $P^*_1 \dots P^*_k$. Il résulte du corollaire au lemme 1, exposé 17, que les B_k sont des sous-groupes de B. Montrons que ce sont des sous-groupes distingués de B. Comme chaque P_i est transformé en lui-même par les automorphismes intérieurs produits par les éléments de T, il suffira de montrer que, si $u \in P_i$, i étant un indice quelconque entre 1 et N, on a

$$uB^u_k u^{-1} = B^u_k \quad ;$$

or il résulte encore du corollaire au lemme 1, exposé 17 que $B^u_k P_i$ est un sous-groupe de B^u, puis du lemme 1, b., exposé 13, que B^u_k est un sous-groupe distingué de $B^u_k P_i$. Montrons maintenant que B^{*u}_k est un sous-groupe distingué du groupe B^{*u} engendré par les P^*_i. Nous procédons par récurrence sur k ; désignant par B^{*u}_0 le groupe réduit à son élément neutre, supposons que $k > 0$ et que notre assertion soit vraie pour $k - 1$. Il résulte immédiatement de l'hypothèse inductive que B^{*u}_k est un groupe ; pour montrer qu'il est distingué, il suffira de montrer que, si $i > k$, $u^* \in P^*_i$, on a

$$u^* P^*_k u^{*-1} \subset B^{*u}_k \quad .$$

Nous utiliserons pour cela le groupe $Z^*_{\delta_i \delta_k}$. Posons $u = h(u^*)$; soit v^* un élément de P^*_k et soit $v = h(v^*)$. L'élément uvu^{-1} est dans le groupe engendré par les P_j pour les $j \geqslant k$ tels que δ_j soit combinaison linéaire à coefficients entier $\geqslant 0$ de δ_i et δ_k , le coefficient de δ_k étant $\neq 0$. Les groupes P^*_j correspondants sont dans $Z^*_{\delta_i \delta_k}$; comme h induit un isomorphisme de $Z^*_{\delta_i \delta_k}$ sur $Z_{\delta_i \delta_k}$, $u^* v^* u^{*-1}$ est dans le groupe engendré par les P^*_j pour les j possédant les propriétés indiquées, donc est dans B^{*u}_k , ce qui montre que B^{*u}_k est distingué. On conclut de là que $B^{*u} = B^{*u}_N$. Comme un élément de B^u ne se met que d'une seule manière sous la forme $u_1 \dots u_N$, avec $u_i \in P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$, on voit que h induit un isomorphisme de B^{*u} sur B^* .

Nous désignerons par T^* le sous-groupe de $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que $h(T^*) = T$. Ce groupe est engendré par les T^*_α pour toutes les racines $\alpha = \delta_i$. Si $\alpha = \delta_i$ et si β est une racine quelconque, l'existence de l'isomorphisme induit par h de $Z^*_{\alpha\beta}$ sur $Z_{\alpha\beta}$ montre que le normalisateur de P^*_i contient T^*_β ; ceci étant vrai pour toute racine β , on voit que le normalisateur de P^*_i contient T^* . Ceci étant vrai pour tout i , le normalisateur de B^{*u} contient T^* . On en conclut que $B^* = B^{*u} T^*$ est un sous-groupe de G^* ; comme B est produit semi-direct de B^u et T , h induit un isomorphisme de B^* sur B .

Pour chaque opération w du groupe de Weyl W de G , nous choisirons un élément s(w) de $\mathfrak{N}(T)$ dont la classe modulo T soit w (en identifiant W à $\mathfrak{N}(T)/T$) ; nous désignerons par $s^*(w)$ l'élément de $\mathfrak{N}^*(T)$ tel que $h(s^*(w)) = s(w)$; on peut supposer que $s(w) = s_\alpha$, $s^*(w) = s^*_\alpha$ si w est la symétrie w_α par rapport à une racine α . Nous supposerons de plus que B est le groupe de Borel qui correspond au système fondamental $(\alpha_1 , \dots , \alpha_n)$. Pour toute racine α , nous désignerons par P_α le sous-groupe unipotent de G associé à la racine α ; on a donc $P_\alpha = P_i$ si $\alpha = \delta_i$, $P_\alpha \subset Z_\alpha = Z_{-\alpha}$; nous désignerons par P^*_α le sous-groupe de Z^*_α tel que $h(P^*_\alpha) = P_\alpha$. Montrons que l'on a $s^*(w) P^*_\alpha (s^*(w))^{-1} = P^*_{w(\alpha)}$. Il suffit évidemment de le montrer quand w est la symétrie par rapport à une racine β (car, pour toute racine α , le normalisateur de P^*_α contient T^*). Or, dans ce cas, $s^*(w)$ et P^*_α sont dans $Z^*_{\alpha\beta}$ et l'assertion résulte de ce que h induit un isomorphisme de $Z^*_{\alpha\beta}$ sur $Z_{\alpha\beta}$.

Si $w \in W$, nous désignerons par B^u_w (resp. B'^u_w) le groupe engendré par les P_i pour lesquels $w^{-1}(\delta_i)$ est la forme $-\delta_j$ (resp. δ_j) ; on sait que

$B^u = B^u_w B'^u_w$ (exposé 13). Nous désignerons par B^{*u}_w et B'^{*u}_w les sous-groupes de B^{*u} qui sont appliqués sur B^u_w et B'^u_w par h ; on a donc $B^{*u} = B^{*u}_w B'^{*u}_w$. Si $w^{-1}(\delta_i) = \delta_j$, on a $P^*_i s^*(w) = s^*(w) P^*_j$; il en résulte que l'on a

$$B^* s^*(w) B^* = B^{*u}_w s^*(w) B^* .$$

Si α est une racine fondamentale, le groupe B'^{*u}_w est engendré par les P^*_i pour tous les i tels que $\delta_i \neq \alpha$; nous le désignerons par D^*_α. Si $w(\alpha)$ est la symétrie par rapport à α, $w(\alpha)$ permute entre elles les racines δ_i qui sont $\neq \alpha$; il en résulte que s^*_α appartient au normalisateur de D^*_α. Soit $i(\alpha)$ l'indice tel que $\alpha = \delta_{i(\alpha)}$; le groupe $h(D^*_\alpha)$ est un sous-groupe distingué de B, d'où il résulte que D^*_α est un sous-groupe distingué de B^*. Le normalisateur de D^*_α contient donc $P^*_{i(\alpha)}$ et T^*_α ; contenant aussi S^*_α, il contient les groupes $P^*_{i(\alpha)}$, T^* et le transformé de $P^*_{i(\alpha)}$ par s^*_α, groupes qui engendrent le groupe Z^*_α (en vertu du fait que h induit un isomorphisme de Z^*_α sur Z_α). Désignons par G^*_o la réunion des ensembles $B^* s^*(w) B^* = B^{*u}_w s^*(w) B^*$ pour tous les $w \in W$. Nous allons montrer que l'on a $Z^*_\alpha G^*_o \subset G^*_o$ pour toute racine fondamentale α. Il suffit de montrer que l'on a $Z^*_\alpha B^* s^*(w) B^* \subset G^*_o$. Comme $B^* = D^* P^*_{i(\alpha)} T^*$, et comme Z^*_α est contenu dans le normalisateur de D^*_α et contient $P^*_{i(\alpha)}$, il suffit de montrer que l'on a $Z^*_\alpha T^* s^*(w) B^* \subset G^*_o$, ou encore que $Z^*_\alpha s^*(w) \subset G^*_o$ puisque le normalisateur de Z^*_α contient T^*. On a $Z^*_\alpha = Z^*_\alpha s^*_\alpha$ et $s^*_\alpha s^*(w) = \theta^* s^*(w(\alpha)w)$, où θ^* est un élément de T^*_α ; on en conclut que l'on peut se ramener au cas où $w^{-1}(\alpha)$ est l'une des δ_i, c'est-à-dire où $P^*_{i(\alpha)} s^*(w) \subset s^*(w) B^*$; supposons donc qu'il en soit ainsi. Le groupe Z_α est la réunion des ensembles $P_{i(\alpha)} T_\alpha$ et $P_{i(\alpha)} s_\alpha T_\alpha P_{i(\alpha)}$ (corollaire 1 au théorème 3, exposé 13) ; Z^*_α est donc la réunion de $P^*_{i(\alpha)} T^*_\alpha$ et de $P^*_{i(\alpha)} s^*_\alpha T^*_\alpha P^*_{i(\alpha)}$. Comme $P^*_{i(\alpha)} s^*(w) \subset s^*(w) B^*$, $T^* s^*(w) = s^*(w) T^*$, il en résulte bien que $Z^*_\alpha s^*(w) \subset G^*_o$.

L'ensemble G^*_o contient donc les Z^*_α pour toutes les racines fondamentales α ; de plus, si w est une opération quelconque du groupe de Weyl, on a

$$(s^*(w) \quad Z^*_\alpha (s^*(w))^{-1}) \; G^*_o \subsetneq G^*_o .$$

Mais on a

$$s^*(w) \; Z^*_\alpha (s^*(w))^{-1} = Z^*_{w(\alpha)} .$$

Comme toute racine peut être transformée en une racine fondamentale par opération du groupe de Weyl, on voit que $Z^*_\alpha G^*_o \subset G^*_o$ pour toute racine α . Comme G^* est engendré par les Z^*_α , on a $G^*_o = G^*$.

Par ailleurs, on sait que les ensembles $h(B^{*u}_w s^*(w)B^*) = B^u_w s(w)B$ sont mutuellement disjoints et qu'un élément de $B^u_w s(w)B$ ne se met que d'une seule manière sous la forme $bs(w)b'$, avec $b \in B^u_w$, $b' \in B$. Il en résulte immédiatement que h est une bijection de $G^* = G^*_o$ sur G , ce qui démontre la proposition 9 .

COROLLAIRE. - *Soit* f *une application de* G *dans un groupe* H . *Supposons les conditions suivantes satisfaites* : f *induit un homomorphisme de* $\mathfrak{N}(T)$ *dans* H ; *pour tout couple* (α, β) *de racines de* G , f *induit un homomorphisme de* $Z_{\alpha\beta}$ *dans* H . *Alors* f *est un homomorphisme de* G *dans* H .

Pour tout $s \in G$, soit $f^*(s)$ l'élément $(s , f(s))$ de $G \times H$; soit G^* le sous-groupe de $G \times H$ engendré par les ensembles $f^*(Z_\alpha) = Z^*_\alpha$ pour toutes les racines α ; la projection de $G \times H$ sur G induit un homomorphisme h de G^* dans G . Pour montrer que f est un homomorphisme, il suffit évidemment de montrer que h est un isomorphisme de G^* sur G . Or cela résulte immédiatement de la proposition 9 .