M. Lazard

Le groupe de Weyl : chambres et symétries

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. n° 11, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A11_0>

-:-:-:-

LE GROUPE DE WEYL : CHAMBRES ET SYMETRIES.

(Exposé de M. LAZARD , le 18.2.57)

ERRATA aux exposés précédents :

page 4-12, dernière ligne : au lieu de " $N'_g N''_g = c$ " , lire : " $N'_g \cap N''_g = c$ "

page 5-03, lignes 12 et 13 : au lieu de " la plus grande extension séparable de k " , lire " la plus grande sous-extension séparable de k_i/k ".

page 5-05, dans l'énoncé du théorème 1, ajouter : " $\underline{O}'$ est entier sur $\underline{O}$ " .

page 5-07, ligne 5 : au lieu de " A_p " , lire : " $(A_{\underline{p}})'$ (cloture intégrale de $A_{\underline{p}}$ dans K') ".

ligne 6 : au lieu de " $(x_i \in A , ...)$ " , lire : " $(x_i \in A' , ...)$ "

ligne 7 : au lieu de A_p , lire $A_{\underline{p}}$.

page 5-12, ligne 8 à partir du bas : dans la formule $\sum$,... , ajouter un ^ sur e_i .

page 6-14 : dans l'énoncé du corollaire 2, lire " x un élément semi-simple de son centralisateur ".

1.- Préliminaires géométriques (polyèdes convexes).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\underline{Q}$ des rationnels. On considère sur $\underline{Q} \times E$ la topologie produit de la topologie usuelle de $\underline{Q}$ (noter que la topologie de E est déterminée par sa structure de groupe "abstrait").

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des formes linéaires non nulles sur E (ou des formes linéaires affines non constantes). Si $L \in \mathcal{L}$, nous noterons respectivement L^o , L^+ et L^- l'ensemble des $x \in E$ tels que $L(x) = 0$, $L(x) > 0$, $L(x) < 0$; L^o est dont l'hyperplan déterminé par L .

LEMME 1.- La réunion d'un nombre fini d'hyperplans de E ne contient aucun ouvert non vide de E.

LEMME 2.- Soient L_1 et $L_2 \in \mathcal{L}$. S'il existe $x \in L_1^o \cap L_2^o$ et un voisinage U de x tel que $U \cap L_1^+ \subset L_2^+$; alors $L_1^+ = L_2^+$, $L_1^o = L_2^o$ et $L_1 = aL_2$, avec $a \in Q$, $a > 0$.

Les démonstrations s'obtiennent facilement en se ramenant au cas où $\dim E = 1$ ou 2.

PROPOSITION 1.- Soient $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}$ et $D = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} L_i^+$. On suppose que D n'est pas vide et que sa représentation comme intersection de demi-espaces est minimale ; autrement dit, si on pose $D_j = \bigcap_{i \neq j} L_i^+$, on a $D_j \neq D$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Alors :

a) $F_j = D_j \cap L_j^o$ est non vide et relativement ouvert dans L_j^o $(1 \leqslant j \leqslant k)$.

b) Les hyperplans L_j^o sont déterminés par D . Plus précisément, pour qu'un L^+ $(L \in \mathcal{L})$ coïncide avec l'un des L_i^+ , il faut et il suffit qu'il existe $x \in L$ et un voisinage U de x tel que $U \cap L^+ = U \cap D$.

c) La frontière de D est la réunion des adhérences des F_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

DEMONSTRATION. a) Supposons $F_i = \emptyset$. On ne peut avoir $D_i \subsetneq L_i^+$ (car $D_i \neq D$) , ni $D_i \subset L_i^-$ (car $D \neq \emptyset$) . Soient donc $x \in D_i \cap L_i^+$ et $y \in D_i \cap L_i^-$. Le segment $\overrightarrow{xy}$ (ensemble des points $tx + (1-t)y$, avec $t \in Q$, $0 \leqslant t \leqslant 1$) est tout entier dans D_i et rencontre L_i^o en un point. D'où $F_i \neq \emptyset$, et F_i est évidemment ouvert dans L_i^o .

c) D est ouvert dans E , et il est clair que $F_j \subset \overline{D} - D$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Donc $\overline{D} - D \supset \bigcup_j \overline{F}_j$. Réciproquement, soit $x \in \overline{D} - D$; on a $x \notin L_j^-$ pour tout j , et $x \in L_j^o$ pour un indice j (au moins). Prenons $y \in F_j$; alors x est adhérent au segment semi-ouvert $\overrightarrow{xy}$ (ensemble des points $tx + (1-t)y$, $0 \leqslant t < 1$) qui est entièrement contenu dans F_j . Donc $\overline{D} - D \subset \bigcup_j \overline{F}_j$.

b) Si L^+ est l'un des L_i^+ , la condition est vérifiée d'après a). Réciproquement, soient $x \in L^o$, U un voisinage de x , $U \cap L^+ = U \cap D$. Alors $x \in \overline{D} - D$, et il existe un i tel que $x \in L_i^o$. On applique alors le lemme 2.

DEFINITIONS. Une partie D de E sera dite une chambre (de E) si c'est l'intersection non vide d'un nombre fini de demi-espaces ouverts L_i^+. Si l'on suppose que $\{L_i^+\}$ est un système minimal (donc minimum, d'après la proposition 1) de définition de D, les hyperplans L_i^o seront dits les hyperplans limitrophes de la chambre D. Les parties $F_i = L_i^o \cap \bigcap_{j\neq i} L_j^+$ seront dites les murs de D.

Chaque mur d'une chambre D est évidemment une chambre dans l'hyperplan limitrophe qui le contient ; on peut donc considérer ses murs relativement à cet hyperplan, etc. On appellera arête de D toute face de codimension $\geqslant 2$ (i.e. tout mur relatif d'un mur de D ou d'une arête de dimension supérieure).

L'adhérence de D est la réunion de D, de ses murs et de ses arêtes.

PROPOSITION 2.- *Soit $\{D(i)\}$ une famille finie de chambres de E $(1 \leqslant i \leqslant k)$. On suppose que les $D(i)$ sont deux à deux disjointes et que la réunion de leurs adhérences est E. Si D et D' sont deux quelconques des chambres $D(i)$, il existe une suite d'indices $i_1, \ldots, i_k$ (entre 1 et k) telle que la suite de chambres $D = D(i_1), \ldots, D(i_k) = D'$ ait la propriété suivante : deux chambres consécutives ont un hyperplan limitrophe commun et leurs murs contenus dans cet hyperplan ont une intersection non vide.*

DEMONSTRATION. On se ramènera au cas où $\dim E = 1$. Choisissons un $x \in D$ qui ne soit contenu dans aucun hyperplan limitrophe des chambres $D(i)$, puis un $y \in D'$ qui ne soit contenu dans aucun des hyperplans engendrés par x et les arêtes de codim 2 de ces chambres (cf. lemme 1). Il suffit alors de prendre les chambres $D = D(i_1), \ldots, D(i_k) = D'$ qui intersectent sur le segment $\overrightarrow{xy}$ des intervalles ouverts non vides, ces chambres étant ordonnées comme les intervalles correspondants. D'après le choix de x et y, les intervalles $D(i_j) \cap \overrightarrow{xy}$ et $D(i_{j+1}) \cap \overrightarrow{xy}$ ont un point frontière commun, qui est contenu dans l'intersection d'un mur de $D(i_j)$ et d'un mur de $D(i_{j+1})$. Il résulte facilement du lemme 2 et de la proposition 1 que ces murs sont portés par le même hyperplan.

2.- Quelques précisions sur T, $\hat{T}$, $\Gamma(T)$ et $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$. Soit T un tore de dim n, i.e. un groupe algébrique isomorphe à $(K^*)^n$. On a étudié dans l'exposé 4 (n° 3) les relations entre T et son groupe des caractères $\hat{T} = \mathrm{Hom}\,(T,K^*)$, où Hom signifie "homomorphisme de groupes algébriques".

On a vu que $\hat{T}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$, et que T et $\hat{T}$ sont en dualité par rapport à K^*, i.e. que $T = \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, K^*)$, où Hom signifie "homomorphismes de groupes discrets". On en a déduit, par transposition, $\mathrm{Hom}\,(T_1, T_2) \simeq \mathrm{Hom}\,(\hat{T}_2, \hat{T}_1)$, relation valable pour deux tores T_1 et T_2 et leurs duaux $\hat{T}_1$ et $\hat{T}_2$.

Par définition, $\Gamma(T) = \mathrm{Hom}\,(K^*, T)$. Comme $\hat{K}^* \simeq \mathbb{Z}$ (canoniquement), $\Gamma(T) \simeq \mathrm{Hom}\,(\hat{T}, \mathbb{Z})$, ainsi qu'on l'a vu dans l'exposé 9 (n° 5). Ainsi T et $\Gamma(T)$ peuvent être considérés chacun comme le bidual de l'autre, la dualité étant prise par rapport à K^* puis à $\mathbb{Z}$, ou vice versa. Si l'on a deux tores T_1 et T_2, $\mathrm{Hom}\,(T_1, T_2)$ s'identifie, par bitransposition, à $\mathrm{Hom}\,(\Gamma(T_1), \Gamma(T_2))$. On peut dire que $T \to \Gamma(T)$ est un foncteur covariant additif qui applique la catégorie additive des tores sur la catégorie additive des groupes abéliens libres de type fini ; on a de même le foncteur réciproque : $\Gamma(T) \to T$. Il en résulte que le groupe des automorphismes algébriques $\mathrm{Aut}\,(T)$ s'identifie au groupe des automorphismes de groupe discret $\mathrm{Aut}\,(\Gamma(T))$. C'est ainsi que nous ferons opérer le groupe de Weyl d'un tore maximal T sur le groupe $\Gamma(T)$.

Une décomposition de T en produit direct de deux sous-tores entraîne une décomposition de $\Gamma(T)$ en somme directe de deux sous-groupes, et réciproquement. Pour qu'un sous-groupe $H \subset \Gamma(T)$ soit facteur direct, il faut et il suffit que le quotient $\Gamma(T)/H$ soit sans torsion ; un tel H est dit primitif. Le sous-tore de T qui lui correspond est Q, égal à l'adhérence de $\bigcup_{\gamma \in H} \mathrm{Supp}\,\gamma$. Réciproquement, à tout sous-tore Q de T correspond un sous-groupe primitif H de $\Gamma(T)$: $\gamma \in H$ équivaut à $\mathrm{Supp}\,\gamma \subset Q$; Q et H seront dits associés. Soient $H_1, \ldots, H_k$ des sous-groupes primitifs de $\Gamma(T)$, $Q_1, \ldots, Q_k$ les sous-tores associés ; alors $\bigcap_i H_i$ est associé à la composante connexe de l'élément neutre de $\bigcap_i Q_i$.

Au lieu de considérer, comme dans l'exposé 9, l'espace vectoriel $\Gamma^{\mathbb{R}}(T) = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma(T)$, nous introduisons l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$: $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma(T)$, et nous identifions $\Gamma(T)$ à un sous-groupe de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$. Tout $x \in \Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ peut s'écrire sous la forme $(1/n)y$, avec $y \in \Gamma(T)$ et n entier > 0. Soient H un sous-groupe de $\Gamma(T)$, $H^{\mathbb{Q}}$ le sous-espace vectoriel de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ engendré par H ; alors $H = \Gamma(T) \cap H^{\mathbb{Q}}$ si et seulement si H est primitif. Comme tout sous-espace de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ est engendré par son intersection avec $\Gamma(T)$, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre sous-tores de T et sous-espaces de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$.

Enfin nous pouvons identifier le groupe $\mathrm{Aut}\,(\Gamma(T))$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(\Gamma^{\mathbb{Q}}(T))$. C'est ainsi que nous ferons opérer sur $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ le groupe de Weyl d'un tore maximal T .

3.- La décomposition en chambres de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$. On considère un tore maximal T d'un groupe algébrique connexe non résoluble G .

DEFINITION 1. Soient H un sous-espace vectoriel de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ et Q le sous-tore de T associé à H . Nous dirons que H est semi-régulier (resp. régulier, singulier) si Q est semi-régulier (resp. régulier, singulier). Si $x \in \Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$, nous dirons que x est semi-régulier (resp. etc.) si le sous-espace qu'il engendre $\mathbb{Q}x$ est semi-régulier (resp. etc.).

Lorsque $x = \gamma \in \Gamma(T)$, cette définition coïncide avec la précédente (exp. 10, fin du n° 2). En effet, Supp γ est le sous-tore associé au sous-espace $\mathbb{Q}x$ de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$.

LEMME 3. Si un sous-espace vectoriel H de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ est semi-régulier, l'ensemble des éléments semi-réguliers de H est dense dans H .

Le lecteur trouvera la démonstration (d'ailleurs facile) développée à propos de la proposition 3, exposé 9, et de la proposition 4, exposé 10.

DEFINITION 2. Soit $\mathcal{C}(B)$ la chambre de Weyl associée au groupe de Borel $B \supset T$ dans $\Gamma(T)$. Nous appellerons chambre de Weyl associée à B dans $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ l'ensemble $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B)$ des $x \in \Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ tels qu'il existe un entier $n > 0$ avec $nx \in \mathcal{C}(B)$.

Comme tout élément semi-régulier de $\Gamma(T)$ est dans une chambre de Weyl, la réunion des chambres de Weyl $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B)$ est l'ensemble des éléments semi-réguliers de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$.

THEOREME 1.- A tout groupe de Borel $B \supset T$ correspond une chambre de Weyl $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B)$ et une seule. On a $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B) \cap \Gamma(T) = \mathcal{C}(B)$, et $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B)$ est une chambre au sens du n° 1. Les hyperplans limitrophes des chambres $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}(B)$ sont les hyperplans singuliers de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$; ils sont associés aux sous-tores *singuliers de cod. 1 de T. Tout sous-espace singulier de $\Gamma^{Q}(T)$ est contenu dans l'un de ces hyperplans limitrophes, dont la réunion est l'ensemble des éléments singuliers de $\Gamma^{Q}(T)$.*

DEMONSTRATION. D'après les propositions 9 et 10 de l'exposé 10, à tout groupe de Borel $B \supset T$ est associée une chambre de Weyl et une seule $\mathcal{C}(B)$ dans $\Gamma(T)$, et celle-ci est définie comme l'ensemble des points où un nombre fini de formes linéaires sont strictement positives. Il en résulte que $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B)$ est défini par le même système d'inégalités strictes, et que $\mathcal{C}(B) =$
$= \widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B) \cap \Gamma(T)$.

Soit $\{L_i(\gamma) > 0\}$ un système minimal d'inégalités définissant une chambre de Weyl $\mathcal{C}(B)$ et la chambre étendue $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B)$. Si l'on se reporte au critère de semi régularité pour les éléments de $\Gamma(T)$ (précédant la proposition 7 de l'exposé 10), on voit que tout point frontière de $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B)$ est singulier. Tout hyperplan limitrophe d'une chambre contient un mur, donc un ensemble relativement ouvert non vide d'éléments singuliers. D'après le lemme 3, cet hyperplan est singulier.

La réunion des chambres de Weyl $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B)$ et de leurs hyperplans limitrophes est fermée dans $\Gamma^{Q}(T)$. L'ensemble complémentaire est vide ; sinon il contiendrait un élément semi-régulier qui serait contenu dans l'une des chambres. Enfin tout sous-espace singulier est une variété irréductible de $\Gamma^{Q}(T)$; puisqu'il est contenu dans la réunion des hyperplans singuliers, il est contenu dans l'un d'eux.

La décomposition de $\Gamma^{Q}(T)$ peut être résumée ainsi : soient, comme au n° 1, $\{L_i^{o}\}$ les hyperplans singuliers, L_i^{+} et L_i^{-} les deux demi-espaces ouverts séparés par L_i^{o}. Alors les chambres de Weyl sont les parties non vides de la forme $\bigcap_i L_i^{\varepsilon(i)}$, où chaque $\varepsilon(i)$ est l'un des signes $+$ ou $-$. Il résulte alors de la proposition 1 que les murs des chambres de Weyl sont les parties non vides de la forme $L_i^{o} \cap \bigcap_{j \neq i} L_j^{\varepsilon(j)}$, où chaque $\varepsilon(j)$ est l'un des signes $+$ ou $-$. L'énoncé suivant en résulte.

COROLLAIRE. Si 2 chambres de Weyl $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B)$ et $\widetilde{\mathcal{C}}^{Q}(B')$ sont telles que les réunions respectives de leurs murs aient une intersection non vide, ces 2 chambres ont exactement un mur commun et sont situées de part et d'autre de l'hyperplan limitrophe commun. Chaque mur est commun à deux chambres.

LEMME 4.- Soit H un sous-espace vectoriel de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$, Q le sous-tore de T associé. Pour qu'un automorphisme de T induise l'identité sur Q , il faut et il suffit que l'automorphisme associé de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ induise l'identité sur H .

Résultat évident, si l'on se rappelle que pour $\gamma \in \Gamma(T)$ et un automorphisme σ de T , $\sigma\gamma$ est défini par $(\sigma\gamma)(\theta) = \sigma(\gamma(\theta))$ et que la réunion des Supp γ pour $\gamma \in H \cap \Gamma(T)$ est dense dans Q .

THEOREME 2. Soient H un hyperplan singulier de $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$, Q le tore singulier de codim 1 associé. Il existe une opération et une seule w du groupe de Weyl $\mathfrak{W}$ qui est distincte de 1 (élément neutre de $\mathfrak{W}$) et induit l'identité sur H (resp. sur Q) ; cette opération est involutive, et sera dite la symétrie par rapport à H (ou à Q). $\Gamma^{\mathbb{Q}}(T)$ est somme directe de l'hyperplan H et de la droite "orthogonale" H_1 ; on a $w(x) + x = 0$ pour tout $x \in H_1$. T est produit (non nécessairement direct) de Q et du sous-tore "orthogonal" Q_1 de dim 1 , associé à H_1 ; on a $w(t)t = e$ pour tout $t \in Q_1$, donc $w(t)t \in Q$ pour tout $t \in Q$. Le groupe de Weyl est engendré par les symétries par rapport aux hyperplans limitrophes d'une chambre de Weyl donnée.

DEMONSTRATION. Les opérations sur T de $\mathfrak{W}$ sont induites par les automorphismes intérieurs de G associés aux éléments du normalisateur N de T . Pour que $w : t \to sts^{-1}$ soit l'identité sur un tore $Q \subset T$, il faut et il suffit que $s \in Z(Q)$, centralisateur de Q . Suivant que Q est ou non semi-régulier, $Z(Q)$ est ou non résoluble (exposé 10, proposition 2) , et le normalisateur de T dans $Z(Q)$ (i.e. $Z(Q) \cap N$) est confondu ou non avec son centralisateur (exposé 10, proposition 6). De là résulte l'existence d'au moins un élément de $\mathfrak{W}$ distinct de 1 et induisant l'identité sur un tore singulier Q de codim 1 , i.e. sur l'hyperplan singulier H associé. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux chambres ayant un mur commun dans H . On a $w\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$ ou $w\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Mais $w\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$ impliquerait que $w = 1$, puisque $\mathfrak{W}$ opère d'une manière simplement transitive sur les chambres. Donc $w\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$. Si w' est un autre élément $\neq 1$ de $\mathfrak{W}$ conservant ponctuellement H , on a $(ww')\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1$, donc $ww' = 1$; en particulier : $w^2 = 1$ et $w = w'$.

$\Gamma^{Q}(T)$ est alors somme directe de H et de H_1 , noyau de $1+w$. Si Q_1 est le sous-tore de T associé à H_1 , Q_1 est de dim 1 , $Q \cap Q_1$ est fini (car $H \cap H_1 = 0$) donc QQ_1 est un tore contenu dans T , contenant strictement Q , donc égal à T . Si $\gamma \in H_1 \cap \Gamma(T)$, $w(\gamma) = -\gamma$, autrement dit $w(\gamma(\theta)) = (\gamma(\theta))^{-1}$ pour $\theta \in K^*$, i.e. $w(t) = t^{-1}$ pour $t \in Q_1$.

Soient $\mathcal{C}$ une chambre de Weyl, $H_1, \ldots, H_s$ ses hyperplans limitrophes, $w_1, \ldots, w_s$ les symétries correspondantes, $\mathfrak{W}_0 \subset \mathfrak{W}$ le sous-groupe qu'elles engendrent. Pour établir que $\mathfrak{W}_0 = \mathfrak{W}$, il suffit de montrer que $\mathfrak{W}_0$ opère transitivement sur les chambres. Or soient $w \in \mathfrak{W}_0$, $\mathcal{C}' = w\mathcal{C}$, H' un hyperplan limitrophe de C' ; $w^{-1}H'$ est un hyperplan limitrophe de C , soit H_i ; ww_iw^{-1} est la symétrie par rapport à H' et $ww_i\mathcal{C}$ est la chambre symétrique de $\mathcal{C}'$ par rapport à H' . Il résulte alors de la proposition 2 et du théorème 1 que $\mathfrak{W}_0$ opère transitivement sur les chambres.

4.- <u>Où l'on retrouve les schémas de Dynkin</u>. Prenons sur $\Gamma^{Q}(T)$ une métrique définie positive, invariante par $\mathfrak{W}$. Les symétries par rapport aux hyperplans limitrophes sont alors des symétries au sens usuel. Notons $\langle x,y \rangle$ le produit scalaire dans $\Gamma^{Q}(T)$.

Soient $\mathcal{C}$ une chambre de Weyl, $H_1, \ldots, H_s$ ses hyperplans limitrophes. Associons à chaque vecteur H_i un vecteur v_i bien déterminé par les conditions suivantes : $v_i \in \Gamma(T)$ est un générateur de $\Gamma(T) \cap H_i'$, où H_i' désigne la droite de $\Gamma^{Q}(T)$ orthogonale à H_i , et $\langle v_i, x \rangle > 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. La symétrie w_i par rapport à H_i s'écrit alors :

$$w_i \ : x \longrightarrow x - 2 \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \ .$$

En effet, $w_i(x) - x \in H_i'$ et $w_i(x) + x \in H_i$. Comme $\mathfrak{W}$ conserve $\Gamma(T)$, il en résulte que :

$$- 2 \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \in \Gamma(T) \quad \text{pour tout } x \in \Gamma(T) \text{ , donc que}$$

$$- 2 \frac{\langle v_i, x \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \quad \text{est entier .}$$

En particulier, $a_{ij} = -2\,\frac{\langle v_i, v_j\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \in \mathbb{Z}$ pour tout i , j . Montrons que $a_{ij} \geqslant 0$ pour $i \neq j$. En effet, $w_i(v_j)$ est orthogonal à l'hyperplan limitrophe $w_i H_j$, donc $\langle w_i(v_j), x\rangle = \langle v_j + a_{ij}v_i, x\rangle$ garde un signe constant pour $x \in \mathcal{C}$.

On ne peut avoir $\langle v_j + a_{ij}v_i, x\rangle < 0$ pour $x \in \mathcal{C}$, car a_{ij} devrait être strictement négatif, et les inégalités :

$$\langle(-a_{ij})v_i - v_j, x\rangle > 0 \ ; \ \langle v_k, x\rangle > 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i \ .$$

impliqueraient $\langle v_i, x\rangle > 0$. D'après la proposition 1, l'hyperplan H_i ne serait pas limitrophe. On a donc $\langle v_j + a_{ij}v_i, x\rangle > 0$ pour $x \in \mathcal{C}$.

Si $a_{ij} < 0$, les inégalités :

$$\langle v_j + a_{ij}v_i, x\rangle > 0 \quad ; \quad \langle v_k, x\rangle > 0 \quad \text{pour} \quad k \neq j \ .$$

impliqueraient $\langle v_j, x\rangle > 0$. Pour la même raison, H_j ne serait pas limitrophe. Ainsi $a_{ij} \geqslant 0$.

Montrons enfin que les s vecteurs v_i sont linéairement indépendants. Une relation non triviale de dépendance linéaire $\sum_i n_i v_i$ $(n_i \in \mathbb{Q})$ peut s'écrire $\sum_\alpha n_\alpha v_\alpha = \sum_\beta n_\beta v_\beta$, avec des n_α et $n_\beta > 0$, α et β parcourant des ensembles d'indices disjoints. Mais alors :

$$0 \leqslant \langle \sum n_\alpha v_\alpha \ , \ \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha\rangle = \langle \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha \ , \ \sum_\beta n_\beta v_\beta\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta \langle v_\alpha, v_\beta\rangle \leqslant 0 \ .$$

Donc, $\sum_\alpha n_\alpha v_\alpha = 0$. Mais, pour $x \in \mathcal{C}$, $\langle \sum_\alpha n_\alpha v_\alpha, x\rangle = \sum_\alpha n_\alpha \langle v_\alpha, x\rangle > 0$ d'où contradiction.

En conclusion nous avons obtenu une famille de vecteurs linéairement indépendants v_i , tels que $-2\,\frac{\langle v_i, v_j\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$ soit un entier $\geqslant 0$ pour tous $i \neq j$. Une telle famille se décompose en sous-familles deux à deux orthogonales, où chaque sous-famille est isomorphe (à un facteur constant près si on veut normer la métrique) au système des racines simples d'une algèbre de Lie simple (en caractéristique 0). Le lecteur trouvera la classification de ces familles de vecteurs dans l'exposé 13 du Séminaire "Sophus-Lie" (E.N.S. 1954/55).