Séminaire Claude Chevalley

P. Cartier

Schémas des variétés algébriques

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n^{o} 2, p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A2_0>

-:-:-:-

Exposé n° 2

SCHÉMAS DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

(Exposé de P. CARTIER , le 12.11.56)

ERRATA à l'exposé 1 :

page 1-11, ligne 9 du bas : lire : ... on pose $f(a) = a \otimes 1$ et $f'(a') = 1 \otimes a'$.

page 1-12, ligne 11 du haut : lire : pour $x \in U_i \cap U_j$ est fermé dans $V_i \cap V_j$ muni de la topologie induite par la topologie de $\Omega_{A_i} \times \Omega_{A_j}$.

page 1-12, ligne 14 du bas : ajouter : Pour que l'ensemble algébrique affine E soit irréductible, il faut et il suffit que l'algèbre $A = \underline{o}^E(E)$ soit un anneau intègre : en effet, comme tout ouvert non vide de E contient un ouvert de la forme $V(f)$: ensemble des $x \in E$ où $f(x) \neq 0$ pour $f \in A$ non nul convenable, l'irréductibilité de E signifie que si f et g sont des éléments non nuls de A , l'ouvert $V(fg) = V(f) \cap V(g)$ est non vide, ce qui signifie que $fg \neq 0$. Un ensemble fermé irréductible est donc l'ensemble des points où s'annulent les éléments d'un idéal premier. Les composantes irréductibles de E correspondent aux idéaux premiers minimaux de A .

1.- Sous-ensembles algébriques.

Pour simplifier le langage, on dira qu'un sous-ensemble d'un espace topologique est localement fermé s'il est intersection d'un ouvert et d'un fermé, ou, ce qui revient au même, s'il est ouvert dans son adhérence.

PROPOSITION 1.- *Soient E un ensemble algébrique et T un sous-ensemble de E ; pour que T muni de la topologie induite par celle de E et du système local $\underline{o}^E | T = \underline{o}^T$ soit un ensemble algébrique, il faut et il suffit qu'il soit localement fermé, ou encore que pour tout $x \in T$, il existe un voisinage U de x dans E et $f_i \in \underline{o}^E(U)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ telles que $T \cap U$ soit l'ensemble des points de U où s'annulent les fonctions f_i .*

Soit (U_i) un recouvrement ouvert de E ayant les propriétés énoncées dans les axiomes (EA1) et (EA2).

Si U est un ouvert de E, on a $\underline{o}^E | U_i \cap U = (\underline{o}^E | U) | (U_i \cap U)$ et $U \cap U_i$ est ouvert dans U ; comme $\varphi_i(U \cap U_i)$ est ouvert dans Ω_{A_i}, le recouvrement ouvert fini $(U \cap U_i)_{i \in I}$ de U vérifie l'axiome (EA1). La vérification de l'axiome (EA2) est immédiate, et ceci prouve que le système local $\underline{o}^E | U$ définit une structure d'ensemble algébrique sur U.

Soit maintenant F un fermé de E ; on a $\underline{o}^E | (F \cap U_i) = (\underline{o}^E | F) | (F \cap U_i)$ et $F \cap U_i$ est ouvert dans F ; de plus $F_i = \varphi_i(F \cap U_i)$ est fermé dans V_i, donc $F_i = V_i \cap \overline{F}_i$ ($\overline{F}_i$ désignant l'adhérence de F_i dans Ω_{A_i}) et F_i est un ouvert de $\overline{F}_i$; mais on sait que $\overline{F}_i$ peut être identifié au spectre d'une algèbre de type fini B_i et que $\underline{o}^{B_i} = \underline{o}^{A_i} | \overline{F}_i$; ceci prouve que la restriction de φ_i à $F \cap U_i$ est un isomorphisme de $\underline{o}^E | (F \cap U_i)$ sur $\underline{o}^{B_i} | F_i = \underline{o}^{A_i} | F_i$. Autrement dit, le recouvrement ouvert fini $(F \cap U_i)_{i \in I}$ de F vérifie l'axiome (EA1). La vérification de l'axiome (EA2) repose sur le fait que la topologie de $\Omega_{B_i} \times \Omega_{B_j}$ étant définie par les fonctions de $(\widehat{B_i \otimes B_j})$ est induite par la topologie de $\Omega_{A_i} \times \Omega_{A_j}$.

Enfin supposons que $T = F \cap U$, avec F fermé et U ouvert dans E. Comme $F \cap U$ est fermé dans U et que $\underline{o}^E | T = (\underline{o}^E | U) | (F \cap U)$, ce qui précède montre que le système local $\underline{o}^E | T$ définit une structure d'ensemble algébrique sur T.

Réciproquement, supposons que le sous-ensemble T de E soit tel que le système local $\underline{o}^E | T$ définisse une structure d'ensemble algébrique sur T. Soit $\overline{T}$ l'adhérence de T dans E ; il suffira de prouver que T est ouvert dans $\overline{T}$, car il sera alors de la forme $U \cap \overline{T}$ avec U ouvert dans E. Mais $\overline{T}$ est un ensemble algébrique si on le munit du système local $\underline{o}^E | \overline{T}$ et l'on a $\underline{o}^E | T = (\underline{o}^E | \overline{T}) | T$; on est donc ramené à prouver que si T est dense dans E, il est ouvert dans E.

Supposons donc T dense dans E et soient T_j les composantes irréductibles de T, donc $\overline{T}_j$ les composantes irréductibles de E. Comme T_j est fermé dans T, le système local $(\underline{o}^E | T) | T_j = \underline{o}^E | T_j$ définit une structure d'ensemble algébrique sur T_j ; mais, $\overline{T}_j$ étant fermé dans E, le système local $\underline{o}^E | \overline{T}_j$ y définit une structure d'ensemble algébrique. Comme $\underline{o}^E | T_j = (\underline{o}^E | \overline{T}_j) | T_j$, on est ramené à prouver que si T est dense dans E irréductible, alors T est ouvert dans E, car alors $T_j = T \cap \overline{T}_j$ sera ouvert dans $\overline{T}_j$ et $T = \bigcup_j T_j$ sera ouvert dans $E = \bigcup_j \overline{T}_j$.

On peut donc supposer E irréductible et T dense dans E. Soit (V_k) un recouvrement fini de E par des ouverts affines ; comme $(V_k \cap T)$ est un recouvrement ouvert de T, et comme le système local $(\underline{o}^E | V_k) | (T \cap V_k) = \underline{o}^E | (T \cap V_k) = (\underline{o}^E | T) | (T \cap V_k)$ y définit une structure d'ensemble algébrique il suffira de prouver que $T \cap V_k$ est ouvert dans V_k pour prouver que T est ouvert dans E. Autrement dit, on peut supposer E affine. Enfin comme T est réunion d'ouverts affines W_m de T, et que le système local $\underline{o}^E | W_m = (\underline{o}^E | T) | W_m$ définit une structure d'ensemble algébrique sur W_m, on peut supposer T affine.

Supposons donc que E et T soient des ensembles algébriques affines, que E soit irréductible et T dense dans E. Soit $f \in \underline{o}^T(T)$. D'après la définition du système local $\underline{o}^E | T$, pour tout $x \in T$, il existe un voisinage U_x de x dans E et une fonction $f_x \in \underline{o}^E(U_x)$ telle que f et f_x coincident sur $U_x \cap T$; mais E étant irréductible, pour tous $x, y \in T$, l'ensemble $T \cap U_x \cap U_y$ est dense dans $U_x \cap U_y$, donc les fonctions continues f_x et f_y coincident dans $U_x \cap U_y$; par suite si V est la réunion des U_x, il existe $g \in \underline{o}^E(V)$ induisant f_x sur U_x pour $x \in T$ et par conséquent induisant f sur T. Si (f_i) est un système fini de générateurs de l'algèbre $\underline{o}^T(T)$, on peut par suite trouver un ouvert V contenant T et des fonctions $g_i \in \underline{o}^E(V)$ prolongeant les f_i. Soit A la sous-algèbre de $\underline{o}^E(V)$ engendrée par les g_i ; comme T est dense dans V et comme les éléments de A sont des fonctions continues, l'opération $f \to f|T$ est une bijection de A sur $\underline{o}^T(T)$. Soit alors $x \in V$; l'application $f \to f(x)$ de A dans K étant un homomorphisme, il existe puisque T est affine $x' \in T$ tel que $f(x) = f(x')$ pour tout $f \in A$ en particulier pour $f \in \underline{o}^E(E)$; comme E est affine, on en déduit $x = x'$ donc $x \in T$ et $T = V$. On a donc prouvé que T est ouvert dans E.

Pour achever la démonstration, il reste à démontrer que pour que T soit localement fermé, il faut et il suffit qu'il vérifie la dernière condition de la proposition 1. Supposons d'abord $T = F \cap U$ avec U ouvert et F fermé dans E ; pour tout $x \in T$, il existe un ouvert affine U_x contenant x et contenu dans U d'après la proposition 7 de l'exposé 1. L'ensemble $T \cap U_x = F \cap U_x$ étant fermé dans U_x est de la forme $\bigcap_i V(f_i)$ avec $f_i \in \underline{o}^E(U_x)$ et c'est l'ensemble des points de U_x où s'annulent les f_i.

Inversement supposons que tout $x \in T$ ait un voisinage ouvert U_x tel que $T \cap U_x$ soit l'ensemble des points où s'annulent des fonctions $f_i \in \underline{o}^E(U_x)$; il s'ensuit que $T \cap U_x$ est fermé dans U_x, et comme T est recouvert par un nombre fini d'ouverts U_{x_j}, il est fermé dans l'ouvert $\bigcup_i U_{x_j}$.

C.Q.F.D.

Si T est un sous-ensemble localement fermé de l'ensemble algébrique E, on appellera <u>sous-ensemble algébrique</u> T de E, l'ensemble T muni de la topologie induite par celle de E et du système local $\underline{o}^E | T$.

<u>REMARQUE</u> : CHEVALLEY a démontré que si T est un sous-ensemble d'un ensemble algébrique E sur lequel existe une structure induite au sens de N. BOURBAKI (Ens. IV, paragraphe 2), T est localement fermé, ce qui justifie la terminologie introduite. La démonstration précédente montre qu'on peut se limiter au cas où E et T sont affines, où E est irréductible et T dense dans E.

2.- <u>Produits d'ensembles algébriques.</u>

Remarquons pour commencer que si U est un ouvert d'un ensemble algébrique E, l'ensemble $\underline{o}^E(U)$ est une k-algèbre de fonctions et que si $f \in \underline{o}^E(U)$ ne s'annule pas sur U, son inverse appartient à $\underline{o}^E(U)$: ces assertions résultent en effet du cas où U est un ouvert affine d'après l'axiome (SL2) et la proposition 7 de l'exposé 1, tandis que dans le cas affine elles résultent de la proposition 6 de l'exposé 1.

De plus, l'algèbre des fonctions polynomes sur K à coefficients dans k définit sur l'ensemble K une structure d'ensemble algébrique affine pour laquelle les ensembles fermés $\neq K$ sont les ensembles finis invariants par le groupe des k-automorphismes de K.

<u>PROPOSITION 2.- Soient</u> E <u>un ensemble algébrique et</u> A <u>une algèbre de type fini sur</u> k ; <u>pour qu'une application</u> f <u>de</u> E <u>dans</u> Ω_A <u>soit régulière il faut et il suffit que pour tout</u> $x \in A$, <u>on ait</u> $\hat{x} \circ f \in \underline{o}^E(E)$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons la vérifiée par f et soit $x \in A$; l'ensemble $U = f^{-1}(V(x))$ est l'ensemble des points où ne s'annule pas $\hat{x} \circ f$, donc est ouvert, ce qui prouve que f est continue. De plus la fonction $\hat{x} \circ f$ ne s'annulant pas sur U, son inverse est dans $\underline{o}^E(U)$ et évidemment égal à $\hat{x}^{-1} \circ f$. Comme $\underline{o}^A(V(x))$ est engendrée par les restrictions à $V(x)$ des fonctions appartenant à $\hat{A}$ et par $\mathfrak{L}^{-1}$, on a $h \circ f \in \underline{o}^E(U)$ pour $h \in \underline{o}^A(V(x))$, ce qui prouve que f est régulière puisque les $V(x)$ forment une base d'ouverts de Ω_A.

COROLLAIRE 1.- Les applications régulières de E dans K muni de la structure définie plus haut sont les éléments de $\underline{o}^E(E)$.

COROLLAIRE 2.- Pour qu'une application $x \to (f_1(x), f_2(x))$ de l'ensemble algébrique E dans $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$ soit régulière, il faut et il suffit que f_1 et f_2 soient régulières.

Ceci résulte immédiatement de la remarque page 11 de l'exposé 1.

En vertu du corollaire 1, les éléments de $\underline{o}^E(U)$ pour U ouvert dans E peuvent s'appeler fonctions (numériques) régulières sur U.

PROPOSITION 3.- Soient E_1 et E_2 deux ensembles algébriques ; il existe sur $E_1 \times E_2$ une structure d'ensemble algébrique et une seule vérifiant la condition suivante :

(P) Si pour $i = 1, 2$, φ_i est une carte de l'ouvert U_i de E_i sur l'ouvert V_i de Ω_{A_i} (A_i étant une algèbre de type fini), l'ensemble $U_1 \times U_2$ est ouvert dans $E_1 \times E_2$ et l'application $\varphi_1 \times \varphi_2$ est une carte de $U_1 \times U_2$ sur l'ouvert $V_1 \times V_2$ de $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$.

Dans ces conditions pour qu'une application $x \to (f_1(x), f_2(x))$ de l'ensemble algébrique F dans $E_1 \times E_2$ soit régulière, il faut et il suffit que les applications f_1 et f_2 soient régulières.

Soient pour $i = 1, 2$, des cartes $\varphi_i : U_i \to V_i \subset \Omega_{A_i}$ et $\varphi'_i : U'_i \to V'_i \subset \Omega_{A'_i}$ définies sur des ouverts de E_i ; l'ensemble $T_i = \varphi_i(U_i \cap U'_i)$ est ouvert dans V_i donc dans Ω_{A_i} et comme la topologie de $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$ est plus fine que la topologie produit, l'ensemble

$$(\varphi_1 \times \varphi_2)((U_1 \times U_2) \cap (U'_1 \times U'_2)) = \varphi_1(U_1 \cap U'_1) \times \varphi_2(U_2 \cap U'_2) = T_1 \times T_2$$

est ouvert dans $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$. De plus l'application $\varphi_i \circ \varphi'^{-1}_i$ est une application régulière de $T'_i = \varphi'_i(U_i \cap U'_i)$ sur T_i. Comme T'_i est ouvert dans V'_i donc dans $\Omega_{A'_i}$, il résulte du corollaire 2 de la proposition 2, que $\Psi = (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ (\varphi'_1 \times \varphi'_2)^{-1} = (\varphi_1 \circ \varphi_1'^{-1}) \times (\varphi_2 \circ \varphi_2'^{-1})$ est une application régulière de $T'_1 \times T'_2$ sur $T_1 \times T_2$. Inversant les rôles de φ_i et φ'_i , on voit que Ψ^{-1} est régulière, donc que Ψ est un isomorphisme.

Comme E_i est recouvert par un nombre fini d'ouverts admettant des cartes, ce qui précède permet d'appliquer la proposition 5 de l'exposé 1 pour démontrer l'existence et l'unicité d'un système local sur $E_1 \times E_2$ vérifiant la condition (P), et ceci montre aussi que $E_1 \times E_2$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts admettant des cartes. De plus, pour qu'une application $x \to (f_1(x), f_2(x))$ de F dans $E_1 \times E_2$ soit régulière, il faut et il suffit d'après la proposition 5 de l'exposé 1 que pour chaque carte φ_i définie sur l'ouvert de U_i de E_i $(i = 1, 2)$, l'application $x \to (\varphi_1(f_1(x)), \varphi_2(f_2(x)))$ de $f_1^{-1}(U_1) \times f_2^{-1}(U_2)$ dans $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$ soit régulière, donc d'après le corollaire 2 de la proposition 2 que l'application $\varphi_i \circ f_i$ de $\varphi_i^{-1}(U_i))$ dans Ω_{A_i} soit régulière. Cette dernière condition signifie d'après la proposition 4 de l'exposé 1 que f_i est régulière.

Il reste à démontrer que $E_1 \times E_2$ vérifie l'axiome (EA2) si E_1 et E_2 vérifient ce même axiome. Les notations étant les mêmes qu'au début de la démonstration, il faut montrer que l'ensemble Δ formé des $((\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)), (\varphi'_1(x_1), \varphi'_2(x_2)))$ pour $(x_1, x_2) \in (U_1 \times U_2) \cap (U'_1 \times U'_2)$ est fermé dans $(V_1 \times V_2) \times (V'_1 \times V'_2) \subset (\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}) \times (\Omega_{A'_1} \times \Omega_{A'_2}) = G$.

Or l'échange S des deux facteurs Ω_{A_2} et $\Omega_{A'_1}$ dans le produit G est un homéomorphisme et l'on a $S(\Delta) = \Delta_1 \times \Delta_2$ si Δ_i est l'ensemble des $(\varphi_i(x_i), \varphi'_i(x_i))$ pour $x_i \in U_i \cap U'_i$. Comme Δ_i est fermé dans $V_i \times V'_i$ puisque E_i vérifie l'axiome (EA2). L'ensemble Δ est fermé dans $(V_1 \times V_2) \times (V'_1 \times V'_2)$ et par suite $E_1 \times E_2$ vérifie l'axiome (EA2).

REMARQUES

1) Lorsque E_i $(i = 1, 2)$ est un ensemble muni d'une topologie et d'un système local vérifiant l'axiome (EA1), la démonstration qui précède montre qu'il existe sur $E_1 \times E_2$ un système local et un seul vérifiant la condition (P) et ce système local vérifie la condition (EA1). Dans ces conditions,

l'axiome (EA2) signifie <u>que la diagonale</u> Δ_E <u>de</u> $E \times E$ <u>est fermée</u>.

2) Soient E_i $(i = 1, 2)$ deux ensembles algébriques affines et A_i l'algèbre des fonctions régulières sur E_i ; il résulte du fait que E_i est isomorphe à Ω_{A_i} et de la définition de la structure de $\Omega_{A_1} \times \Omega_{A_2}$, que les fonctions régulières sur $E_1 \times E_2$ sont les fonctions de la forme

$$h(x_1,x_2) = \sum_{k=1}^{m} f_{1,k}(x_1) f_{2,k}(x_2) \quad \text{pour } f_{i,k} \in A_i .$$

En particulier, les fonctions régulières sur K^n sont les fonctions polynomes à n variables à coefficients dans k. Comme toute algèbre de type fini sur k est isomorphe à une algèbre de la forme $k[X_1, \dots, X_n]/(P_1, \dots, P_m)$, on en conclut que tout ensemble algébrique affine est isomorphe à un sous-ensemble de K^n défini par des équations $P_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ pour un n convenable et des polynomes $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ convenables.

Le critère sur les applications régulières contenu dans la proposition 3 montre que la structure définie sur $E_1 \times E_2$ est une structure produit au sens de N. BOURBAKI (loc. cit.) ; il en résulte que le produit d'ensembles algébriques est une opération associative et commutative, que si f_i est une application régulière de E_i dans F_i pour $i = 1, 2$, l'application $f_1 \times f_2$ de $E_1 \times E_2$ dans $F_1 \times F_2$ est régulière, que la projection p_i de $E_1 \times E_2$ sur E_i est régulière, et que si f est une application régulière de E dans F dont le graphe est Γ, la projection p de $E \times F$ sur E induit un isomorphisme de Γ sur E (on notera d'aillleurs que <u>le graphe</u> Γ <u>de</u> f <u>est fermé</u> comme image réciproque de la diagonale de $F \times F$ par l'application continue $(x,y) \to (f(x),y)$ de $E \times F$ dans $F \times F$). Endin, comme la topologie sur $E_1 \times E_2$ est plus fine que la topologie produit puisque les projections sur les facteurs sont continues, le produit de deux sous-ensembles T_1 et T_2 localement fermés de E_1 et E_2 respectivement, est localement fermé dans $E_1 \times E_2$ et il résulte de N. BOURBAKI (loc. cit.) que la structure induite sur $T_1 \times T_2$ par la structure produit de $E_1 \times E_2$ est identique à la structure produit des structures induites sur T_1 et T_2.

3.- <u>Extension des scalaires.</u>

Nous allons d'abord démontrer un résultat préliminaire affirmant la possibilité de construire des ensembles algébriques par "recollement des morceaux".

PROPOSITION 4.- Soit $(E_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'un ensemble E dont on puisse extraire un recouvrement fini. On suppose donnés pour tout $i \in I$ un ensemble algébrique X_i et une bijection f_i de X_i sur E_i de sorte que pour tout couple (i, j) :

a) $f_i^{-1}(E_i \cap E_j) = X_{ij}$ soit ouvert dans X_i

b) l'application $f_j^{-1} \circ (f_i | X_{ij}) = f_{ij}$ soit une application régulière de X_{ij} sur X_{ji}

c) l'ensemble R_{ij} de $X_i \times X_j$ formé des couples (x, x') tels $f_i(x) = f_j(x')$ soit fermé dans $X_i \times X_j$.

Il existe alors sur E une structure d'ensemble algébrique et une seule pour laquelle les E_i soient ouverts et f_i soit un isomorphisme de X_i sur E_i. Dans ces conditions, si E' est un ensemble algébrique, pour qu'une application f de E dans E' (resp. de E' dans E) soit régulière, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, l'application $f \circ f_i$ de X_i dans E' (resp. $f_i^{-1} \circ (f | f^{-1}(E_i))$ de $f^{-1}(E_i)$ dans X_i) soit régulière.

Cela résulte immédiatement de la proposition 5 de l'exposé 1, la condition c) assurant que la diagonale de $E \times E$ est fermée et l'axiome (EA1) résultant de ce qu'un nombre fini des E_i recouvre E.

Les ensembles algébriques envisagés jusqu'ici étaient des (k,K)-ensembles algébriques. Soit k' un sous-corps de K contenant k ; nous allons montrer comment tout (k,K)-ensemble algébrique peut être muni d'une structure de (k',K)-ensemble algébrique.

Soit A une k-algèbre de type fini et $A' = k' \otimes_k A$ l'algèbre déduite de A par extension des scalaires. A tout k-homomorphisme f de A dans K associons le k'-homomorphisme $i_A(f) : \lambda \otimes x \to \lambda f(x)$ de A' dans K. L'application i_A est une bijection de Ω_A sur $\Omega_{A'}$ et elle transforme en ouvert (resp. un fermé) de Ω_A en un ouvert (resp. un fermé de $\Omega_{A'}$.

PROPOSITION 5.- Soient E un (k,K)-ensemble algébrique et k' un sous-corps de K contenant k. Il existe sur E une structure de (k',K)-ensemble algébrique $E^{k'}$ et une seule telle que tout ouvert U de E soit un ouvert de $E^{k'}$ et que pour toute carte $\varphi : U \to V \subset \Omega_A$ de E l'application

$i_A \circ \varphi : U \to i_A(V) \to \Omega_{A'}$, soit une carte de $E^{k'}$. Pour qu'une application f d'un (k',K)-ensemble algébrique F dans $E^{k'}$ soit régulière, il faut et il suffit que f soit un homomorphisme du système local $\underline{o}^F$ dans le système local $\underline{o}^E$.

On va appliquer la proposition 4 à la classe (qui n'est pas un ensemble) de toutes les applications $(i_A \circ \varphi)^{-1}$ pour toutes les cartes φ de E. Les conditions a) et c) sont remplies du fait que i_A transforme ouvert en ouvert et fermé en fermé et que c'est une bijection. La condition b) sera remplie en vertu du lemme suivant :

LEMME 1.- Soient A et B deux k-algèbres de type fini, f une application régulière d'un ouvert U de Ω_A dans Ω_B. Il existe une application régulière f' et une seule de $U' = i_A(U) \subset \Omega_{A'}$ dans $\Omega_{B'}$, (avec $A' = k' \otimes_k A$ et $B' = k' \otimes_k B$) telle que $i_B \circ f = f' \circ i_A$.

Comme i_A et i_B sont des bijections, l'application ensembliste f' existe bien. Comme tout ouvert de Ω_A est réunion d'ouverts de la forme $V(x)$ avec $x \in A$, la proposition 7 de l'exposé 1 montre qu'on peut se limiter au cas où $U = V(x)$. De plus la définition de i_A montre que si $x' \in A$, on a $\hat{x}' = (\widehat{1 \otimes x'}) \circ i_A$ et par suite $i_A(V(x)) = V(1 \otimes x)$. Nous allons appliquer la proposition 2 ; soit $y \in B$, il suffira de montrer que $(\widehat{1 \otimes y}) \circ f'$ est régulière sur U', mais on a $((\widehat{1 \otimes y}) \circ f') \circ i_A = (\widehat{1 \otimes y}) \circ i_B \circ f = \hat{y} \circ f$. Comme f est régulière, $\hat{y} \circ f$ est de la forme $\hat{x}'/\hat{x}^m$ et par suite $(\widehat{1 \otimes y}) \circ f$ est de la forme $(\widehat{1 \otimes x'}) / (\widehat{1 \otimes x})^m$, donc est régulière sur U'.

L'existence et l'unicité de la structure de $E^{k'}$ sont donc démontrés ; soit f une application du (k',K)-ensemble algébrique F dans E. Pour que f soit régulière de F dans $E^{k'}$, il faut et il suffit d'après la proposition 4 que pour toute carte $\varphi : U \to \Omega_A$ de E, l'application $i_A \circ \varphi \circ f$ de $f^{-1}(U)$ dans $\Omega_{A'}$ soit régulière. Comme les fonctions régulières sur $\Omega_{A'}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans k' des fonctions $h \circ i_A^{-1}$ avec $h \in \hat{A}$, ceci signifie d'après la proposition 2 que pour tout $h' \in \underline{o}^E(U)$, la fonction $h' \circ f$ est régulière sur $f^{-1}(U)$, i.e. que f est un homomorphisme de $\underline{o}^F$ dans $\underline{o}^E$.

C.Q.F.D.

On notera que si U est un ouvert affine de E, les fonctions régulières sur l'ouvert U de $E^{k'}$ sont les combinaisons linéaires à coefficients dans k' des éléments de $\underline{o}^E(U)$.

La topologie sur E définie par la structure de $E^{k'}$ s'appellera la k'-topologie de E. On parlera ainsi de k'-fermé, etc. De même, on dira par abus de langage qu'une application f de E dans un (k, K)-ensemble algébrique est une application régulière de E dans E' définie sur k' si c'est une application régulière de $E^{k'}$ dans $E'^{k'}$.

On dira de plus qu'un ensemble algébrique est <u>absolument irréductible</u> s'il est irréductible pour la K-topologie. Il résultera en fait des résultats démontrés plus loin (corollaire 3 du théorème 1) que l'absolue irréductibilité signifie l'irréductibilité pour la k'-topologie, pourvu que k' soit algébriquement clos.

3.- <u>Applications rationnelles.</u>

Soient E et F deux ensembles algébriques ; si f_i $(i = 1, 2)$ est une application régulière de l'ouvert U_i de E dans F, nous dirons comme d'habitude que "f_2 prolonge f_1" si $U_1 \subset U_2$ et si $f_2 | U_1 = f_1$. On définit ainsi une relation d'ordre entre fonctions régulières définies dans un ouvert (variable) de E.

LEMME 2.- <u>Toute fonction f régulière définie dans un ouvert U de E à valeurs dans F admet un prolongement maximal. Si V est partout dense ce prolongement est unique. Pour que deux fonctions f et f' régulières définies sur des ouverts partout denses admettent le même prolongement maximal, il faut et il suffit qu'elles coïncident sur un ouvert partout dense où elles sont toutes deux définies.</u>

La première assertion résulte du théorème de ZORN, applicable ici car l'axiome (SI2) des systèmes locaux montre que l'ensemble des applications régulières d'un ouvert U de E dans F, ordonné par la relation "f_2 prolonge f_1" est inductif.

Supposons donc f régulière définie sur l'ouvert U partout dense et soient f_1 et f_2 deux prolongements maximaux de f définis respectivement sur les ouverts U_1 et U_2 ; U est dense dans $U_1 \cap U_2$, et comme les fonctions continues f_1 et f_2 coïncident dans U, elles coïncident dans $U_1 \cap U_2$.

L'axiome (SL2) démontre l'existence d'une fonction régulière sur $U_1 \cup U_2$ prolongeant f_1 et f_2, ce qui comme les f_i sont maximaux impose $U_1 \cup U_2 = U_1 = U_2$ et par suite $f_1 = f_2$.

Si f et f' admettent le même prolongement maximal, elles coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition qui est un ouvert partout dense. Inversement si f et f' sont les prolongements d'une même fonction g régulière sur un ouvert partout dense de E, et si $\overline{f}$ et $\overline{f}'$ sont des prolongements maximaux de f et f' respectivement, ce sont tous deux des prolongements maximaux de g, et ils sont donc égaux.

Ceci dit, on peut poser la définition suivante :

DÉFINITION 1.- Soient E et F deux ensembles algébriques. On appelle application rationnelle f de E dans F, une application régulière d'un ouvert partout dense de E à valeurs dans F qui n'admet aucun prolongement strict. Le domaine de définition de f sera noté $D(f)$. Une application rationnelle de E dans K sera appelée une fonction rationnelle (numérique) sur E.

Démontrons d'abord un lemme sur la topologie des ensembles algébriques

LEMME 3.- Soient E un ensemble algébrique et E_i ses composantes irréductibles. Pour qu'un ouvert U de E soit partout dense, il faut et il suffit qu'il rencontre chaque E_i. Dans ces conditions, U est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines partout denses U_j et si E est affine, on peut supposer U_j de la forme $V(f_j)$ avec $f_j \in \underline{o}^E(E)$.

Supposons $U \cap E_i \neq \emptyset$ pour tout i et soit V un ouvert non vide de E. Il y a un indice i_o tel que $V \cap E_{i_o} \neq \emptyset$, d'où comme E_{i_o} est irréductible $U \cap V \cap E_{i_o} \neq \emptyset$ et a fortiori $U \cap V \neq \emptyset$; U est donc partout dense. Supposons inversement U partout dense et soit $F_i = \bigcap_{j \neq i} \complement E_j \subset E_i$; comme F_i est un ouvert non vide, on a $F_i \cap U \neq \emptyset$ et donc $E_i \cap U \neq \emptyset$.

Soit $x \in E$ et $V \subset U$ un ouvert affine contenant x ; pour chaque i, soit G_i un ouvert affine non vide contenu dans $F_i \cap U$ et soit W la réunion de V et des G_i qui ne rencontrent pas V ; W est réunion d'ouverts affines disjoints, donc est lui-même affine, comme on le voit avec l'axiome (SL2), et il est partout dense car il rencontre visiblement chaque E_i. En vertu de la quasi-compacité de U, l'ouvert U est donc réunion d'un nombre fini d'ouverts affines partout denses.

Lorsque E est affine, on peut supposer V et les G_i de la forme $V(f)$. Or on voit facilement que toute réunion d'ouverts disjoints de la forma $V(f)$ est aussi de cette forme.

Soient f et g deux fonctions rationnelles sur l'ensemble algébrique E ; d'après le lemme 1 , il existe des fonctions rationnelles $f + g$ et fg bien définies par les conditions :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

pour tout $x \in D(f) \cap D(g)$. Le lemme 3 montre alors que les fonctions rationnelles sur E forment une k-algèbre notée $k(E)$.

Soient f et g deux applications rationnelles de E dans F et F dans G respectivement ; si l'ouvert $f^{-1}(D(g))$ est partout dense dans E , il existe une application rationnelle bien définie $g \circ f$ par la condition $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ chaque fois que $f(x)$ et $g(f(x))$ sont définis. Lorsque h est une application rationnelle de G dans H , si $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont tous deux définis, ils sont égaux et on peut les noter $h \circ g \circ f$. En particulier si F est un sous-ensemble localement fermé de E , pour que la restriction $f|F$ de $f \in k(E)$ à F soit définie, il faut et il suffit que $D(f) \cap F$ soit dense dans F ; ces fonctions forment une sous-algèbre $\underline{o}(E,F)$ de $k(E)$ et l'opération $f \to f|F$ est un homomorphisme de $\underline{o}(E,F)$ dans $k(F)$. Si G est un sous-ensemble localement fermé de F , c'est un sous-ensemble localement fermé de E , et l'on a $\underline{o}(E,G) \subset \underline{o}(E,F)$ l'homomorphisme $\rho_{E,F}$ applique $\underline{o}(E,G)$ dans $\underline{o}(F,G)$ et la restriction à $\underline{o}(E,G)$ de $\rho_{F,G} \circ \rho_{E,F}$ est égale à $\rho_{E,G}$. Enfin, si U est un ouvert partout dense de E , on a évidemment $\underline{o}(E,U) = k(E)$ et l'homomorphisme $\rho_{E,U}$ est un isomorphisme de $k(E)$ sur $k(U)$. Le lemme 3 montre que dans les questions concernant les fonctions rationnelles, on peut se limiter le plus souvent au cas des ensembles algébriques affines.

<u>THÉORÈME 1.- Soient E un ensemble algébrique et E_i ses composantes irréductibles.</u>

a) <u>L'homomorphisme canonique de $k(E)$ dans $\prod_i k(E_i)$ défini par les restrictions ρ_{E,E_i} est un isomorphisme ; l'algèbre $k(E_i)$ est un corps, extension de type fini de k .</u>

b) <u>Supposons E affine et soit F un fermé de E ; si A est l'algèbre des fonctions régulières sur E , $\underline{a}$ l'idéal de A formé des fonctions nulles</u>

sur F , $\underline{p}_i$ *les idéaux premiers minimaux de* (0) *et* $\underline{q}_j$ *les idéaux premiers minimaux de* $\underline{a}$, *l'injection de* A *dans* $k(E)$ *se prolonge en un isomorphisme de* $A[S^{-1}]$ *sur* $k(E)$ *si* $S = (\bigcap_i \complement\, \underline{p}_i) \cap (\bigcap_j \complement\, q_j)$.

Déterminons d'abord la structure de $k(E)$ lorsque E est affine ; soit $T = \bigcap_i \complement\, \underline{p}_i$. Comme $\underline{p}_i$ est l'idéal des fonctions nulles sur E_i , les $f \in T$ sont les fonctions ne s'annulant sur aucun E_i , donc telles que l'ouvert $V(f)$ des $x \in E$ tels que $f(x) \neq \emptyset$ soit partout dense (lemme 2). L'ensemble des non diviseurs de 0 dans A est aussi égal à T ; en effet, si l'on a $fg = 0$, on a $V(f) \cap V(g) = \emptyset$ et $V(f)$ n'est pas partout dense, mais si $V(f)$ est partout dense et si $g \neq 0$, on a $V(g) \neq \emptyset$ donc $V(fg) = V(f) \cap V(g) \neq \emptyset$ et $fg \neq 0$. Si $f \in T$, la fonction f^{-1} est définie sur l'ouvert partout dense $V(f)$ et définit une fonction rationnelle, inverse de f dans $k(E)$; l'injection de A dans $k(E)$ se prolonge donc en une injection de $A[T^{-1}]$ dans $k(E)$. De plus si $f \in k(E)$, l'ouvert partout dense $D(f)$ contient un ouvert de la forme $V(g)$ $(g \in T)$ et par suite on a $f = h/g^m$ $(h \in A$, m entier $\geqslant 0)$ sur $V(g)$, ce qui prouve que f appartient à l'image de $A[T^{-1}]$. On a donc identifié $A[T^{-1}]$ et $k(E)$.

Soit $f \in k(E)$; pour que $V(g) \subset D(f)$ pour $g \in A$, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $fg^m \in A$; comme $V(g) = V(g^m)$, le complémentaire de $D(f)$ est l'ensemble des points où s'annulent tous les $g \in A$ tels que $fg \in A$. Ces g forment un idéal $\underline{b}$. Pour que $D(f) \cap F$ soit dense dans F , il faut et il suffit que $D(f)$ rencontre chacune des composantes irréductibles F_j de F , ou encore que $\complement D(f)$ ne contienne aucune des F_j , ce qui signifie que $\underline{b}$ n'est contenu dans aucun des $\underline{q}_j$. Comme $\underline{b}$ rencontre T , il n'est contenu dans aucun des $\underline{p}_i$. Or on a le lemme :

LEMME 4.- Soient A *un anneau commutatif,* $\underline{a}$ *un idéal de* A *et* $\underline{p}_i$ *des idéaux premiers de* A *en nombre fini. Pour que* $\underline{a}$ *ne soit contenu dans aucun des* $\underline{p}_i$, *il faut et il suffit qu'il existe un* $a \in \underline{a}$ *qui n'appartienne à aucun des* $\underline{p}_i$.

La condition est manifestement suffisante. Inversement supposons que $\underline{a}$ ne soit contenu dans aucun des $\underline{p}_i$ et supposons, ce qui est licite, que

$\underline{p}_i \not\subset \underline{p}_j$ si $i \neq j$. Soit $a_i \in \underline{a}$, $a_i \notin \underline{p}_i$ et $s_{ij} \notin \underline{p}_i$ mais $s_{ij} \in \underline{p}_j$ $(i \neq j)$ l'élément $s_i = \prod_{j \neq i} s_{ij}$ n'est pas dans $\underline{p}_i$ mais appartient à $\underline{p}_j$ pour $j \neq i$. Formons alors $a = \sum_i s_i a_i \in \underline{a}$; pour i fixé, on a $a_i s_i \notin \underline{p}_i$, mais $a_j s_j \in \underline{p}_i$ pour $j \neq i$ et donc $a \notin \underline{p}_i$.

Le lemme 4 montre donc que pour que f induise une fonction rationnelle sur F, il faut et il suffit que $\underline{b}$ rencontre T, ce qui démontre l'assertion b).

Démontrons l'assertion a) ; soit U_i un ouvert affine non vide ne rencontrant aucune des composantes E_j pour $j \neq i$ et soit U la réunion des U_i. Comme les U_i sont disjoints, il résulte de l'axiome (SL2) que les fonctions régulières définies sur un ouvert V de U sont les fonctions régulières sur $V \cap U_i$ pour chaque i ; il en résulte que l'application $k(U) \to \prod_i k(U_i)$ est bijective. Comme U est partout dense dans E et U_i partout dense dans E_i, les flèches horizontales du diagramme commutatif suivant représentent des isomorphismes, d'où découle le fait que $k(E) \to \prod_i k(E_i)$ est un isomorphisme ;

$$\begin{array}{ccc} k(E) & \longrightarrow & k(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i k(E_i) & \longrightarrow & \prod_i k(U_i) \end{array}$$

Enfin $k(U_i)$ est le corps des fractions de $\underline{o}^E(U_i)$ donc est une extension de type fini de k, et il en est de même de $k(E_i)$ qui lui est isomorphe.

C.Q.F.D.

<u>COROLLAIRE 1.- Si</u> E <u>est un ensemble algébrique affine, l'algèbre</u> $k(E)$ <u>des fonctions rationnelles sur</u> E <u>est isomorphe à l'anneau total des fractions de</u> $\underline{o}^E(E)$.

On rappelle que l'anneau <u>total</u> des fractions d'un anneau commutatif A est l'anneau $A[S^{-1}]$ où S est l'ensemble des non diviseurs de 0 dans A.

<u>COROLLAIRE 2.- Soient</u> E_1 <u>et</u> E_2 <u>deux ensembles algébriques,</u> k' <u>un sous-corps de</u> K <u>contenant</u> k. <u>Soient respectivement</u> $\underline{a}$ <u>et</u> $\underline{b}$ <u>les idéaux des éléments nilpotents de</u> $k(E_1) \otimes k(E_2)$ <u>et</u> $k(E_1) \otimes_k k'$. <u>L'algèbre des fonctions rationnelles sur</u> $E_1 \times E_2$ (resp. $E_1^{k'}$) <u>est canoniquement isomorphe à l'anneau total des fractions de</u> $(k(E_1) \otimes k(E_2))/\underline{a}$ (resp. $(k(E_1) \otimes k')/\underline{b}$).

On se ramène immédiatement au cas où E_1 et E_2 sont affines (cf lemme 2)

Si $A_i = \underline{o}^{E_i}(E_i)$, l'algèbre des fonctions régulières sur $E_1 \times E_2$ (resp. $E_1^{k'}$) est isomorphe à $(A_1 \otimes A_2) / \underline{a}_o$ (resp. $A_1 \otimes k'/\underline{b}_o$) , $\underline{a}_o$ (resp. $\underline{b}_o$) étant l'idéal des éléments nilpotents de $A_1 \otimes A_2$ (resp. $A_1 \otimes k'$) . Il est clair que si l'on plonge $A_1 \otimes A_2$ (resp. $A_1 \otimes k'$) dans $k(E_1) \otimes k(E_2)$ (resp. $k(E_1) \otimes k'$), l'idéal $\underline{a}$ (resp. $\underline{b}$) est engendré par $\underline{a}_o$ (resp. $\underline{b}_o$) . Le corollaire 2 résulte alors immédiatement du corollaire 1.

<u>COROLLAIRE 3</u>.- <u>Pour qu'un ensemble algébrique</u> E <u>soit irréductible</u> (resp. absolument irréductible) <u>il faut et il suffit que</u> $k(E)$ <u>soit un corps</u> (resp. un corps extension primaire de k). <u>Pour que l'algèbre semi-simple</u> $k(E)$ <u>soit absolument semi-simple, il faut et il suffit que pour tout ouvert</u> U <u>de</u> E , <u>toute famille</u> $f_i \in \underline{o}^E(U)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ <u>linéairement indépendante sur</u> k <u>soit linéairement indépendante sur</u> K .

La première assertion résulte de la proposition 5, a). Pour que E soit absolument irréductible, i.e. pour que E^K soit irréductible, il faut et il suffit que le quotient de $k(E) \otimes K$ par l'idéal de ses éléments nilpotents soit intègre. Comme K est algébriquement clos, il résulte du théorème 1 de l'exposé 14 du Séminaire CARTAN 1955/56 que ceci signifie que $k(E)$ est extension primaire de k . Enfin en vertu du lemme 3, l'assertion que pour tout ouvert U de E , l'algèbre $\underline{o}^E(U)$ est linéairement disjointe de l'algèbre des constantes à valeurs dans K équivaut à la même assertion pour les ouverts affines. Ceci signifie que pour tout ouvert affine U , l'algèbre $\underline{o}^E(U) \otimes K$ est sans élément nilpotent, donc que $k(U) \otimes K$ est sans élément nilpotent. Comme les composantes irréductibles de U sont les $U \cap E_i$ non vides (les E_i étant les composantes irréductibles de E) , $k(U)$ est isomorphe au produit des $k(E_i)$ pour les i tels que $U \cap E_i$ soit non vide. L'assertion de linéaire disjonction signifie donc que $k(E_i) \otimes K$ est sans élément nilpotent, donc sans radical (Séminaire CARTAN 1955/56, exposé 13, théorème 3) ou encore que $k(E_i)$ est extension séparable de k (ceci pour tout i) .

<u>DÉFINITION 2</u>.- <u>On appelle variété algébrique un ensemble algébrique absolument irréductible, dans lequel, pour tout ouvert</u> U , <u>l'algèbre</u> $\underline{o}^E(U)$ <u>des fonctions régulières sur</u> U <u>est linéairement disjointe sur</u> k <u>de l'algèbre des constantes à valeurs dans</u> K .

Dire qu'un ensemble algébrique E est une variété signifie donc que l'extension $k(E)$ est primaire et séparable, i.e. <u>régulière</u>.

COROLLAIRE 4.- Soient E_1 une variété et E_2 un ensemble algébrique ; si E_2 est irréductible (resp. absolument irréductible, resp. une variété), alors $E_1 \times E_2$ est irréductible (resp. absolument irréductible, resp. une variété).

Cela résulte du corollaire 3 et des propriétés du produit tensoriel d'une extension avec une extension régulière.

COROLLAIRE 5.- Soient E un ensemble algébrique et F un fermé de E. S'il existe un ouvert affine U de E tel que $U \cap F$ soit dense dans F, toute fonction rationnelle sur F est la trace d'une fonction rationnelle sur E.

Soit f une fonction rationnelle sur F ; on peut écrire $f = g/h$ où h est régulière sur $F \cap U$ et où g est régulière sur l'ouvert partout dense $V(h)$ de $F \cap U$. Comme U est affine, il existe une fonction régulière h' sur U qui induit h sur $F \cap U$ et comme l'ouvert $V(h')$ de U est affine, il existe une fonction régulière g' sur $V(h')$ induisant g sur $V(h)$. La fonction g'/h', régulière sur l'ouvert $V(h')$, induit alors f sur $V(h)$ et se prolonge par ailleurs d'après le lemme 1 en une fonction rationnelle sur E.

REMARQUE.- Le corollaire 5 s'applique lorsque E est affine, ou lorsque F est irréductible, car il y a au moins un ouvert affine rencontrant F. On peut montrer qu'il en est de même lorsque E est projectif, mais la variété non projective de NAGATA met le corollaire 5 en défaut dans le cas général.

5.- Schémas.

Soient L un anneau commutatif dans lequel tout non diviseur de 0 est inversible et soit A un sous-anneau de L ; si $\underline{p}$ est un idéal premier de A, on désignera par $A_{\underline{p}}$ le sous-anneau de L formé des as^{-1} avec $a \in A$ et $s \in A \cap \complement \underline{p}$, s non diviseur de zéro.

DÉFINITION 3.- Soient L une algèbre demi-simple commutative sur le corps k. On appelle algèbre affine de L toute sous-algèbre A de type fini de L telle que tout élément de L soit de la forme ab^{-1} avec $a, b \in A$.
Un couple $(M, \underline{m})$ formé d'un sous-algèbre M de L et d'unidéal $\underline{m}$ de M est appelé une localité de L s'il existe une algèbre affine A et un idéal

premier $\underline{p}$ de A tel que $M = A_{\underline{p}}$ et $\underline{m} = \underline{p} A_{\underline{p}}$. Deux localités $(M_i, \underline{m}_i)$ $(i = 1, 2)$ sont dites apparentées si l'idéal $\underline{m}$ engendré par $\underline{m}_1$ et $\underline{m}_2$ dans l'anneau M engendré par M_1 et M_2 est distinct de M.

Lorsque L est un corps, ces définitions sont en accord avec les définitions de CHEVALLEY (Séminaire CARTAN 1955/56, exposé 5). Nous allons étendre au cas qui nous intéresse des lemmes valables lorsque L est un corps.

LEMME 5.- Si $(M, \underline{m})$ est une localité de la forme $(A_{\underline{p}}, \underline{p} A_{\underline{p}})$, l'idéal $\underline{m}$ de M est maximal et $\underline{m} \cap A = \underline{p}$. De plus $M/\underline{m}$ est canoniquement isomorphe au corps des fractions de $A/\underline{p}$. Comme L n'a pas d'élément nilpotent, on peut identifier A à l'algèbre des fonctions régulières sur Ω_A et $\underline{p}$ à l'idéal des fonctions régulières nulles sur un sous-ensemble fermé irréductible F de Ω_A. Le corollaire du théorème 1 montre que l'on peut identifier L et l'algèbre des fonctions rationnelles sur Ω_A, moyennant quoi M est l'ensemble des fonctions rationnelles ayant une trace sur F d'après la proposition 5, b). Pour que $f = ab^{-1}$ $(a, b \in A, \ b \notin \underline{p})$ ait une trace nulle sur F, il faut et suffit qu'elle soit nulle sur $F \cap V(b)$ donc que a soit nulle sur $F \cap V(b)$ donc sur F par raison de continuité. Ceci signifie que $a \in \underline{p}$, donc que $\underline{m}$ est le noyau de l'opération de restriction. Il en résulte que $\underline{m} \cap A = \underline{p}$, puis que $M/\underline{m}$ est isomorphe à $k(F)$, i.e. au corps des fractions de $A/\underline{p}$, donc est un corps (cf. corollaire 5 du théorème 1).

LEMME 6.- Pour que deux localités $(M_i, \underline{m}_i) = (A_{\underline{p}_i}, \underline{p}_i A_{\underline{p}_i})$ soient apparentées, il faut et il suffit qu'il existe un idéal premier $\underline{q}$ de l'anneau A engendré par A_1 et A_2 tel que $\underline{q} \cap A_i = \underline{p}_i$.

Soit M l'anneau engendré par M_1 et M_2. Si nos deux localités sont apparentées, il existe un idéal premier $\underline{r}$ de M contenant $\underline{m}_1$ et $\underline{m}_2$. Comme $\underline{m}_i$ est maximal et $\underline{r} \neq M$, on a $\underline{r} \cap M_i = \underline{m}_i$ d'où $(\underline{r} \cap A) \cap A_i = \underline{r} \cap A_i =$
$= (\underline{r} \cap M_i) \cap A_i = \underline{p}_i$ et l'idéal $\underline{q} = \underline{r} \cap A$ convient.

Réciproquement, s'il existe un idéal premier $\underline{q}$ de A tel que $\underline{q} \cap A_i = \underline{p}_i$. soit $\underline{r}$ l'idéal engendré par $\underline{q}$ dans M. Les éléments de M sont de la forme $a(s_1 s_2)^{-1}$ avec $s_i \in A_i \cap \complement \underline{p}_i$ puisque ces éléments forment un anneau contenant M_1 et M_2 et qu'ils sont de la forme $m_1 m_2$ avec $m_i \in M_i$.

Si l'on avait $\underline{r} = M$, on aurait $1 \in \underline{r}$ d'où $s_1 s_2 \in \underline{q}$; mais comme $q \cap A_i = \underline{p}_i$, on a $s_i \notin \underline{q}$ d'où $s_1 s_2 \notin \underline{q}$, ce qui est une contradiction.

C.Q.F.D.

On notera que si $A_1 = A_2$, les deux localités en question ne peuvent être apparentées que si $\underline{p}_1 = \underline{p}_2$ donc que si elles sont égales.

Nous pouvons maintenant étendre à notre cas la définition par CHEVALLEY des schémas.

DÉFINITION 4.- Soit L une algèbre commutative semi-simple sur le corps k On appelle schéma affine $S(A)$ de l'algèbre affine A de L l'ensemble des localités $(A_{\underline{p}}, \underline{p}A_{\underline{p}})$ pour tous les idéaux premiers $\underline{p}$ de A . Un ensemble S de localités de L est appelé un schéma de L s'il vérifie les deux conditions suivantes :

a) S est réunion d'un nombre fini de schémas affines.

b) Deux localités distinctes de S ne sont pas apparentées.

Le lemme 6 montre que deux localités distinctes d'un schéma affine ne sont pas apparentées, donc qu'un schéma affine est bien un schéma.

LEMME 7.- Soient A une algèbre affine de L et S un schéma de L contenant $S(A)$; les éléments de $S(A)$ sont les localités $(M, \underline{m}) \in S$ telles que $M \supset A$.

Si $(M,\underline{m}) \in S(A)$, on a évidemment $M \supset A$. Inversement, si $M \supset A$ et si $\underline{p} = \underline{m} \cap A$, on a $M \supset A_{\underline{p}}$ car tout élément non diviseur de 0 dans M qui n'est pas dans $\underline{m}$ est inversible dans M ; on a par suite $\underline{m} \supset \underline{p} A_{\underline{p}}$, ce qui montre que les localités $(M, \underline{m})$ et $(A_{\underline{p}}, \underline{p} A_{\underline{p}})$ du schéma S sont apparentées donc égales.

Avant de faire le lien entre les ensembles algébriques et les schémas, nous allons montrer que la structure d'un ensemble algébrique est entièrement déterminée par les fonctions rationnelles. De manière précise, on définit une structure sur un ensemble E en se donnant un ensemble d'applications de parties de E à valeurs dans K . Nous allons d'abord montrer comment l'on peut reconstituer la topologie et le système local $\underline{o}^E$ à partir de l'ensemble des fonctions rationnelles de E .

PROPOSITION 6.- Soit E un ensemble algébrique ; pour $f \in k(E)$, on note

$D_o(f)$ l'ensemble des points où f est définie et non nulle. L'ensemble des ouverts de E est engendré par les ouverts de la forme $D(f)$ ou $D_o(f)$; lorsque E est irréductible, il est même engendré par les ensembles $D(f)$. Si U est un ouvert de E, l'ensemble $\underline{o}^E(U)$ est formé des restrictions à U des $f \in k(E)$ tels que $U \subset D(f)$.

La dernière assertion résulte évidemment du lemme 2 ; de plus, si E est irréductible, et si $f \in k(E)$ est $\neq 0$, $f^{-1} \in k(E)$ et il est clair que $D_o(f) = D(f) \cap D(f^{-1})$.

Soit U un ouvert affine partout dense de E et soient f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des fonctions rationnelles dont les restrictions à U engendrent l'algèbre $\underline{o}^E(U)$. On va montrer que $U = \bigcap_{i=1}^{n} D(f_i)$; soit $f \in k(E)$ telle que $D(f) \supset U$; il existe donc un polynome P à n variables tel que $f|U = P(f_1|U,\ldots,f_n|U)$ donc $f = P(f_1,\ldots,f_n)$ puisque U est partout dense. Si $U' = \bigcap_{i=1}^{n} D(f_i)$, on a donc $D(f) \supset U'$. Il résulte de ce que l'on a dit que toute fonction de $\underline{o}^E(U)$ est la restriction d'une fonction unique de $\underline{o}^E(U')$. Supposons $U \neq U'$ et soit $x' \in U' \cap \complement U$; l'application $f \to f(x')$ de $\underline{o}^E(U')$ dans K étant un homomorphisme, comme U est affine, il existe $x \in U$ tel que $f(x') = f(x)$ pour tout $f \in \underline{o}^E(U')$. Soit V un ouvert affine contenant x' ; l'ensemble des fonctions régulières sur $V \times U$ est formé des fonctions $h(z\ ,\ z') = \sum_j f_j(z)g_j(z')$ avec $f_j \in \underline{o}^E(V)$ et $g_j \in \underline{o}^E(U')$. Pour tirer une contradiction de l'hypothèse $U \neq U'$, on remarque que $x \neq x'$ puisque $x' \notin U$ et $x \in U$ et l'on va montrer que toute fonction régulière sur $V \times U$ nulle sur $\Delta_E \cap (V \times U)$ est nulle en (x',x) contrairement à la proposition 7 de l'exposé 1. Or de $h(y\ ,\ y) = 0$ pour $y \in V \cap U$, on déduit la même égalité pour $y \in V$ puisque $V \cap U$ est dense dans V et que $\underline{o}^E(U') \subset \underline{o}^E(V)$ (à un abus de langage près), d'où $h(x'\ ,\ x') = 0$ soit $\sum_j f_j(x')g_j(x') = 0$; mais comme $g_j(x') = g_j(x)$, on en déduit $h(x'\ ,\ x) = 0$.

E est réunion finie d'ouverts affines partout denses V_i (lemme 3) ; de plus tout ouvert de V_i est réunion d'ensembles ouverts formés de points où ne s'annule pas $f \in \underline{o}^E(V_i)$, i.e. de la forme $V_i \cap D_o(f)$. Ceci achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le théorème fondamental de cet exposé.

THÉORÈME 2.

a) Soit E un ensemble algébrique. L'ensemble des couples $M(F) = (\underline{o}(E, F), \underline{p}(E, F))$ pour tous les fermés irréductibles F de E est un schéma $\mathcal{S}(F)$ de $k(E)$. ($\mathfrak{p}(E,F)$ désignant le noyau de $\rho_{E,F}$)

b) Soit S un schéma d'une algèbre L et soit $\mathcal{V}(S)$ l'ensemble des triples $(M, \underline{m}, \chi)$ où $(M, \underline{m}) \in S$ et χ est un homomorphisme de M dans K nul sur l'idéal $\underline{m}$. Si $f \in L$, on pose $\hat{f}(x) = \chi(f)$ pour les $x = (M, \underline{m}, \chi) \in \mathcal{V}(S)$ tels que $f \in M$; les fonctions $\hat{f}$ sont les fonctions rationnelles pour une structure d'ensemble algébrique bien déterminée sur $\mathcal{V}(S)$.

c) Pour $x \in E$, soit χ_x l'application $f \to f(x)$ de $\underline{o}(E, \{\overline{x}\})$ dans K. L'application $x \to (o(E, \{\overline{x}\}), p(E, \{\overline{x}\}), \chi_x)$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{V}(\mathcal{S}(E))$ et l'application $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme de L sur $k(\mathcal{V}(S))$ qui applique S sur $\mathcal{S}(\mathcal{V}(S))$.

Montrons que $\mathcal{S}(E)$ est un schéma de $k(E)$; soit d'abord U un ouvert affine partout dense de E et $A = \underline{o}^E(U)$. Le corollaire 1 du théorème 1, montre que A est une algèbre affine de $k(E)$ et comme les ensembles irréductibles fermés F rencontrant U sont en correspondance avec les idéaux premiers $\underline{p}$ de A, le théorème 1, b) montre que les $(\underline{o}(E, F), \underline{p}(E, F))$ pour $F \cap U \neq \emptyset$ forment le schéma de l'algèbre affine A. Comme E est réunion finie d'ouverts affines partout denses, $\mathcal{S}(E)$ est réunion finie de schémas affines.

Soient F_i $(i = 1, 2)$ deux ensembles irréductibles fermés de E et soit U_i un ouvert affine partout dense rencontrant F_i. Soit $D \subset U_1 \times U_2$, l'ensemble des (x, x) avec $x \in U_1 \cap U_2$; si $A_i = \underline{o}^E(U_i)$, on définit un isomorphisme de l'anneau A engendré par A_1 et A_2 dans $k(E)$ sur l'algèbre des fonctions régulières sur D en faisant correspondre à $\sum_j f_j g_j$ la fonction $(x, x) \to \sum_j f_j(x) g_j(x)$. Si $M(F_1)$ et $M(F_2)$ sont apparentées, en traduisant le lemme 6 en termes géométriques, on trouve un fermé irréductible non vide F de D se projetant en $F_i \subset U_1 \cap U_2$ sur le facteur U_i de $U_1 \times U_2$. Ceci montre que F_1 et F_2 coupent $U_1 \cap U_2$ selon le même ensemble non vide, donc sont égaux puisque fermés et irréductibles. On a prouvé que $\mathcal{S}(E)$ satisfait à la condition b) de la définition 4.

Soit A une algèbre affine de L dont le schéma $S(A))$ soit contenu dans S et soit $U = \mathcal{V}(S(A)) \subset \mathcal{V}(S)$. Si à $x = (A_{\underline{p}}, \underline{p}A_{\underline{p}}, \chi) \in U$, on associe l'homomorphisme $\varphi(x)$ de A dans K obtenu par restriction de χ à A, on obtient une application φ de U dans Ω_A. L'application φ est injective car $\underline{p}$ est le noyau de $\varphi(x)$ (lemme 5) et l'on a $\chi(ab^{-1}) = \varphi(x)(a)(\varphi(x)(b))^{-1}$ pour $a, b \in A$ et $b \notin \underline{p}$; elle est surjective, car si χ est un homomorphisme de A dans K, il se prolonge à $A_{\underline{p}}$ ($\underline{p}$ étant le noyau de χ) par la formule $\chi(ab^{-1}) = \chi(a)\ \chi(b)^{-1}$ pour $a, b \in A$ et $\chi(b) \neq 0$. Si $D(f)$ désigne $f \in L$ l'ensemble des $(M, \underline{m}, \chi) \in \mathcal{V}(S)$ tels que $f \in M$, on va montrer que $\varphi(U \cap D(f))$ est un ouvert partout dense de Ω_A. En effet soit $\underline{a}$ l'idéal de A formé des $g \in A$ tels que $fg \in A$; comme A est une algèbre affine, $\underline{a}$ contient un non diviseur de 0 dans A. Si $\underline{p}$ est un idéal premier de A, pour que $f \in A_{\underline{p}}$, il faut et suffit que $\underline{a}$ contienne un élément $g \in \underline{p}$ non diviseur de 0, soit d'après le lemme 4 que $\underline{a} \not\subset \underline{p}$. Il en résulte en particulier que $\varphi(U \cap D(f))$ est le complémentaire dans Ω_A de l'ensemble fermé $F(\underline{a})$ et c'est un ouvert partout dense puisqu'il contient l'ouvert $V(g)$ si $g \in \underline{a}$ n'est pas diviseur de 0.

Le lemme 7 et le fait que toute algèbre affine de L est de type fini montre que si A' est une algèbre affine de schéma $S(A')$ et si $U' = \mathcal{V}(S(A'))$, l'ensemble $\varphi(U \cap U')$ est intersection finie d'ouverts de Ω_A de la forme $\varphi(U \cap D(f))$ avec $f \in L$ donc est un ouvert partout dense de Ω_A.

Si $x = (M, \underline{m}, \chi) \in U \cap U'$, M contient l'anneau $k[A, A']$ engendré dans L par A et A' et χ induit un homomorphisme de $k[A, B]$ dans K ; il en résulte que si φ' est l'application de U' dans $\Omega_{A'}$, définie comme φ, pour tous les systèmes $f_i \in A$, $f'_i \in A'$ tels que $\sum f_i f'_i = 0$, la fonction $(z, z') \to \sum_i f_i(z) f_i(z')$ de $\Omega_A \times \Omega_{A'}$ dans K est nulle au point $(\varphi(x), \varphi'(x))$ pour $x \in U \cap U'$; inversement, si toutes les fonctions en question s'annulent au point (z, z'), il existe un homomorphisme de $k[A, A']$ dans K qui induit z sur A et z' sur A' ; il existe alors un idéal premier $\underline{q}$ de $k[A, A']$ tel que $\underline{p} = \underline{q} \cap A$ (resp. $\underline{p}' = \underline{q} \cap A'$) soit le noyau de z (resp. z') et (lemme 6) les localités $(A_{\underline{p}}, \underline{p} A_{\underline{p}})$ et $(A'_{\underline{p}'}, \underline{p}' A'_{\underline{p}'})$ sont apparentées donc égales, ce qui prouve qu'il existe $x \in U \cap U'$ tel que $(z, z') = (\varphi(x), \varphi'(x))$.

La proposition 4 démontre alors l'existence d'une structure d'ensemble algébrique et d'une seule sur $\mathcal{V}(S)$ pour laquelle les applications canoniques $\mathcal{V}(S(A)) \to \Omega_A$ soient des cartes pour toute algèbre affine A. De plus comme dans les notations précédentes $\varphi(U \cap U')$ est dense dans Ω_A, $\mathcal{V}(S(A))$ est dense dans $\mathcal{V}(S)$.

Le corollaire 1 du théorème 1 démontre que l'application $f \to \hat{f}$ de A dans l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathcal{V}(S(A))$ se prolonge en un isomorphisme r de L sur $k(\mathcal{V}(S(A)))$. Le théorème 1, b) montre aussi que si F est le fermé irréductible associé à l'idéal premier $\underline{p}$ de A, la localité $(A_{\underline{p}}, \underline{p}\, A_{\underline{p}})$ est appliquée par r sur la localité $M(F)$ de $k(\mathcal{V}(S(A)))$. En particulier si F est l'adhérence du point $x \in \mathcal{V}(S(A))$, ceci montre que $x \in D(f)$ équivaut à " x appartient au domaine de définition de $r(f)$ ", donc l'application r est $f \to \hat{f}$ pour $f \in L$. Comme $\mathcal{V}(S)$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts partout denses $\mathcal{V}(S(A_i))$, on voit de suite que l'application $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme de L sur $k(\mathcal{V}(S))$ qui applique S sur le schéma de $\mathcal{V}(S)$.

Enfin lorsque U est un ouvert affine de E d'algèbre $A = \underline{o}^E(U)$, on voit tout de suite que l'application $x \to (M(x), \chi_x)$ est un isomorphisme de U sur $\mathcal{V}(S(A))$, et l'on déduit immédiatement de là la première assertion de c).

C.Q.F.D.

6.- Fonctions sur un produit d'ensembles algébriques.

Le résultat qu'on va démontrer est un lemme pour un exposé ultérieur. On trouvera dans WEIL, Foundations, corollaire 2 du théorème 10, p. 241, un résultat sensiblement plus fort, mais de démonstration beaucoup plus délicate.

Soit f_i $(i = 1, 2)$ une fonction rationnelle sur l'ensemble algébrique E_i ; il existe une fonction rationnelle bien déterminée $f_1 \times f_2$ sur l'ensemble $E_1 \times E_2$ par la condition :

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \qquad \text{pour} \quad x_i \in D(f_i)$$

PROPOSITION 6.- *Soient E_1 et E_2 deux ensembles algébriques. On suppose que $k(E_1)$ ou $k(E_2)$ est une algèbre absolument semi-simple. Il existe un homomorphisme unique φ de $k(E_1) \otimes k(E_2)$ dans $k(E_1 \times E_2)$ tel que $\varphi(f_1 \otimes f_2) = f_1 \times f_2$; φ est injectif. De plus si U_i est un ouvert partout dense de E_i $(i = 1, 2)$, φ définit un isomorphisme de*

$\underline{o}^{E_1}(U_1) \otimes \underline{o}^{E_2}(U_2)$ sur $\underline{o}^{E_1 \times E_2}(U_1 \times U_2)$.

Il est clair que $f_1 \times f_2$ dépend bilinéairement de f_1 et f_2 et qu'on a $(f_1 \times f_2)(f_1' \times f_2') = f_1f_1' \times f_2f_2'$, d'où l'existence et l'unicité de φ . Supposons $k(E_1)$ absolument semi-simple et soient $f_{j,1}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ des fonctions rationnelles linéairement indépendantes sur $\bar{K}$, donc aussi sur K (corollaire 3 du théorème 1). Soient de plus des fonctions $f_{j,2}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ rationnelles sur E_2 telles que $\sum_{j=1}^{m} f_{j,1} \times f_{j,2} = 0$. On peut supposer les fonctions $f_{j,i}$ définies sur un ouvert partout dense U_i' de E_i $(i = 1, 2)$; on aura alors $\sum_{j=1}^{m} f_{j,1}(x_1)f_{j,2}(x_2) = 0$ pour tout $x_i \in U_i'$. Pour x_2 fixé, ceci est une relation linéaire à coefficients dans K entre les $f_{j,1}$; d'après l'hypothèse faite, on a donc $f_{j,2}(x_2) = 0$ pour $x_2 \in U_2'$ donc $f_{j,2} = 0$. Ceci montre que φ est injectif. On peut donc identifier $k(E_1) \otimes k(E_2)$ à son image par φ .

Soit g une fonction rationnelle sur $E_1 \times E_2$ dont le domaine de définition dontient l'ouvert $U_1 \times U_2$ et soit $V_i \subset U_i$ un ouvert affine partout dense de E_i $(i = 1, 2)$. Comme g induit une fonction régulière sur le produit des ensembles affines V_1 et V_2 , il existe des fonctions rationnelles $f_{j,i}$ sur E_i dont le domaine de définition contient V_i telles que $g|V_1 \times V_2 = (\sum_{j=1}^{m} f_{j,1} \times f_{j,2})|V_1 \times V_2$, donc $g = \sum_j f_{j,1} \times f_{j,2}$; autrement dit $g \in \underline{o}^{E_1}(V_1) \otimes \underline{o}^{E_2}(V_2)$. Mais on a $\underline{o}^{E_i}(U_i) = \bigcap_{V_i \subset U_i} \underline{o}^{E_i}(V_i)$ et la proposition résultera du lemme suivant (utile dans d'autres contextes !)

<u>LEMME 8</u>.- <u>Soient</u> P <u>et</u> Q <u>deux espaces vectoriels sur le corps</u> k , P_α <u>et</u> Q_β <u>des familles de sous-espaces de</u> P <u>et</u> Q <u>respectivement. On a</u> :

$$(1) \qquad (\bigcap_\alpha P_\alpha) \otimes (\bigcap_\beta Q_\beta) = \bigcap_{\alpha,\beta} (P_\alpha \otimes Q_\beta)$$

Supposons d'abord tous les Q_β égaux à un même sous-espace Q' de Q et soit (y_i) une base de Q' . Les éléments de $P \otimes Q'$ s'écrivent de manière unique sous la forme $\sum_i x_i \otimes y_i$ avec $x_i \in P$; pour qu'un tel élément soit dans $P_\alpha \otimes Q$, il faut et suffit que $x_i \in P_\alpha$ pour tout i , d'où la formule :

(2) $$(\bigcap_{\alpha} P_{\alpha}) \otimes Q' = \bigcap_{\alpha} (P_{\alpha} \otimes Q')$$

On en déduit :

$$\bigcap_{\alpha,\beta} (P_{\alpha} \otimes Q_{\beta}) = \bigcap_{\beta} (\bigcap_{\alpha} (P_{\alpha} \otimes Q_{\beta})) = \bigcap_{\beta} ((\bigcap_{\alpha} P_{\alpha}) \otimes Q_{\beta}) = (\bigcap_{\alpha} P_{\alpha}) \otimes (\bigcap_{\beta} Q_{\beta}) .$$

C.Q.F.D.

Par un raisonnement analogue et même plus simple, on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 6 bis.- *Soit E un ensemble algébrique tel que $k(E)$ soit une algèbre absolument semi-simple et k' un sous-corps de K contenant k. L'homomorphisme φ de $k' \otimes k(E)$ dans $k'(E^{k'})$ qui applique $\lambda \otimes f$ sur λf est injectif. De plus, si U est un ouvert partout dense de E, φ définit un isomorphisme de $k' \otimes \underline{o}^{E}(U)$ sur $\underline{o}^{E^{k'}}(U)$.*

-:-:-:-:-:-:-