M. Lazard

Racines

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 12, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A12_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 12

RACINES.

(Exposé de M. LAZARD, le 11.3.57)

1.- Groupes de Weyl d'ordre 2.

Dans tout ce n°, G désignera un groupe algébrique connexe dont le groupe de Weyl est d'ordre 2.

LEMME 1.- a) Si B est un groupe de Borel de G, $\Omega = G/B$ est isomorphe à une droite projective.

b) Il existe un épimorphisme rationnel de G sur le groupe projectif à 2 variables $PL(2,K)$ dont le noyau est l'intersection des groupes de Borel.

DÉMONSTRATION. Ω n'est pas réduit à un point, puisque G n'est pas résoluble ; $\dim \Omega \leq 1$ puisque le groupe de Weyl est d'ordre 2 (exposé 10, corollaire de la proposition 7) ; donc Ω est une courbe. Soit T un tore maximal de G. Il laisse invariants précisément 2 points de Ω, et il existe donc un tore de dim 1, $Q \subset T$, qui n'opère pas trivialement sur Ω. Si $x_1 \in \Omega$ n'est pas invariant par Q, l'ensemble Qx_1 des points sx_1 $(s \in Q)$ est épais et non réduit à un point, donc ouvert dans la courbe Ω. Le corps $K(\Omega)$ des fonctions rationnelles sur Ω coïncide avec celui des fonctions sur Qx_1, qui est un sous-corps du corps des fonctions rationnelles sur Q. D'après le théorème de Lüroth (v. d. Waerden, Moderne Algebra, 2ème éd. paragraphe 63) le corps des fonctions rationnelles sur Ω est donc une extension transcendante pure de K. Comme Ω est une courbe complète et sans singularités, il en résulte que Ω est une droite projective.

Notons x_0 et x_∞ les 2 points de Ω invariants par T, et ζ la fonction rationnelle sur Ω, bien déterminée par les conditions d'avoir un seul zéro simple en x_0, un seul pôle simple en x_∞, et d'être égale à 1 en x_1. Pour $g \in G$, $x \in \Omega$, posons $(g\zeta)(x) = \zeta(g^{-1}x)$. Alors la fonction $g\zeta$ est de la forme $(a\zeta + b)(c\zeta + d)^{-1}$, avec $a,b,c,d \in K$. Plus précisément, si l'on note $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ le "birapport" des 4 quantités $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \bar{K}$

$(\bar{K} = K \cup \{\infty\})$, i.e. la quantité $(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)(\alpha - \delta)^{-1}(\beta - \gamma)^{-1}$, on a

$$g\zeta = (\zeta ; \zeta(gx_1) , \zeta(gx_0) , \zeta(gx_{\infty})) ,$$

d'après l'invariance du "birapport" par les transformations homographiques. Comme $g \longrightarrow \zeta(gx)$ est une fonction rationnelle sur G pour tout $x \in \Omega$, l'homomorphisme $g \longrightarrow (\zeta \longrightarrow g\zeta)$ est un homomorphisme rationnel de G dans $PL(2,K)$.

Soient B_0 et B_{∞} les deux groupes de Borel de G contenant T , qui sont les stabilisateurs respectifs de x_0 et de x_{∞} . Pour $s \in B_{\infty}$, on a : $s\zeta = a(s)\zeta + b(s)$. L'application $s \to a(s)$ est un homomorphisme rationnel de B_{∞} dans K^* dont le noyau contient B^u_{∞} (partie unipotente de B_{∞}) mais non T . En effet $b(t) = 0$ pour tout $t \in T$, et T n'opère pas trivialement sur Ω . La restriction de a à T est donc un épimorphisme de T sur K^* . De même, la restriction de b à B^u_{∞} est un épimorphisme de B^u_{∞} sur le groupe additif K . En effet, cette restriction est un homomorphisme, et si ce n'était pas un épimorphisme $b(B^u_{\infty})$ serait un sous-groupe fermé connexe de K distinct de K , dont réduit à 0 , et $B_{\infty} = B^u_{\infty}T$ laisserait x_0 invariant, ce qui est impossible.

Pour tous $\alpha \in K^*$, $\beta \in K$, on peut donc trouver $t \in T$ et $s \in B^u_{\infty}$ tels que $a(t) = \alpha$, $b(s) = \beta$, d'où $(ts)\zeta = \alpha\zeta + \beta$. Autrement dit les opérations de B_{∞} sur Ω sont tous les automorphismes algébriques qui laissent invariant x_{∞} . Le même raisonnement s'applique à B_0 et x_0 . Comme tout automorphisme de Ω est le produit de 2 automorphismes laissant fixes respectivement x_0 et x_{∞} , les opérations de G sur Ω sont tous les automorphismes rationnels de Ω , autrement dit, $G \longrightarrow PL(2,K)$ est un épimorphisme rationnel.

LEMME 2.- Soient R le radical de G , R' l'intersection de ses groupes de Borel, T un tore maximal contenu dans un groupe de Borel, B, B^u, R^u, R'^u les parties unipotentes de B, R, R' respectivement. Alors :

a) $R = R'^u$ est un sous-groupe fermé distingué de B^u . Le quotient B^u/R^u est isomorphe au groupe additif K .

b) Soit f un épimorphisme de B^u sur K qui, par passage au quotient, définit un isomorphisme de B^u/R^u sur K . Pour tous $t \in T$, $s \in B^u$, on a

$f(tst^{-1}) = \alpha(t)f(s)$, où α est un caractère de T indépendant du choix de f dont le noyau est $T \cap R'$.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Reprenons les notations de la démonstration précédente avec $B = B_\infty$. Le radical R est par définition (exposé 9, déf. 2) la composante connexe de R'. Comme $R' \subset B$, $R'^u = B^u \cap R'$ est un sous-groupe distingué fermé de G et R^u est sa composante connexe. Le quotient R'^u/R^u est un p-groupe fini.

Nous avons introduit un épimorphisme b de B^u sur K dont le noyau est R'^u. Il en résulte que B^u/R'^u est un groupe connexe unipotent de dim 1, donc isomorphe à K (exposé 7, théorème 4) ; il en est de même de B^u/R^u, extension de B^u/R'^u par le groupe fini R'^u/R^u. Rappelons que tout endomorphisme algébrique du groupe additif K est de la forme $k \to P(k)$, où $P(X)$ est un p-polynôme (i.e. un polynôme de la forme $\sum_i c_i X^{p^i}$, $c_i \in K$). Tout automorphisme de K est de la forme $k \to ck$, avec $c \in K^*$ (exposé 9, lemme 1). Si f est un épimorphisme comme dans l'énoncé, f est donc défini à un facteur constant non nul près. De plus, l'épimorphisme b de B^u sur K de noyau R'^u peut s'écrire $P\circ f$, où $P(X)$ est un p-polynôme non nul.

L'automorphisme intérieur associé à un élément $t \in T$ laisse globalement invariants B^u et R^u. Donc $s \to f(tst^{-1})$ définit un isomorphisme de B^u/R^u sur K, d'où $f(tst^{-1}) = \alpha(t)f(s)$, $\alpha(t) \in K^*$ et α est évidemment un caractère de T indépendant du choix de f.

D'autre part, nous avons avec la définition précédente de l'homomorphisme a : $b(tst^{-1}) = a(t^{-1})b(s)$ pour $t \in T$, $s \in B^u$. Si $b(s) = \sum_i c_i f(s)^{p^i}$, nous avons : $b(tst^{-1}) = \sum_i c_i \alpha(t)^{p^i} f(s)^{p^i} = \sum_i c_i\, a(t^{-1})f(s)^{p^i}$.
Il en résulte que $c_i = 0$ sauf pour une valeur j de l'indice i. Par conséquent f et b annullent les mêmes éléments de B^u, i.e. $R'^u = R^u$. D'autre part $\alpha(t)^{p^j} = a(t^{-1})$; donc le noyau de α coïncide avec celui de la restriction de a à T, i.e. $T \cap R'$.

<u>REMARQUE</u>. Nous avons considéré l'espace homogène $\Omega = G/B$; mais nous aurions pu considérer l'image de Ω par une application rationnelle bijective sans rien changer aux démonstrations.

2.- Racines d'un groupe algébrique.

Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal. Les racines de G associées à T sont des caractères de T dont les noyaux connexes sont les tores singuliers de codim 1, où encore des ~~formes linéaires sur~~ $\Gamma(T)$ orthogonales aux hyperplans limitrophes des chambres de Weyl. A chaque hyperplan limitrophe correspondent deux racines opposées.

Explicitons d'abord un résultat contenu dans la proposition 1 de l'exposé 10.

LEMME 3.- *Soient G un groupe algébrique connexe, T un tore maximal, Q un sous-tore de T, Z le centralisateur de Q. Alors les groupes de Borel de Z contenant T sont les intersections avec Z des groupes de Borel de G contenant T.*

En particulier, si Q est semi-régulier, son centralisateur est contenu dans tout groupe de Borel de G contenant T.

Soit maintenant Q un tore singulier de codim 1. Nous avons vu (exposé 11, théorème 2) que le groupe de Weyl du centralisateur Z de Q est d'ordre 2 ; les éléments du normalisateur de T dans Z induisent (par automorphismes intérieurs) l'identité ou la symétrie par rapport à Q. Les groupes de Borel de G contenant T découpent sur Z l'un ou l'autre de ses deux groupes de Borel. Les résultats du n° précédent justifient la définition suivante.

DÉFINITION 1.- *Soient G un groupe algébrique connexe non résoluble, T un tore maximal, $Q \subset T$ un tore singulier de codim 1, $B \supset T$ un groupe de Borel, B^u sa partie unipotente, Z le centralisateur de Q, R le radical de Z. Si l'on identifie $B^u \cap Z/B^u \cap R$ au groupe additif K, l'automorphisme de $B^u \cap Z/B^u \cap R$ défini par restriction et passage au quotient à partir de l'automorphisme intérieur associé à un élément $t \in T$ s'identifie à la multiplication par $\alpha(t) \in K^*$. Le caractère α de T sera dit racine associée à T, Q et B (ou encore à T, Q et au groupe de Borel $A = B \cap Z$ de Z).*

Comme Q est dans le centre de Z, il est contenu dans le noyau de α ; par ailleurs, on a vu que α n'est pas une constante ; comme Q est de codim 1, c'est la composante connexe de l'élément neutre dans le noyau de α.

PROPOSITION 1.- *Soient, avec les notations précédentes, τ un élément du normalisateur de T dans G, w_τ l'élément du groupe de Weyl défini par τ, α la racine associée à T, Q, A. Alors la racine $w_\tau \alpha$ associée à T, $\tau Q \tau^{-1}$, $\tau A \tau^{-1}$ est la fonction $t \to (w_\tau \alpha)(t) = \alpha(\tau^{-1} t \tau)$.*

DÉMONSTRATION. Si $f : A^u \to K$ définit un isomorphisme de $A^u/A^u \cap R$ sur K, la fonction $s \to f(\tau^{-1} s \tau)$ définit un isomorphisme de

$\tau A^u \tau^{-1} / (\tau A^u \tau^{-1}) \cap (\tau R \tau^{-1})$ sur K. On obtient alors, pour $t \in T$ et $s \in \tau A^u \tau^{-1}$: $f(\tau^{-1}(tst^{-1})\tau) = f((\tau^{-1}t\tau)(\tau^{-1}s\tau)(\tau^{-1}t^{-1}\tau)) = \alpha(\tau^{-1}t\tau) f(\tau^{-1}s\tau)$.

COROLLAIRE. Les racines associées aux 2 groupes de Borel de Z contenant T sont inverses l'une de l'autre.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\tau \in Z$ et que τ appartienne au normalisateur de T, mais non à son centralisateur. Alors $\tau A \tau^{-1}$ est le groupe de Borel de Z distinct de A qui contient T. Comme $\tau^{-1} t \tau t \in Q$ pour $t \in T$ (exposé 11, théorème 2) et que Q est contenu dans le noyau de α (car contenu dans le centre de Z, cf. lemme 2,b) on obtient $w_\tau \alpha = \alpha^{-1}$.

PROPOSITION 2.- Avec les notations de la définition 1, la racine α considérée comme forme linéaire sur $\Gamma(T)$ est négative sur la chambre de Weyl associée à B.

DÉMONSTRATION. Soit x_∞ le point de $\Omega = G/B$ invariant par B. Considérons $Zx_\infty = \Omega'$. Nous savons que Ω' est une sous-variété fermée de Ω (exposé 10, proposition 1) ; le groupe Z y opère transitivement, et, comme le stabilisateur de x_∞ dans Z est $A = Z \cap B$, groupe de Borel de Z, nous avons une application rationnelle bijective de Z/A sur Ω'. Nous pouvons alors appliquer les lemmes 1 et 2, compte tenu de la remarque qui les suit.

Ω' est donc une droite projective et contient un point $x_0 \neq x_\infty$ invariant par T. Si φ est une fonction rationnelle sur Ω' qui a un seul pôle simple en x_∞ et un seul zéro simple en x_0, nous avons pour $t \in T$ et $x \in \Omega'$, $\varphi(tx) = a(t^{-1})\varphi(x)$, avec $a(t^{-1}) = \alpha(t)^{p^j}$ pour un entier $j \geq 0$ (d'après la fin de la démonstration du lemme 2).

Soit $\gamma \in \Gamma(T)$. Alors, pour $x \in \Omega'$ et $\theta \in K^*$,
$\varphi(\gamma(\theta)x) = \alpha(\gamma(\theta))^{p^j}\varphi(x) = \theta^{p^j\langle\alpha,\gamma\rangle}\varphi(x)$. Il en résulte que :

$$\begin{cases} \gamma(0)x = x_\infty & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle < 0 \text{ et } x \in \Omega' - x_0 \\ \gamma(0)x = x_0 & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle > 0 \text{ et } x \in \Omega' - x_\infty \\ \gamma(0)x = x & \text{pour } \langle\alpha,\gamma\rangle = 0 \text{ et } x \in \Omega'. \end{cases}$$

Or si x est dans la chambre associée à B, $\gamma(0)x = x_\infty$ pour $x \notin U$, U étant un ouvert non vide de Ω. Comme $x_\infty \notin \Omega' \cap U$, $\Omega' \cap U$ est un ouvert non vide de Ω' , et il résulte du calcul précédent que $\langle \alpha , \gamma \rangle < 0$.

COROLLAIRE 1.- Soient $B \supset T$ un groupe de Borel de G , $A \supset T$ un groupe de Borel du centralisateur Z d'un tore singulier $Q \supset T$ de codim 1 , α la racine associée à T , Q, A , A^u la partie unipotente de A , τ un élément du normalisateur de T . Pour que $\tau A^u \tau^{-1} \subset B$, il faut et il suffit que la fonction $w_\tau \alpha$ soit négative sur la chambre associée à B .

DÉMONSTRATION. $\tau A^u \tau^{-1} \subset B$ équivaut à $\tau A \tau^{-1} \subset B$ (puisque $A = A^u T$, $\tau T \tau^{-1} = T$ et $B \supset T$) , ou encore à $\tau A \tau^{-1} = B \cap \tau Z \tau^{-1}$.

Soit A' le second groupe de Borel de Z contenant T . Alors $\tau A \tau^{-1}$ et $\tau A' \tau^{-1}$ sont les 2 groupes de Borel de $\tau Z \tau^{-1}$ contenant T . D'après la proposition 1 et son corollaire, les racines associées à T , $\tau Q \tau^{-1}$, $\tau A \tau^{-1}$ (resp. $\tau A' \tau^{-1}$) sont $w_\tau \alpha$ (resp. $-w_\tau \alpha$ en notation additive). La proposition 2 permet de déterminer quel est le groupe de Borel de $\tau Z \tau^{-1}$ qui est contenu dans B , ce qui établit le corollaire 1 .

COROLLAIRE 2.- Pour chaque tore singulier $Q \subset T$ de codim 1 , considérons la partition suivante de l'ensemble des groupes de Borel de G contenant T : deux groupes de Borel appartiennent à la même classe si et seulement s'ils ont même intersection avec le centralisateur de Q . Alors, si α est une des deux racines associées à Q , la partition des chambres de Weyl définie par Q est celle définie dans $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ par les 2 demi-espaces complémentaires de l'hyperplan orthogonal à α . Deux tores singuliers de codim 1 , $Q \neq Q'$, définissent deux partitions distinctes.

DÉMONSTRATION. La première partie de ce corollaire n'est qu'une formulation affaiblie - à tous points de vue - de la proposition 2, compte tenu du corollaire à la proposition 1. La seconde partie résulte de ce qu'un hyperplan limitrophe d'une chambre dans $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ est la frontière de l'adhérence de la réunion des chambres contenues dans un même demi-espace limité par cet hyperplan.

3.- Réunion et intersection des groupes de Borel contenant un tore maximal ; application aux groupes semi-simples.

LEMME 4.- Soit G un groupe algébrique connexe. Tout sous-groupe fermé H de G contenant un groupe de Borel B est son propre normalisateur.

DÉMONSTRATION. On n'utilise que les 2 propriétés suivantes d'un groupe de Borel B : a) B est son propre normalisateur (exposé 9, théorème 1) ;

b) si B et xBx^{-1} sont tous deux contenus dans un sous-groupe fermé H de G $(x \in G)$, il existe $y \in H$ tel que $xBx^{-1} = yBy^{-1}$ (exposé 6, théorème 4 ; on peut prendre y dans la composante connexe de H).

Soient alors $H \supset B$ un sous-groupe fermé de G, $x \in G$, $xHx^{-1} = H$. Alors $xBx^{-1} \subset H$; il existe $y \in H$ tel que $xBx^{-1} = yBy^{-1}$; donc $y^{-1}x$ normalise B, $y^{-1}x \in B$, $x \in H$.

<u>PROPOSITION 3</u>.- <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique connexe</u>, T <u>un tore maximal. La réunion des groupes de Borel de</u> G <u>contenant</u> T <u>engendre</u> G.

<u>DÉMONSTRATION</u>. Soit H le sous-groupe engendré par ces groupes de Borel. Comme ils sont en nombre fini, H est fermé (exposé 3, théorème 2). Le normalisateur de H contient le normalisateur N de T, donc $H \supset N$ (lemme 4).

Considérons l'espace homogène G/H. Si $xH \in G/H$ est invariant par T, on a $TxH \subset xH$, d'où $x^{-1}Tx \subset H$. Il existe donc $h \in H$ tel que $x^{-1}Tx = h^{-1}Th$; d'où $xh^{-1} \in N$, $x \in H$. Cela signifie que T ne laisse invariant qu'un seul point de G/H.

Il en résulte que G/H est un point, i.e. $G = H$. En effet, on peut appliquer à H la proposition 5 de l'exposé 10, et faire opérer G sur un espace projectif $\underline{P}$ de telle sorte que H soit le stabilisateur d'un point $u \in \underline{P}$. Comme G/H est une variété complète (exposé 6, théorème 4) et que l'orbite de u est l'image de G/H par un morphisme bijectif, on voit comme pour la proposition 6 de l'exposé 10 que G/H est réduite à un point si elle ne contient pas au moins 2 points distincts invariants par T.

<u>THÉORÈME 1</u>.- <u>Soient</u> G <u>un groupe algébrique connexe</u>, T <u>un tore maximal</u>, S <u>l'intersection des groupes de Borel de</u> G <u>contenant</u> T, S_o <u>la composante connexe de</u> S, S_o^u <u>la partie unipotente de</u> S_o. <u>Alors</u> S_o^u <u>est un sous-groupe distingué contenu dans le radical de</u> G.

<u>DÉMONSTRATION</u>. La proposition 1 de l'exposé 9 montre que le sous-groupe résoluble connexe S_o est contenu dans le radical de G s'il est distingué. D'après la proposition 3 ci-dessus, il suffit de montrer que le normalisateur H de S_o^u contient tout groupe de Borel B contenant T. Nous savons déjà que $H \supset S \supset T$. Comme $B = B^uT$, il suffit de montrer que $H \supset B^u$. Or d'après le lemme 2 de l'exposé 9 (appliqué à B) B^u est engendré par ses intersections avec les centralisateurs des sous-tores de codim $\leqslant 1$ de T. Les centralisateurs des sous-tores

semi-réguliers sont contenus dans S (cf. lemme 3). Tout revient donc à démontrer que si B^u est la partie unipotente d'un groupe de Borel $B \supset T$, $Q \subset T$ un tore singulier de codim 1, Z le centralisateur de Q, on a $Z \cap B^u \subset H$.

Soit S' l'intersection de tous les groupes de Borel $B_i \supset T$ tels que $B_i \cap Z = B \cap Z$. Notons S'_o la composante connexe de S' et $\sum$ la partie unipotente de S'_o. Nous avons les inclusions : $S^u_o \subset \sum \subset B^u$. De plus, $B \cap Z = S' \cap Z = S'_o \cap Z$, puisque $B \cap Z$ est connexe ; donc $B^u \cap Z = \sum \cap Z$. Il s'agit donc de démontrer que $\sum \cap Z$ normalise S^u_o. Cela est évident si $\sum = S^u_o$. Sinon nous pouvons appliquer le lemme 2 de l'exposé 9, et introduire un sous-groupe fermé connexe $\sum$ vérifiant les propriétés suivantes : on a les inclusions

$$S^u_o \subset \sum{}' \subset \sum \subset B^u \quad ;$$

S^u_o est un sous-groupe distingué de $\sum'$ (i.e. $\sum' \subset H$) ; $\sum'/S^u_o$ est isomorphe à K, et $\sum'$ est engendré par S^u_o et des éléments du centralisateur Z' d'un tore $Q' \subset T$ de codim $\leqslant 1$ (i.e. $\sum' = S^u_o(\sum' \cap Z')$).

Le tore Q' est nécessairement singulier ; sinon son centralisateur Z' serait contenu dans S_o, d'où $\sum' \cap Z' \subset S^u_o$, $\sum' = S^u_o$ contrairement à l'hypothèse. Soit R le radical de Z', R^u la partie unipotente de R. D'après le lemme 3, $S \cap Z' \supset R$, d'où $S_o \supset R$ et $S^u_o \supset R^u$. Nous avons donc les inclusions

$$R^u \subset S^u_o \subset \sum{}' \subset \sum \subset B^u \quad , \text{ et}$$

$$R^u \subset S^u_o \cap Z' \subset \sum{}' \cap Z' \subset \sum \cap Z' \subset B^u \cap Z' \quad .$$

Comme $\sum'/S^u_o = S^u_o(\sum' \cap Z')/S^u_o$ est isomorphe à K et (comme groupe discret) à $(\sum' \cap Z')/(S^u_o \cap Z')$, ce dernier groupe est infini.

Donc $\dim(\sum' \cap Z') > \dim R^u$. Comme d'autre part $(B^u \cap Z')/R^u$ est isomorphe à K (lemme 2), nous avons $\dim(\sum' \cap Z') = \dim(B^u \cap Z')$; d'où

$$\sum{}' \cap Z' = \sum \cap Z' = B^u \cap Z' \quad .$$

Comme $S'_o = T\sum$, nous avons $S'_o \cap Z' = T(\sum \cap Z') = T(B^u \cap Z') = B \cap Z'$. A fortiori $S' \cap Z' = B \cap Z'$. D'après le corollaire 2 à la proposition 2 et la définition de S' à partir de Q et de B, la relation $S' \cap Z' = B \cap Z'$ implique $Q = Q'$ et $Z = Z'$. Nous avons donc $B^u \cap Z \subset \sum' \subset H$, ce qui achève la démonsttration.

<u>COROLLAIRE. Soient</u> $Q \subset T$ <u>un tore de</u> G <u>et</u> Z <u>le centralisateur de</u> Q. <u>Alors tout élément unipotent du radical de</u> Z <u>est contenu dans le radical de</u> G.

En effet nous avons vu que le radical de Z est contenu dans S_o.

<u>THÉORÈME 2.- Soit</u> G <u>un groupe algébrique connexe semi-simple,</u> T <u>un tore maximal. Alors</u> :

a) <u>les groupes de Cartan de</u> G <u>sont ses tores maximaux</u> ;

b) <u>tout tore semi-régulier est régulier et son centralisateur est un tore maximal</u> ;

c) <u>si</u> Q <u>est un tore singulier de</u> codim 1 <u>dans</u> T, <u>le radical du centralisateur de</u> Q <u>est</u> Q ;

d) G <u>est engendré par les centralisateurs des tores singuliers de</u> codim 1 <u>contenus dans</u> T ;

e) <u>l'intersection des tores singuliers de</u> codim 1 <u>contenus dans</u> T <u>est un groupe fini contenu dans le centre de</u> G.

<u>DÉMONSTRATION.</u> D'après le corollaire précédent, le radical du centralisateur d'un tore est un groupe résoluble connexe sans éléments unipotents, donc un tore. Si $Q \subset T$ est semi-régulier, son centralisateur (qui est résoluble) est donc égal à T. Cela établit a) puisque les groupes de Cartan sont les centralisateurs des tores maximaux. Si $x \notin Q$ (semi-régulier) est choisi tel que son centralisateur coïncide avec celui de Q, le centralisateur de x est T, donc x et Q sont réguliers ; d'où b).

Si Q est singulier de codim 1, le radical R de son centralisateur Z est un tore contenant Q. Si $R \neq Q$, R serait un tore maximal T ; Z serait donc contenu dans le normalisateur de T, ce qui est impossible puisque la composante connexe de ce normalisateur est T ; d'où c).

Soit H le sous-groupe de G engendré par les centralisateurs Z_i des tores singuliers de codim 1 de T. Pour montrer que $H = G$, il suffit d'après la proposition 3 d'établir que $B \subset H$ pour tout groupe de Borel $B \supset T$, et même, puisque $T \subset Z_i$, que $B^u \subset H$. Or B^u est engendré par ses intersections avec les centralisateurs des sous-tores de codim $\leqslant 1$ de T (exposé 9, lemme 2). D'après b) seules interviennent les intersections de B^u avec les centralisateurs des tores singuliers ; d'où d).

L'intersection des tores singuliers de codim 1 contenus dans T est un sous-groupe central de G , d'après d). Ce sous-groupe est fini car la composante connexe du centre de G est contenue dans le radical, i.e. le centre de G est un sous-groupe fini ; d'où e).