M. LAZARD

Groupes semi-simples : structure de B et de G/B

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 13, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A13_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57 Exposé n° 13

-:-:-:-

GROUPES SEMI-SIMPLES : STRUCTURE DE B ET DE G/B.

(Exposé de M. Lazard, le 25.3.57)

1.- Propriétés de certains groupes nilpotents à opérateurs.

Dans tout ce numéro, nous étudierons des groupes discrets à opérateurs (cf. Bourbaki, Algèbre, chapitre I, paragraphe 6) ; le domaine d'opérateurs T fixé une fois pour toutes n'interviendra pas explicitement. Par contre, pour abréger les énoncés, nous conviendrons de dire "sous-groupe" au lieu de "sous-groupe stable", "suite de Jordan-Hölder" au lieu de "suite de Jordan-Hölder en tant que groupe à opérateurs", etc ... Nous dirons qu'un groupe B est produit semi-direct d'une famille de sous-groupes $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ si tout élément de B s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\prod_{i=1}^{n} p_i$, $p_i \in P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

LEMME 1.- *Soit B un groupe nilpotent.*

a) *La suite centrale descendante de B : $B = B_1 \supset \ldots \supset B_i \supset B_{i+1} \supset \ldots \supset B_{c+1} = (e)$ est une suite de sous-groupes dont la longueur est la classe c de B.*

b) *Soit $C \neq B$ un sous-groupe de B ; alors il existe un sous-groupe D de B qui contient strictement C comme sous-groupe distingué.*

c) *Si B est simple (i.e. ne contient pas de sous-groupe distingué propre) B ne contient pas de sous-groupe propre.*

d) *Si B possède une suite de Jordan-Hölder, tout sous-groupe de B figure dans une suite de Jordan-Hölder.*

DÉMONSTRATION. a) Toutes ces propriétés sont bien connues pour les groupes sans opérateurs. Rappelons que B_{i+1} est engendré par les commutateurs $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x \in B$, $y \in B_i$. Comme la suite centrale descendante est complètement invariante (i.e. $f(B_i) \subset B_i$ pour tout endomorphisme f de B), c'est bien une suite de sous-groupes (stables).

b) Soient $C \neq B$ un sous-groupe de B et i le plus grand indice tel que $B_i \not\subset C$. Alors $D = B_i C$ contient strictement C, et C est distingué dans D (passer au quotient modulo B_{i+1}).

c) Si B est simple, il est abélien (sinon B_2 serait un sous-groupe distingué propre), et tout sous-groupe est distingué.

d) Soit $(e) = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = B$ une suite de Jordan-Hölder de B. D'après c) on ne peut intercaler entre H_i et H_{i+1} aucun sous-groupe distinct de H_i et de H_{i+1}. Il résulte alors facilement du théorème de Schreier-Zassenhaus (Bourbaki, ibid.) que si $C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_h$ est une suite strictement croissante de sous-groupes de B telle que C_i soit distingué dans C_{i+1} $(0 \leq i \leq h-1)$, on a $h \leq n$. Partant d'un sous-groupe C quelconque, on déduit de b) et du résultat précédent qu'on peut construire une suite de composition où figure C ; il suffit alors de raffiner cette dernière en une suite de Jordan-Hölder.

DÉFINITION 1.- *Un groupe B sera dit vérifier les conditions (C) si :*

C1) *B est nilpotent.*

C2) *B admet une suite de Jordan-Hölder (H_i) ; notations : $H_0 = (e)$, $H_{i-1} \subset H_i$ pour $1 \leq i \leq n$, $H_n = B$.*

C3) *La suite de Jordan-Hölder (H_i) est clivée par une famille de sous-groupes $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$; autrement dit, pour $1 \leq i \leq n$, $P_i \cap H_{i-1} = (e)$, $P_i H_{i-1} = H_i$.*

C4) *Les quotients H_i/H_{i-1} sont deux à deux non isomorphes.*

PROPOSITION 1.- *Soient B un groupe vérifiant les conditions (C), $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-groupes clivant une suite de Jordan-Hölder (H_i). Alors :*

a) *Toute suite de Jordan-Hölder de B est clivée par les mêmes sous-groupes (P_i), rangés éventuellement dans un ordre différent.*

b) *Tout sous-groupe et tout quotient de B vérifient les conditions (C).*

c) *Tout sous-groupe de B est produit semi-direct des sous-groupes P_i qu'il contient ; plus précisément, si $P_{\alpha(1)}, \dots, P_{\alpha(h)}$ sont tous les sous-groupes distincts P_i contenus dans un sous-groupe C de B, rangés dans un ordre quelconque, tout élément $x \in C$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $x = y_1 y_2 \dots y_h$ avec $y_i \in P_{\alpha(i)}$.*

d) Les sous-groupes P_i sont tous les sous-groupes simples de B.

DÉMONSTRATION. a) Soit $(K_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une suite de Jordan-Hölder de B. Nous savons que ses quotients K_i/K_{i-1} sont isomorphes aux quotients H_j/H_{j-1} de la suite (H_j), rangés dans un ordre convenable. Pour tout indice α $(1 \leqslant \alpha \leqslant n)$, soit $i(\alpha)$ le plus petit indice i tel que $P_\alpha \subset K_i$. Comme P_α est isomorphe à $H_\alpha/H_{\alpha-1}$, P_α n'a pas de sous-groupe propre (lemme 1, c) ; donc $P_\alpha \cap K_{i(\alpha)-1} = (e)$. Comme $K_{i(\alpha)}/K_{i(\alpha)-1}$ n'a pas de sous-groupe propre, $P_\alpha K_{i(\alpha)-1} = K_{i(\alpha)}$. Il en résulte que P_α est isomorphe à $K_{i(\alpha)}/K_{i(\alpha)-1}$; comme les P_α sont deux à deux son isomorphes, l'application $\alpha \longrightarrow i(\alpha)$ est injective, donc bijective puisqu'elle applique l'intervalle fini $[1,n]$ dans lui-même. Autrement dit les P_i clivent la suite (K_i).

b) Il est clair que les conditions (C) sont vérifiées pour tout sous-groupe H_j figurant dans la suite (H_i). De même, si H_j est distingué dans B, B/H_j vérifie les conditions (C). Il suffit alors d'appliquer le lemme 1, d.

c) Si $x \in H_i$ (avec les notations de la définition 1), on démontre sans peine (par récurrence sur i) que $x = y_1 y_2 \ldots y_i$, avec des $y_j \in P_j$ bien déterminés par x ; H_i est donc le produit semi-direct des P_j pour $1 \leqslant j \leqslant i$, i.e. le produit semi-direct des P_j qu'il contient. Cette propriété est vraie pour tout sous-groupe C, car C figure dans une suite de Jordan-Hölder clivée par les P_i. Pour montrer que l'ordre des facteurs P_i peut être choisi arbitrairement, nous pouvons supposer $C = B$. Soient alors $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les sous-groupes P_i rangés dans un ordre quelconque. La propriété cherchée est évidente si B est abélien. Sinon raisonnons par récurrence sur la classe c de B. Soit $I \subset [1,n)$ l'ensemble de tous les indices i tels que $P_i \subset B_c$ (dernier sous-groupe non réduit à l'élément neutre de la suite centrale descendante de B). Si nous passons au quotient modulo B_c, l'hypothèse de récurrence nous montre que les produits $y_1 \ldots y_n$ avec $y_i \in P_i$ et $y_i = e$ pour $i \in I$ constituent un système de représentants de B mod. B_c. Comme B_c est dans le centre de B et que $B_c = \prod_{i \in I} P_i$, il en résulte que $(y_1, \ldots, y_n) \longrightarrow y_1 \ldots y_n$ $(y_i \in P_i)$ est une bijection de $P_1 \times \ldots \times P_n$ sur B.

d) est une conséquebce immédiate de c).

DÉFINITION 2.- Soient B un groupe vérifiant les conditions (C), $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'ensemble de ses sous-groupes simples. Si I est une partie de l'intervalle d'entiers $[1,n]$, nous dirons que I est saturée si le sous-groupe engendré par les $(P_i)_{i \in I}$ ne contient pas d'autre sous-groupe simple ; ce sous-groupe, produit semi-direct des $(P_i)_{i \in I}$, sera noté B_I. Si I est une partie quelconque de $[1,n]$, la plus petite partie saturée contenant I sera dite engendrée par I. (L'intersection d'une famille de parties saturées est évidemment saturée).

PROPOSITION 2.- Soient B un groupe vérifiant les conditions (C), $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ l'ensemble de ses sous-groupes simples.

a) Si $\{I, I'\}$ est une partition de $[1,n]$ en deux parties saturées, B est produit semi-direct de B_I et de $B_{I'}$.

b) Si I et I' sont deux parties saturées de $[1,n]$ telles que B_I et $B_{I'}$, soient conjugués dans B, alors $I = I'$.

c) Pour qu'une partie $I \subset [1,n]$ soit saturée, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante : pour tout couple $i, j \in I$, la plus petite partie saturée contenant i et j est contenue dans I.

DÉMONSTRATION. a) est une conséquence immédiate de la proposition 1, c.

b) Démonstration par récurrence sur la classe c de B (la proposition est évidente si $c = 1$). Considérons les deux sous-groupes $B_I \cap B_c$ et $B_{I'} \cap B_c$ que nous pouvons écrire respectivement B_{I_1} et $B_{I'_1}$, I_1 et I'_1 étant des parties de $[1,n]$. Alors B_{I_1} et $B_{I'_1}$ sont conjugués dans B. Comme ils sont centraux, on a évidemment $I_1 = I'_1$. Considérons maintenant le quotient B/B_c, et appliquons l'hypothèse de récurrence aux images de B_I et de $B_{I'}$: nous en déduisons que $I - I_1 = I - I'_1$ (différences ensemblistes) ; d'où $I = I'$. (Ce résultat ne signifie évidemment pas que tout sous-groupe est distingué, mais que, si C est un sous-groupe de B et $x \in B$, xCx^{-1} n'est un sous-groupe que s'il est égal à C).

c) Supposons les (P_i) ordonnés comme dans la définition 1, ce qui équivaut à supposer les parties $[1,i]$, saturées pour $1 \leqslant i \leqslant n$ (lemme 1,b). Raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Soient α le plus grand élément de I et $I' = I - \{\alpha\}$. Alors, si $i, j \in I'$, le sous-groupe engendré par P_i et P_j ne contient pas P_α, et l'hypothèse de récurrence s'applique donc à I', qui est saturé. Pour montrer que I est saturé, il faut montrer que $P_\alpha B_{I'}$ est un sous-groupe. Il suffit donc de montrer que $P_i P_\alpha \subset P_\alpha P_{I'}$ pour tout $i \in I$; or c'est un cas particulier de l'hypothèse.

Signalons pour conclure un résultat qui servira peut-être : tout sous-groupe propre maximal est distingué, et le quotient est abélien. On en déduit qu'il existe une famille minima de P_i qui engendre B : elle est constituée par tous les P_i qui ne sont pas contenus dans le groupe dérivé B_2 de B.

2.- Structure du groupe B^u.

Dans ce numéro, nous notons G un groupe algébrique connexe semi-simple, T un tore maximal, B un groupe de Borel contenant T, B^u la partie unipotente de B.

THÉORÈME 1.- a) Si l'on fait opérer par automorphismes intérieurs les éléments de T sur B^u, le groupe à opérateurs B^u vérifie les conditions (C) de la définition 1.

b) Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des racines α associées à T qui sont négatives sur la chambre de Weyl associée à B. Les sous-groupes stables minimaux de B^u sont les intersections $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{B}}$ de B^u avec les centralisateurs Z_α des tores singuliers $Q_\alpha \subset T$ de codim 1 (correspondant respectivement aux racines α).

c) Si P_α est identifié à K par l'isomorphisme $\tau_\alpha : K \to P_\alpha$, on a $t\tau_\alpha(\xi)t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\xi)$ pour $\alpha\in\mathcal{B}$, $\xi\in K$, $t\in T$.

d) Tout sous-groupe de B^u normalisé par T est fermé. C'est le produit semi-direct des P_α qu'il contient.

DÉMONSTRATION. Appliquons le lemme 2 de l'exposé 9 (en y remplaçant G par B). Nous en déduisons l'existence d'une suite de composition $(H_i)_{0\leq i\leq n}$ de B^u, où les sous-groupes H_i sont tous normalisés par T. Pour tout i $(1\leq i\leq n)$ H_i/H_{i-1} est isomorphe à K ; H_i est engendré par H_{i-1} et par des éléments du centralisateur Z_i d'un tore $Q_i\subset T$ de codim ≤ 1.

Les tores Q_i sont des tores singuliers de codim 1. Sinon, d'après le théorème 2,b de l'exposé 12, l'un des Z_i serait égal à T et l'on aurait $H_{i-1} = H_i$.

D'après l'exposé 12 (proposition 2 et corollaire au théorème 1) nous savons que $B^u\cap Z_i = P_i$ est isomorphe à K. Si $\tau_i : K\to P_i$ est un isomorphisme de K sur P, nous avons, pour $\xi\in K$ et $t\in T$, $t\tau_i(\xi)t^{-1} = \tau_i(\alpha_i(t)\xi)$, où α_i est la racine associée à T, Q_i et B (exposé 12, définition 1). Comme α_i n'est pas nul, $\alpha_i(t)$ prend toutes les valeurs de K^*, et P_i

est simple en tant que sous-groupe à opérateurs. On en déduit que $P_i \cap H_{i-1} =$ $= (e)$, puisque $P_i \not\subset H_{i-1}$ et que $P_i \subset H_i$, puisque $P_i \cap H_i \neq (e)$.

Le groupe B^u est nilpotent (puisqu'il est unipotent et connexe) et admet, en tant que groupe à opérateurs, une suite de Jordan-Hölder clivée par les P_i . Reste à montrer que les P_i sont deux à deux non isomorphes en tant que groupes à opérateurs. Or P_i est isomorphe à P_j si et seulement si $\alpha_i = \alpha_j$ (rappelons que α_i est indépendant du choix de τ_i) ; mais si $\alpha_i =$ $= \alpha_j$, leurs noyaux connexes Q_i et Q_j coïncident, donc $P_i = P_j$.

Nous avons donc démontré a) ; au passage, nous avons établi que l'intersection P_α de B avec le centralisateur Z_α d'un tore singulier Q_α de codim 1 dans T est un sous-groupe stable simple de B^u . La proposition 1 établit les autres assertions du théorème 1 (noter que les P_α sont fermés, ainsi que les sous-groupes engendrés par certains d'entre eux).

Nous allons maintenant étudier certains sous-groupes stables de B^u .

<u>PROPOSITION 3. Soient, avec les notations précédentes,</u> σ <u>un élément du normalisateur de</u> T , w <u>l'opération du groupe de Weyl</u> $\mathfrak{W}$ <u>définie par</u> σ . <u>Posons</u> $B'^u_w = B^u \cap \sigma B^u \sigma^{-1}$.

<u>Alors</u> B'^u_w <u>est un sous-groupe de</u> B^u <u>normalisé par</u> T . <u>Si</u> $\alpha \in \mathfrak{R}$ <u>est une racine négative sur</u> $\underset{\sim}{C}(B)$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $P_\alpha \subset B'^u_w$;

b) $w^{-1}\alpha \in \mathfrak{R}$.

c) α <u>est négative sur la chambre de Weyl</u> $w\underset{\sim}{C}(B)$.

d) <u>l'hyperplan de</u> $\Gamma^{\widetilde{Q}}(T)$ <u>orthogonal à</u> α <u>ne sépare pas les chambres associées au groupes de Borel</u> B <u>et</u> $wB = \sigma B \sigma^{-1}$.

<u>Enfin, si</u> w , $w' \in \mathfrak{W}$, $B'^u_w = B'^u_{w'}$ <u>équivaut</u> à $w = w'$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Comme B^u et wB^u sont normalisés par T , il en est de même de leur intersection B'^u_w . Il résulte alors du théorème 1, d, que B'^u_w est le produit semi-direct des P_α qu'il contient. Pour $\alpha \in \mathfrak{R}$, la relation $P_\alpha \subset B'^u_w$ équivaut à $P_\alpha \subset \sigma B^u \sigma^{-1}$ ou encore à $\sigma^{-1} P_\alpha \sigma \subset B^u$. D'après le corollaire 1 de la proposition 2 de l'exposé 12, cette relation équivaut à $w^{-1}\alpha \in \mathfrak{R}$. Soit $\gamma \in \underset{\sim}{C}(B)$; alors $w^{-1}\alpha \in \mathfrak{R}$ équivaut à $\langle w^{-1}\alpha , \gamma \rangle < 0$. Or $\langle w^{-1}\alpha , \gamma \rangle =$ $= \langle \alpha , w\gamma \rangle$. Enfin α est négatif sur $\underset{\sim}{C}(B)$ et $w\underset{\sim}{C}(B) = \underset{\sim}{C}(wB)$ si et seulement si l'hyperplan orthogonal ne sépare pas ces chambres de Weyl. Cela démontre

l'équivalence de a), b), c), et d).

Soient $w, w' \in \mathfrak{W}$, $B'^u_w = B'^u_{w'}$. Alors, si nous appliquons d), nous voyons que les chambres $\underset{\sim}{C}(wB)$ et $\underset{\sim}{C}(w'B)$ ne sont séparées par aucun hyperplan limitrophe dans $\Gamma^{\underset{\sim}{Q}}(T)$. D'après la caractérisation des chambres de Weyl (exposé 11, théorème 1), cela signifie que $\underset{\sim}{C}(wB) = \underset{\sim}{C}(w'B)$, i.e. $w = w'$.

LEMME 2.- a) *Si $\gamma \in \Gamma^{\underset{\sim}{Q}}(T)$ parcourt la chambre de Weyl associée à un groupe $B \supset T$, $(-\gamma)$ parcourt la chambre de Weyl associée à un groupe de Borel $\tilde{B} \supset T$. La relation entre B et $\tilde{B}$ est symétrique ; ces deux groupes de Borel, ainsi que les chambres associées, seront dits opposés. Toute racine β prend des signes opposés sur $\underset{\sim}{C}(B)$ et $\underset{\sim}{C}(\tilde{B})$.*

b) *Les intersections respectives de B et $\tilde{B}$ avec le centralisateur Z d'un tore singulier $Q \subset T$ de codim 1 sont les deux groupes de Borel de Z contenant T.*

c) *Il existe un élément et un seul $w_B \in \mathfrak{W}$, tel que $w_B B = \tilde{B}$. On a $w_B^2 = 1$ (élément neutre). Si $B' = wB$ est un groupe de Borel contenant T $(w \in \mathfrak{W})$, on a $w_{B'} = w w_B w^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. a) résulte du théorème 1 de l'exposé 11. Les chambres $\underset{\sim}{C}(B)$ et $\underset{\sim}{C}(B)$ sont situées de part et d'autre de tout hyperplan de $\Gamma^{\underset{\sim}{Q}}(T)$ qui ne les rencontre pas, donc en particulier de tout hyperplan limitrophe d'une chambre (hyperplan orthogonal à une racine).

b) résulte de l'exposé 12 (corollaire de la proposition 1 et proposition 2)

c) L'existence et l'unicité de w_B résulte de ce que $\mathfrak{W}$ opère d'une manière simplement transitive sur les groupes de Borel contenant T (ou sur les chambres associées). Comme $w \in \mathfrak{W}$ définit un automorphisme de $\Gamma^{\underset{\sim}{Q}}(T)$, les chambres $w\underset{\sim}{C}(B)$ et $w\underset{\sim}{C}(\tilde{B})$ sont opposées ; autrement dit, $\widetilde{wB} = (ww_B)B = (ww_Bw^{-1})(wB)$. La relation $w_B^2 = 1$ résulte de $B = \widetilde{w_BB} = w_B^2B$.

PROPOSITION 4.- *Avec les notations précédentes, posons pour $w \in \mathfrak{W}$, $B^u_w = B'^u_{ww_B}$. Alors B^u est produit semi-direct de ses deux sous-groupes B^u_w et B'^u_w. On a $B^u_{w_B} = B^u$ et $B'^u_{w_B} = (e)$.*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2,a et le théorème 1, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathfrak{B}$ on a une et une seule des relations $P_\alpha \subset B^u_w$ et $P_\alpha \subset B'^u_w$; cela résulte de la proposition 4,c et du lemme 2. La dernière partie résulte de ce que (si 1 désigne l'élément neutre de $\mathfrak{W}$) $B'^u_1 = B^u$, $B^u_1 = (e)$.

On peut montrer facilement (cf. le corollaire 2 de la proposition 2 de l'exposé 12) que tout sous-groupe P_α ($\alpha \in \mathfrak{B}$) est l'intersection d'une famille de sous-groupes B_w^u. Mais il peut exister des sous-groupes de B^u normalisés par T qui ne sont pas de cette forme.

3.- Racines fondamentales.

DEFINITION 3.- Nous appellerons racines fondamentales par rapport au groupe de Borel $B \supset T$ les racines associées à T et B dont les hyperplans orthogonaux dans $\underset{\sim}{\Gamma}^{Q}(T)$ sont limitrophes de la chambre $\underset{\sim}{C}(B)$. L'ensemble des racines fondamentales par rapport à B sera noté $\mathfrak{B}^*$ ($\subset \mathfrak{B}$, ensemble des racines négatives sur $\underset{\sim}{C}(B)$).

THÉORÈME 2.- Si ℓ est le rang du groupe algébrique connexe semi-simple G, i.e. la dimension d'un tore maximal de G, il y a exactement ℓ racines fondamentales par rapport à un groupe de Borel B. Considérées comme formes linéaires sur $\underset{\sim}{\Gamma}^{Q}(T)$, elles sont linéairement indépendantes.

DÉMONSTRATION. Les propriétés énoncées ne dépendent pas de la manière dont on a normé les racines ; autrement dit, ce sont des propriétés des hyperplans limitrophes de $\underset{\sim}{C}(B)$. L'indépendance linéaire des $\alpha \in \mathfrak{B}^*$ a été démontrée au numéro 4 de l'exposé 11 (page 9). Pour que leur nombre soit égal à ℓ, il faut et il suffit que l'intersection H des hyperplans limitrophes de $\underset{\sim}{C}(B)$ se réduise à (0). Or le groupe de Weyl est engendré par les symétries par rapport à ces hyperplans (exposé 11, théorème 2). Le sous-espace H est donc l'intersection de tous les hyperplans limitrophes des chambres de Weyl dans $\underset{\sim}{\Gamma}^{Q}(T)$. Il est donc de la forme $\underset{\sim}{\Gamma}^{Q}(Q)$, où Q est la composante connexe de l'intersection des tores singuliers de codim 1 de T. D'après le théorème 2, e de l'exposé 12, $H = (0)$.

PROPOSITION 5.- a) Toute racine est transformée par au moins un élément de $\mathfrak{W}$ d'une racine fondamentale par rapport à B.

b) Le groupe semi-simple G est engendré par les centralisateurs Z_α des tores singuliers $Q_\alpha \subset T$ de codim 1 lorsque α parcourt $\mathfrak{B}^*$

DÉMONSTRATION. a) Soient β une racine, H l'hyperplan orthogonal à β dans $\underset{\sim}{\Gamma}^{Q}(T)$, B' un groupe de Borel tel que H soit limitrophe de la chambre $\underset{\sim}{C}(B')$. Si $w \in \mathfrak{W}$ est tel que $wB' = B$, $w\beta$ est fondamentale par rapport à B ou à $\tilde{B}$; dans ce dernier cas, $(w_B w)\beta$ est fondamentale par rapport à B.

b) Il résulte de a) que tout centralisateur d'un tore singulier de codim 1 de T est trasnformé de l'un des Z_α par un élément de $\mathcal{W}$. Or ces centralisateurs engendrent G (exposé 12, théorème 2,d). Il suffit donc de montrer que le sous-groupe engendré par les Z_α ($\alpha \in \beta^*$) contient le normalisateur N de T. Or $\mathcal{W}$ est engendré par les symétries par rapport aux hyperplans limitrophes de $\underset{\sim}{C}(B)$, et l'intersection $Z_\alpha \cap N$ se compose de deux classes modulo T : T lui-même et la classe dont les éléments définissent la symétrie par rapport à Q_α. Le sous-groupe engendré par les Z_α contient un système de générateurs de N, donc N lui-même.

<u>LEMME 3</u>.- <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique connexe (non nécessairement semi-simple) dont le groupe de Weyl est d'ordre</u> 2, T <u>un tore maximal,</u> B <u>et</u> B_0 <u>deux groupes de Borel</u> (<u>avec</u> $T \subset B$), Ω <u>l'espace homogène</u> G/B_0. <u>Alors, si l'on fait opérer</u> B <u>sur</u> Ω, Ω <u>se décompose en deux orbites ; chacune d'elles contient exactement un point invariant par</u> T. <u>Cet énoncé reste valable si l'on y remplace</u> Ω <u>par son image par un morphisme bijectif</u>.

<u>DÉMONSTRATION</u>. On n'a fait qu'énoncer, sous une forme plus géométrique, des résultats établis au cours de la démonstration du lemme 1 de l'exposé 12.

<u>COROLLAIRE</u>. <u>Avec les notations du lemme 3, si</u> σ <u>est un élément du normalisateur de</u> T <u>non contenu dans son centralisateur,</u> $\{B \ , \ B\sigma B\}$ <u>est une partition de</u> G.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Si l'on fait $B_0 = B$, les points de Ω invariants par T sont les images de B et de σB ; les images réciproques de leurs orbites par B sont B et $B\sigma B$.

<u>PROPOSITION 6</u>.- <u>Soient</u> G <u>un groupe connexe semi-simple</u>, $B \supset T$ <u>un groupe de Borel et un tore maximal,</u> B_w^u, $B_w'^u$, etc ... <u>comme précédemment. Alors :</u>

a) <u>pour que</u> B_w^u <u>se réduise à l'un des</u> P_α, <u>il faut et il suffit que</u> $\alpha \in \beta^*$ <u>et que</u> w <u>soit la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à</u> α. <u>Nous poserons dans ce cas</u> $C_\alpha = B_w'^u$ $(\alpha \in \beta^*)$.

b) C_α <u>est un sous-groupe distingué de</u> B^u. <u>Son normalisateur contient le centralisateur</u> Z_α <u>de</u> Q_α.

c) <u>On a</u> $Z_\alpha B = BZ_\alpha$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. a) Soit $w \in \mathfrak{W}$. La détermination des $P_\beta \subset B^u_w$ se ramène à la recherche des hyperplans limitrophes de chambres dans $\Gamma^Q_{\sim}(T)$ qui séparent $\underset{\sim}{C}(B)$ et $\underset{\sim}{C}(wB)$, d'après la proposition 3,d et la proposition 4. L'énoncé est alors une conséquence facile du théorème 1 de l'exposé 11 (et des développements qui précèdent son corollaire). Il en résulte en effet que deux chambres sont séparées par un seul hyperplan limitrophe si et seulement si elles ont un mur commun dans cet hyperplan limitrophe, i.e. si elles sont transformées l'une en l'autre par la symétrie par rapport à cet hyperplan.

b) Il résulte du théorème 1 que C_α est un sous-groupe stable maximal de B^u. Il est donc distingué (lemme 1,b). Soit σ_α un élément de Z_α appartenant au normalisateur de T mais non à T ($\alpha \in \beta^*$). Alors la symétrie $w \in \mathfrak{W}$ associée à α est définie par l'automorphisme intérieur associé à σ_α. Cet automorphisme permute B^u et wB^u. Il conserve donc leur intersection $B'^u_w = C_\alpha$; i.e. σ_α normalise C_α. Posons $A_\alpha = B \cap Z_\alpha$; A_α est un groupe de Borel de Z_α ; sa partie unipotente est P_α, et $A_\alpha = P_\alpha T$. C_α est normalisé par T et par P_α (puisque $P_\alpha \subset B^u$), donc par A_α. Mais (cor. du lemme 3) $Z_\alpha = A_\alpha \cup A_\alpha \sigma_\alpha A_\alpha$. Donc Z_α normalise C_α.

c) On a : $B = TB^u = TP_\alpha C_\alpha = C_\alpha P_\alpha T$. Donc :
$Z_\alpha B = Z_\alpha T P_\alpha C_\alpha = Z_\alpha C_\alpha = C_\alpha Z_\alpha = C_\alpha P_\alpha T Z_\alpha = BZ_\alpha$.

4.- <u>Structure de l'espace homogène</u> G/B.

<u>THÉOREME 3</u>.- <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique connexe,</u> B <u>un groupe de Borel contenant un tore maximal</u> T, Ω <u>une variété algébrique sur laquelle</u> G <u>opère algébriquement et transitivement, de telle sorte que le stabilisateur d'un point soit un groupe de Borel. Alors, si l'on fait opérer</u> B <u>sur</u> Ω, Ω <u>se décompose en un nombre fini d'orbites : chacune d'elles contient exactement un point invariant par</u> T.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Si G n'est pas semi-simple, le radical R de G opère trivialement sur Ω, car il est contenu dans l'intersection des groupes de Borel. Nous pouvons donc faire opérer sur Ω le groupe semi-simple G/R, et remplacer B par son image qui est un groupe de Borel de G/R. Nous nous ramenons ainsi au cas où G est semi-simple, ce que nous supposerons désormais.

Soient $(\sigma_w)_{w \in \mathfrak{W}}$ une famille de représentants des classes mod. T du normalisateur N de T, et e_B le point de Ω invariant par B. Alors les points de Ω invariants par T sont les points $\sigma_w e_B$ ($w \in \mathfrak{W}$), qui correspondent aux groupes de Borel de G contenant T.

Montrons d'abord que $B\sigma_w e_B \cap B\sigma_{w'} e_B = \emptyset$ pour $w \neq w'$. Le stabilisateur de $\sigma_w e_B$ dans G est $wB = \sigma_w B \sigma_w^{-1}$; son stabilisateur dans B est $B \cap wB = B'^u_w T$. Si $B\sigma_w e_B$ et $B\sigma_{w'} e_B$ avaient une intersection non vide, ils coïncideraient (comme orbites par B d'un même point) ; les sous-groupes $B'^u_w T$ et $B'^u_{w'} T$ seraient conjugués (comme stabilisateurs de deux points d'une même orbite), ainsi que leurs parties unipotentes B'^u_w et $B'^u_{w'}$. D'après la proposition 2,b on aurait $B'^u_w = B'^u_{w'}$, d'où $w = w'$ d'après la proposition 3.

Montrons maintenant que, si l'on pose $\Omega' = \bigcup_{w \in \mathcal{W}} B\sigma_w e_B$, $\Omega' = \Omega$. Il suffit de montrer que $G\Omega' \subset \Omega'$, ou, d'après la proposition 5,b, que $Z_\alpha \Omega' \subset \Omega'$ pour $\alpha \in \mathcal{B}^*$.

Considérons $Z_\alpha \sigma_w e_B \subset \Omega$. Le stabilisateur de $\sigma_w e_B$ dans Z_α est $A_\alpha = Z_\alpha \cap wB$, i.e. un groupe de Borel de Z_α. Désignons par σ_α un élément de $N \cap (Z_\alpha - T)$. Le corollaire du lemme 3 montre que $Z_\alpha = A_\alpha \cup A_\alpha \sigma_\alpha A_\alpha$, d'où $Z_\alpha \sigma_w e_B = \sigma_w e_B \cup A_\alpha \sigma_\alpha \sigma_w e_B$. Comme $Z_\alpha B = BZ_\alpha$ (proposition 6,c), on a :
$Z_\alpha B \sigma_w e_B = BZ_\alpha \sigma_w e_B = B\sigma_w e_B \cup B\sigma_\alpha \sigma_w e_B$. Or $\sigma_\alpha \sigma_w e_B = \sigma_{w'} e_B$, avec $w' \in \mathcal{W}$.
Donc $Z_\alpha B\sigma_w e_B = B\sigma_w e_B \cup B\sigma_{w'} e_B \subset \Omega'$, $Z_\alpha \Omega' \subset \Omega'$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.- *Supposons G semi-simple. Alors les ensembles $B^u_w \sigma_w B = B\sigma_w B$, où $w \in \mathcal{W}$, définissent une partition de G. Pour chaque $w \in \mathcal{W}$, l'application $(b,b') \to b\sigma_w b'$ de $B^u_w \times B$ dans $B\sigma_w B$ est bijective.*

DÉMONSTRATION. Prenons $\Omega = G/B$. Les ensembles $B\sigma_w B$ constituent une partition de G, image réciproque de la partition de Ω en classes de transitivité suivant B. Comme le stabilisateur de $\sigma_w e_B$ dans B est $B'^u_w T$, et que B est produit semi-direct de B^u_w et de $B'^u_w T$, l'application $b \to b\sigma_w e_B$ de B^u_w dans $B\sigma_w e_B$ est bijective. En remontant à G, on en déduit que tout point de $B\sigma_w B = B^u_w \sigma_w B$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $b\sigma_w b'$ indiquée.

COROLLAIRE 2.- *Supposons toujours G semi-simple. Alors la dimension de l'orbite $B\sigma_w e_B$ est égale à la dimension de B^u_w. L'orbite de $w_B e_B$ est ouverte dans Ω. La somme des dimensions des orbites $B\sigma_w e_B$ et $B\sigma_w \sigma_{w_B} e_B$ est égale à n, dimension commune de Ω et de B^u (pour tout $w \in \mathcal{W}$). Les orbites par B de dimension $(n-1)$ sont les ensembles $B\sigma_\alpha \sigma_{w_B} e_B$; avec les notations de la*

<u>proposition 6, l'application</u> $C_\alpha \to B\sigma_\alpha\sigma_{w_B}e_B$ <u>est bijective, pour</u> $\alpha \in \mathfrak{B}^*$. <u>Si</u> G <u>est de rang</u> ℓ <u>, sa dimension est</u> $(2n+\ell)$; $\tilde{B}B$ <u>est une partie ouverte de</u> G <u>, et l'application</u> $(b,t,b') \to btb'$ <u>de</u> $\tilde{B}^u \times T \times B^u$ <u>dans</u> $\tilde{B}B$ <u>est bijective.</u>

<u>DÉMONSTRATION</u>. Toute orbite par B est une partie épaisse, et, plus précisément, une partie irréductible ouverte dans son adhérence (exposé 5, lemme 4). La réunion des adhérences des orbites $B\sigma_w e_B$ est Ω ; comme Ω est irréductible, l'une de ces adhérences est Ω, et par conséquent l'une des orbites $B\sigma_w e$ est un ouvert de Ω. Une seule orbite a cette propriété, car deux ouverts de Ω ont une intersection non vide. Nous avons vu que l'application de B_w^u sur $B\sigma_w e_B$ est bijective ; la dimension de $B\sigma_w e_B$ est donc égale à celle de B_w^u, d'où $\dim B\sigma_w e_B \leq n$. L'égalité ne peut avoir lieu que si $B_w^u = B^u$, i.e. si $w = w_B$. La somme des dimensions de B_w^u et de $B_{ww_B}^u$ est égale à n, puisque B^u est produit semi-direct de B_w^u et de $B_w'^u = B_{ww_B}^u$. Pour que $\dim B_w^u = (n-1)$, il faut et il suffit que $\dim B_{ww_B}^u = 1$, i.e. que ww_B soit une symétrie w_α définie par σ_α ($\alpha \in \mathfrak{B}^*$). Les orbites $B\sigma_\alpha\sigma_{w_B}e_B$ ($\alpha \in \mathfrak{B}^*$) sont donc les seules de dimension $(n-1)$; rappelons qu'on a posé $C_\alpha = B_{w_\alpha}'^u = B_{w_\alpha w_B}^u$. Prenons $\Omega = G/B$. Si G est de rang ℓ, $B = B^u T$ est de dimension $(n+\ell)$, et $\dim G = \dim B + \dim G/B = (2n+\ell)$. L'image réciproque de l'ouvert $B\sigma_{w_B}e_B$ dans G est l'ouvert $B\sigma_{w_B}B = \sigma_{w_B}(\sigma_{w_B}^{-1}B\sigma_{w_B})B = \sigma_{w_B}\tilde{B}B$. L'application $(b,b') \to b\sigma_{w_B}b'$ de $B^u \times B$ dans $B\sigma_{w_B}B$ est bijective ; le petit calcul précédent montre qu'il en est de même de l'application $(b,b') \to bb'$ de $\tilde{B}^u \times B$ dans $\tilde{B}B$, ou encore de l'application $(b,t,b') \to btb'$ de $\tilde{B}^u \times T \times B^u$ dans $\tilde{B}B$.

<u>PROPOSITION 7.</u>- <u>Reprenons les notations du théorème 3, en supposant</u> G <u>semi-simple. Soit</u> $\gamma \in \underset{\sim}{C}(B)$ <u>un sous-groupe à un paramètre de</u> T. <u>Alors, si</u> $x \in B\sigma_w e_B$, $\gamma(\infty)x = \sigma_w e_B$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. L'élément x peut s'écrire $x = b\sigma_w e$, avec $b \in B^u$, et, pour $t \in T$, on a $tx = tb\sigma_w e_B = (tbt^{-1})t\sigma_w e_B = (tbt^{-1})\sigma_w e_B$. Nous allons remplacer B^u par un espace vectoriel K^n de la manière suivante. Ordonnons l'ensemble $\mathfrak{B}$ des racines α négatives sur $\underset{\sim}{C}(B)$ ($\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$). Alors, avec les notations du théorème 1, l'application $\varphi : K^n \to B^u$ définie par $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \tau_{\alpha_1}(\xi_1) \ldots \tau_{\alpha_n}(\xi_n)$ est bijective (proposition 1,c). Le morphisme ψ de

$K^* \times K^n$ dans K défini par

$$\psi(\theta, (\xi_1,\ldots,\xi_n)) = (\alpha_1(\gamma(\theta))\xi_1,\ldots,\alpha_n(\gamma(\theta))\xi_n)$$
$$= (\theta^{\langle\alpha_1,\gamma\rangle}\xi_1,\ldots,\theta^{\langle\alpha_n,\gamma\rangle}\xi_n)$$

se prolonge en un morphisme de $\bar{K}^* \times K^n$ dans K^n ($\bar{K}^* = K^* \cup \{\infty\}$), en posant $\psi(\infty,(\xi_1,\ldots,\xi_n)) = (0,\ldots,0)$; en effet, tous les entiers $\langle\alpha_i,\gamma\rangle$ sont strictement négatifs. Le morphisme composé $\varphi\circ\psi$ se prolonge de même. Or (théorème 1) $\gamma(\theta)\varphi(\Xi)\gamma(\theta)^{-1} = (\varphi\circ\psi)(\theta,\Xi)$, pour $\Xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in K^n$ et $\theta \in K^*$. Donc, si $b = \varphi(\Xi)$, $\gamma(\theta)x = \gamma(\theta)b\sigma_w e_B = (\varphi\circ\psi)(\theta,\Xi)\sigma_w e_B$. D'où $\gamma(\infty)x = \sigma_w e_B$.