

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Le normalisateur d'un groupe de Borel

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 9, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A9_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE NORMALISATEUR D'UN GROUPE DE BOREL.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 4.2.1957)

1.- Un lemme de dévissage.

LEMME 1.- Tout automorphisme du groupe additif K (considéré comme groupe algébrique) est de la forme $x \rightarrow cx$, c étant un élément $\neq 0$ de K .

Soit σ un automorphisme. Si θ est l'application identique $K \rightarrow K$, $\theta \circ \sigma$ est une fonction numérique partout définie qui n'a qu'un seul zéro, à savoir 0, qui est d'ordre 1; une telle fonction est de la forme $c\theta$.

LEMME 2.- Soit G un groupe algébrique résoluble; soient G_u l'ensemble des éléments unipotents de G et T un tore maximal de G . Soient A et B des sous-groupes fermés connexes de G_u dont les normalisateurs contiennent T tels que $A \subset B$. Il existe une suite $(H_i)_{0 \leq i \leq m}$ de sous-groupes fermés connexes de G_u qui possède les propriétés suivantes: $U_0 = \{e\}$; pour $1 \leq i \leq m$, le normalisateur de H_{i-1} contient H_i et T ; il existe un homomorphisme rationnel θ_i de H_i sur le groupe additif K de noyau H_{i-1} qui définit par passage aux quotients un isomorphisme de H_i/H_{i-1} sur K ; on a, pour $s \in H_i$, $t \in T$, $\theta_i(tst^{-1}) = \chi_i(t) \theta_i(s)$, χ_i étant un caractère rationnel de T ; H_i est engendré par H_{i-1} et par des éléments du centralisateur de la composante connexe du noyau de χ_i dans T ; on a $H_m = G_u$; A et B figurent parmi les H_i . Si A et B sont distingués dans G , on peut supposer qu'il en est de même de tous les H_i .

Etablissons d'abord que si C est un sous-groupe distingué connexe de G contenu dans G_u et $\neq \{e\}$ (e étant l'élément neutre), C contient un sous-groupe connexe de dimension 1 distingué dans G . On a déjà vu (exp. 6, corollaire 1 au théorème 1) qu'il y a une suite (G_0, \dots, G_s) de sous-groupes distingués connexes de G telle que $G_0 = \{e\}$, $G_{i-1} \subset G_i$ et

$\dim G_i/G_{i-1} = 1$ si $1 \leq i \leq s$, $G_s = G_u$. Si $G_1 \subset C$, notre assertion est vraie. Sinon, on procède par récurrence sur $\dim C$. Soit k le plus petit indice tel que $C \subset G_k$; $G_{k-1} \subset C$ est connexe, contient G_{k-1} sans lui être

égal et est contenu dans G_k , d'où $G_{k-1}C = G_k$. Soit $C' = C \cap G_{k-1}$; l'application canonique $G_k \rightarrow G_k/G_{k-1}$ induit un épimorphisme de C sur G_k/G_{k-1} de noyau C' ; si C' est fini, C est de dimension 1; sinon, la composante connexe C'_0 de e dans C' est de dimension $< \dim C$, mais > 0 , et il suffit de lui appliquer l'hypothèse inductive. Ceci étant, soit H un sous-groupe fermé connexe $\neq G_u$ de G_u dont le normalisateur dans G contient T et sur lequel nous faisons l'hypothèse suivante: ou bien a) $H \subset A$ et $H \neq A$, ou bien b) $A \subset H \subset B$ et $H \neq B$; ou bien c) $B \subset H$. Soit N un groupe qui est la composante connexe de e dans le normalisateur de H dans A dans le cas a), dans B dans le cas b), dans G_u dans le cas c). On a $N \neq H$ en vertu du lemme 1; exposé 7. Le normalisateur de N contient T ; NT est un groupe algébrique résoluble contenant H et N comme sous-groupes distingués. Appliquant le résultat établi ci-dessus à NT/H , on voit qu'il y a un sous-groupe fermé connexe distingué H' de NT contenu dans N , contenant H et tel que H'/H soit de dimension 1. On a $H' \subset A$ dans le cas a), $H' \subset B$ dans le cas b). Comme H'/H est de dimension 1 et est un composé d'éléments unipotents, il est isomorphe à K (exposé 7, théorème 4). Il y a donc un homomorphisme rationnel θ de H' sur K de noyau H qui définit par passage aux quotients un isomorphisme de H'/H sur K ; tout autre homomorphisme θ' ayant les mêmes propriétés est de la forme $s \rightarrow c\theta(s)$ en vertu du lemme 1. Si $t \in T$, $s \rightarrow tst^{-1}$ est un automorphisme de H' qui conserve H ; $\theta(tst^{-1})$ est donc de la forme $\chi(t)\theta(s)$, $\chi(t) \in K^*$ (le groupe des éléments $\neq 0$ de K). Prenant s tel que $\theta(s) = 1$, on voit que χ est un morphisme de T dans K^* ; c'est évidemment un caractère. Soit Q la composante connexe du noyau du caractère χ de T , et soit C son centralisateur dans le groupe $H'Q$; comme Q est un tore maximal de $H'Q$, C est un groupe de Cartan de $H'Q$. Soit π l'homomorphisme canonique de $H'Q$ sur $H'Q/H$; $\pi(C)$ est donc un groupe de Cartan de $H'Q/H$ (exposé 7, théorème 3). Or il est clair que $H'Q/H$ est un groupe commutatif, et en particulier nilpotent, d'où $\pi(C) = H'Q/H$, ce qui montre que H' est engendré par H et par des éléments de C . Supposons maintenant de plus que H soit un sous-groupe distingué de G , et qu'il en soit de même de A et B . Le groupe N est alors distingué dans G , et N/H est un sous-groupe distingué de G/H . On peut alors prendre pour H' un sous-groupe distingué de G . Les considérations précédentes permettent de construire inductivement une suite (H_i) ayant les propriétés énoncées.

2.- Un lemme de géométrie algébrique.

LEMME 3.- Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe fermé de G , f l'application canonique $G \rightarrow G/H$, s un point de G , V une sous-variété fermée de G/H ; il y a alors une sous-variété U de G passant par s telle que $f(U)$ soit dense dans V ; si H est connexe, $f^{-1}(V)$ est une sous-variété de G .

L'ensemble $f^{-1}(V)$ est fermé; soit X une composante irréductible de cet ensemble. Soit $n = \dim G$, $h = \dim H$, $d = \dim V$; on a alors $\dim X \geq d + h$ (séminaire 1955/56, exposé 8, théorème 2); par ailleurs, pour tout $y \in V$, toute composante de $f^{-1}(y)$ est de dimension h ; faisant à nouveau usage du résultat qu'on vient de citer, on voit que $\dim X \leq \dim f(X) + h$; il en résulte que $\dim f(X) = \dim V$, donc que $f(X)$ est dense dans V . Prenant pour U une composante de $f^{-1}(V)$ passant par s , on obtient le premier résultat. Supposons maintenant H connexe. Comme $f(X)$ est épais, il contient une partie relativement ouverte V_0 non vide de V . Soit $y \in V_0$; toute composante irréductible de $X \cap f^{-1}(y)$ est de dimension $\geq h$ et $f^{-1}(y)$ est de dimension h et connexe; on a donc $f^{-1}(V_0) \subset X$; comme $f^{-1}(V_0)$ est relativement ouvert dans $f^{-1}(V)$, on a $X = X' = f^{-1}(V)$.

3.- Le normalisateur d'un groupe de Borel.

THÉORÈME 1.- Soit B un groupe de Borel d'un groupe algébrique affine G ; B est alors son propre normalisateur dans G .

Le normalisateur N de B est un sous-groupe fermé de G dont on sait déjà qu'il contient B comme sous-groupe d'indice fini (cf. exposé 6, lemme 5 et théorème 5). Si $s \in N$, les composantes semi-simple et unipotente de s sont dans N ; il suffira donc de montrer que, si $s \in N$ et si s est soit semi-simple soit unipotent, on a $s \in B$. Le point s appartient à un groupe de Borel B' de G (exposé 6, théorème 5); soit B'_u le groupe des éléments unipotents de B' , et soit $(H_i)_0 \leq i \leq m$ une suite de sous-groupes fermés distingués connexes de B' telle que $H_0 = \{e\}$, que $H_{i-1} \subset H_i$ et $\dim H_i/H_{i-1} = 1$ si $1 \leq i \leq m$, et que $H_m = B'_u$ (lemme 2). Soit T' un tore maximal de B' qui contient s dans le cas où s est semi-simple. Si s est unipotent, nous supposons que $H_{i-1} \subset B$. Soit f l'application canonique $G \rightarrow G/B$, et soit $x_0 = f(e)$; le groupe G opère sur G/B ; si

s est unipotent, soit V l'adhérence de $H_i x_0$; si s est semi-simple, soit V l'adhérence de $T' x_0$; V est donc une variété complète stable par les opérations de H_i si s est unipotent, par celles de T' si s est semi-simple. Il y a donc un point $x_1 \in V$ qui est invariant par les opérations de H_i dans le premier cas, par celles de T' dans le second. Le groupe de stabilité de x_1 dans G est un groupe de Borel B_1 qui contient H_i dans le premier cas, T' dans le second. Nous allons montrer que s appartient au normalisateur de B_1 et que la condition $s \in B_1$ entraîne $s \in B$. Posons $Z = H_i$ si s est nilpotent, $Z = T'$ si s est semi-simple. Dans le cas où s est nilpotent, on a $szs^{-1} \equiv z \pmod{H_{i-1}}$ pour tout $z \in Z$. En effet, comme H_i/H_{i-1} est commutatif, l'ensemble formé des $szs^{-1}z^{-1}h'$, avec $z \in Z$, $h' \in H_{i-1}$ est un sous-groupe de H_i ; ce groupe, image de $Z \times H'$ par un morphisme, est épais et irréductible, donc fermé; il ne peut être identique à H_i , car, B_u^i/H_{i-1} étant nilpotent, il est impossible que tout élément de H_i/H_{i-1} soit commutateur d'un élément de H_i/H_{i-1} et d'un élément de G/H_{i-1} ; il est donc identique à H_{i-1} , ce qui démontre notre assertion. Si s est semi-simple, s commute avec tous les éléments de Z . Comme $H_{i-1} \subset B$ si s est nilpotent, on voit que, dans tous les cas, $szs^{-1} \equiv z \pmod{B}$ pour tout $z \in Z$. Ceci donne $z^{-1}sz \in Bs \subset N$. Si $z' \in f^{-1}(f(z))$, on a $z' = zb$, avec un $b \in B$, d'où il résulte immédiatement que $z'^{-1}sz' \in N$. Or V n'est autre que l'adhérence de $f(Z)$; par ailleurs, $U = f^{-1}(V)$ est une sous-variété de G (lemme 3). L'ensemble $f^{-1}(f(Z))$ est dense dans U ; en effet, si U_0 est une partie relativement ouverte non vide de U , $f(U_0)$ contient une partie relativement ouverte non vide de V , d'où $f(U_0) \cap f(Z) \neq \emptyset$. Tenant compte de la continuité de l'application $z' \rightarrow z'^{-1}sz'$ et du fait que N est fermé, on voit que $u^{-1}su \in N$ pour tout $u \in U$. Or $f^{-1}(V)$ contient un point u_1 tel que $f(u_1) = x_1$, et on a $B_1 = u_1 B u_1^{-1}$; comme $u_1^{-1} s u_1 \in N$, on a $s \in u_1 N u_1^{-1}$, ce qui montre que s appartient au normalisateur de B_1 . Supposons maintenant que $s \in B_1$, d'où $u_1^{-1} s u_1 \in B$. L'ensemble des $u^{-1} s u$ pour $u \in U$ est une partie connexe de N qui contient un point de B ; cet ensemble est donc contenu dans B . Or U contient $f^{-1}(f(Z))$, qui contient l'élément neutre e ; on a donc alors $s \in B$. Ceci étant, si s est semi-simple, l'inclusion $T' \subset B_1$ implique $s \in B_1$, d'où $s \in B$. Si s est

unipotent, on construit par le procédé précédent une suite $(B_i)_{0 \leq i \leq m}$ de groupes de Borel de G qui possèdent les propriétés suivantes : on a $B_0 = B$; pour chaque i , s appartient au normalisateur de B_i et, si $i > 0$, la condition $s \in B_i$ entraîne $s \in B_{i-1}$; B_i contient H_i . Donc B_m contient B_u , donc s ; il s'ensuit que $s \in B_i$ pour tout i , et, en particulier, $s \in B = B_0$.

COROLLAIRE 1.- Soit B un groupe de Borel du groupe algébrique affine G . L'application qui à tout $x \in G/B$ fait correspondre le groupe de stabilité de x est une bijection de G/B sur l'ensemble des groupes de Borel de B .

Soit f l'application canonique de G sur G/B ; si $x = f(s)$, $s \in G$, le groupe de stabilité de x est sBs^{-1} , qui est un groupe de Borel. Comme tous les groupes de Borel sont conjugués, l'application en question est surjective, Si $x = f(s)$, $x' = f(s')$ sont tels que $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$, $s^{-1}s'$ normalise B , donc est dans B , d'où $x = x'$.

COROLLAIRE 2.- Tout groupe de Borel B d'un groupe algébrique affine G est un sous-groupe résoluble maximal de G .

Soit H un sous-groupe résoluble de G contenant B ; soient \bar{H} l'adhérence de H , et \bar{H}_0 la composante connexe de e dans \bar{H} ; \bar{H}_0 est résoluble et connexe, et contient B , d'où $\bar{H}_0 = B$; \bar{H} étant dans le normalisateur de $\bar{H}_0 = B$, on a $H = B$.

COROLLAIRE 3.- Soit T un tore maximal d'un groupe algébrique affine G ; soient C et N le centralisateur et le normalisateur de T . Soit B un groupe de Borel contenant T ; les groupes de Borel contenant T sont alors les sBs^{-1} , où $s \in N$; si $s, s' \in N$, on ne peut avoir $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$ que si $s \equiv s' \pmod{C}$; le nombre des groupes de Borel contenant T est fini et égal à $[N : C]$.

Si sBs^{-1} est un groupe de Borel contenant T , sTs^{-1} et T sont des tores maximaux de sBs^{-1} , donc conjugués dans sBs^{-1} ; si $sTs^{-1} = b'Tb^{-1}$, $b' \in sBs^{-1}$, $b'^{-1}s = s'$ est dans N et $sBs^{-1} = s'Bs'^{-1}$. Soient maintenant s et s' des éléments de N tels que $s'Bs'^{-1} = sBs^{-1}$; $s^{-1}s'$ est alors dans le normalisateur de B , donc dans B ; de plus $s^{-1}s' \in N$. Or on sait que le normalisateur de T dans B est C (exposé 6, corollaire 3 au théorème 1), d'où $s \equiv s' \pmod{C}$. Il est clair que N est dans le normalisateur de C ; comme C est un groupe de Cartan, N/C est fini.

DÉFINITION 1.- Les notations étant celles du corollaire 3, le groupe N/C s'appelle de groupe de Weyl de T .

Tous les tores maximaux de G étant conjugués, ces tores ont des groupes de Weyl isomorphes. Un groupe abstrait isomorphe aux groupes de Weyl des tores maximaux de G est aussi appelé un groupe de Weyl de G .

4.- Le radical.

DÉFINITION 2.- On appelle radical d'un groupe algébrique affine G la composante algébrique de l'élément neutre dans l'intersection des groupes de Borel de G .

Le radical est manifestement un sous-groupe distingué fermé résoluble de G .

PROPOSITION 1.- Le radical de G est le plus grand sous-groupe distingué fermé résoluble connexe de G .

En effet, un sous-groupe distingué irréductible et résoluble de G est contenu dans au moins un groupe de Borel, donc dans tous et par suite aussi dans le radical.

DÉFINITION 3.- On appelle semi-simple un groupe algébrique affine dont le radical se réduit à l'élément neutre.

PROPOSITION 2.- Soit R le radical d'un groupe algébrique affine G ; G/R est alors semi-simple.

Le radical de G/R s'écrit S/R , où S est un sous-groupe fermé distingué de G qui est connexe (Lemme 4); S étant résoluble puisque R et S/R le sont, on a $S = R$.

5.- Les groupes à un paramètre d'un tore.

Soit T un tore. Nous appellerons groupe à un paramètre de T tout homomorphisme rationnel δ du groupe multiplicatif K^* des éléments $\neq 0$ de K dans T ; soit $\Gamma(T)$ l'ensemble des groupes à un paramètre de T . Si $\gamma \in \Gamma(T)$, nous désignerons par $\text{Supp } \gamma$ l'ensemble des $\gamma(x)$, $x \in K^*$. Si γ et γ' sont dans $\Gamma(T)$, il en est de même de l'application $x \rightarrow \gamma(x) \gamma'(x)$; on a ainsi une loi de composition dans $\Gamma(T)$ relativement à laquelle $\Gamma(T)$ constitue un groupe comme on le vérifie tout de suite. Ce groupe sera noté suivant les besoins tantôt additivement tantôt multiplicativement. Soit aussi X le groupe des caractères de T , i.e. des homomorphismes

rationnels de T dans K^* . Si $\gamma \in \Gamma(T)$, $\chi \in X$, $\chi \circ \gamma$ est un homomorphisme rationnel de K^* dans lui-même, donc de la forme $x \rightarrow x^n$, n étant un entier bien déterminé ; nous poserons $n = \langle \gamma, \chi \rangle$. Considérant $\Gamma(T)$ et X comme des modules sur \mathbb{Z} , $(\gamma, \chi) \rightarrow \langle \gamma, \chi \rangle$ est évidemment une forme bilinéaire sur $\Gamma(T) \times X$. Montrons qu'elle définit un isomorphisme de l'un quelconque des modules $\Gamma(T)$, X sur le dual de l'autre. On peut se limiter au cas où $T = K^{*d}$ pour un certain $d > 0$. Le groupe X est alors, comme on l'a vu, engendré par des éléments χ_i ($1 \leq i \leq d$) tels que

$$\chi_i(x_1, \dots, x_d) = x_i \quad (1 \leq i \leq d) \quad (\text{où } (x_1, \dots, x_d) \in K^{*d}).$$

Par ailleurs, l'application σ_i qui fait correspondre à tout $x \in K^{*d}$ l'élément de K^{*d} dont la i -ème coordonnée est x et les autres coordonnées 1 est un groupe à un paramètre ; on a $\langle \sigma_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq d$). Si γ est un élément quelconque de $\Gamma(T)$, il y a des entiers e_i tels que

$\langle \gamma - \sum_{i=1}^d e_i \sigma_i, \chi_j \rangle = 0$ pour $1 \leq j \leq d$, ce qui entraîne manifestement que $\gamma = \sum_{i=1}^d e_i \sigma_i$, et démontre notre assertion.

Par extension de l'anneau de base, on déduit de $\Gamma(T)$ un espace vectoriel $\Gamma^{\mathbb{R}}(T)$ de dimension $\dim T$ sur le corps \mathbb{R} des nombres réels.

PROPOSITION 3.— Soit T un tore ; soit U un cône ouvert non vide dans l'espace vectoriel $\Gamma^{\mathbb{R}}(T)$ (muni de sa topologie ordinaire). La réunion des $\text{Supp } \gamma$ pour $\gamma \in U \cap \Gamma^{\mathbb{R}}(T)$ est alors dense dans T .

Soit $d = \dim T$. Soit E une partie fermée $\neq T$ de T ; alors l'ensemble des $\gamma \in \Gamma(T)$ tels que $\text{Supp } \gamma \subset E$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de sous-groupes de rangs $< d$ de $\Gamma(T)$. On peut en effet supposer $T = K^{*d}$; il y a alors un polynôme $P \neq 0$ en d lettres à coefficients dans K tel que $P(x_1, \dots, x_d) = 0$ si $(x_1, \dots, x_d) \in E$. Par ailleurs un élément γ de $\Gamma(T)$ est de la forme

$$x \rightarrow (x^{n_1}, \dots, x^{n_d}), \quad \text{les } n_i \text{ étant des entiers.}$$

Pour que $\text{Supp } \gamma \subset E$, il est nécessaire que le polynôme $P(X^{n_1}, \dots, X^{n_d})$ en une lettre X soit identiquement nul. On voit tout de suite qu'il existe un nombre fini de systèmes (e_1, \dots, e_d) d'entiers non tous nuls tels que

le polynome $P(X_1^{n_1}, \dots, X_d^{n_d})$ ne puisse être nul que si l'une au moins des conditions $\sum_{i=1}^d e_i n_i = 0$ est satisfaite. Remplaçant U par l'ensemble qu'on en déduit en retirant les points d'un nombre fini d'hyperplans de $\Gamma^{\mathbb{R}}(T)$ passant par l'origine, on voit qu'on est ramené à montrer que $U \cap \Gamma(T) \neq \emptyset$. Or toute base de $\Gamma(T)$ en est aussi une de $\Gamma^{\mathbb{R}}(T)$; relativement à une pareille base, U contient au moins un point à coordonnées rationnelles, donc aussi un point à coordonnées entières puisque c'est un cône, d'où la proposition 3.
