Séminaire Claude Chevalley

C. Chevalley

Les tores singuliers

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 10, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A10_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57
-:-:-:-

LES TORES SINGULIERS.

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 11.2.1957)

1.- Cinq lemmes.

LEMME 1.- *Soient* U , V *et* W *des variétés,* f *un morphisme de* $U \times V$ *dans* W , A *une partie fermée de* V *et* B *une partie fermée de* W *telle que* $f(U \times A) \subset B$; *si* A' *est une composante irréductible de* A , $f(U \times A')$ *est contenu dans une composante irréductible de* B .

Cet ensemble est en effet irréductible comme image continue d'un ensemble irréductible $U \times A'$.

COROLLAIRE.- *Soit* G *un groupe algébrique irréductible qui opère dans une variété* V (i.e. *on a un morphisme* $(s, y) \to s.y$ *de* $G \times V$ *dans* V *tel que* $s.(s'.y) = ss'.y$ *si* $s, s' \in G$, $y \in V$, *et* $e.y = y$ *si* e *est l'élément neutre de* G). *Si les applications* $y \to s.y$ *transforment toutes en elle-même une certaine partie fermée* A *de* V , *elles transforment en elle-même toute composante irréductible* A' *de* A .

En effet, les points $s.y$ $(s \in G , y \subset A')$ sont contenus dans une même composante irréductible de A (lemme 1) qui, contenant $y = e.y$ pour tout $y \in A'$, est identique à A' .

LEMME 2.- *Soient* Q *et* T *des tores et* U *une variété ; soit pour chaque* $u \in U$ f_u *un homomorphisme rationnel de* Q *dans* T . *Supposons que, pour tout* $z \in Q$, $u \to f_u(z)$ *soit un morphisme de* U *dans* T . *Alors* f_u *ne dépend pas de* u.

Soit z un point d'ordre fini m de Q ; $f_u(z)$ est un point d'ordre fini diviseur de m , donc reste dans un ensemble fini ; comme l'ensemble des $f_u(z)$ pour $u \in U$ est irréductible, il se réduit à un point. Soit A l'ensemble des éléments d'ordres finis de Q ; il est dense dans Q . Si u , $u' \in U$, les applications continues f_u , $f_{u'}$, qui coincident sur A sont égales.

Rappelons que le corps K , muni de sa structure de variété, peut être plongé dans une variété complète D , la droite projective qui se déduit de K par adjonction d'un point noté ∞ , et qui est isomorphe à l'espace projectif associé à l'espace vectoriel K^2 .

LEMME 3.- *Toute fonction* f *sur la droite projective à valeurs dans une variété complète* V *est partout définie.*

Si D_0 est l'ensemble de définition de f , $a \to (a, f(a))$ est un morphisme g de D_0 dans $D \times V$; l'adhérence Φ de l'image de D_0 par ce morphisme est une sous-variété fermée de $D \times V$; si p est le morphisme de Φ induit par la projection $D \times V \to D$, $p^{-1}(a)$ est fini pour tout $a \in D$ puisque Φ est de dimension 1 ; de plus, le cohomomorphisme de p est un isomorphisme du corps F_D sur le corps F_Φ , car $p \odot g$ (resp. $g \odot p$) est l'application identique de D (resp. Φ). Comme D est normale, p est un isomorphisme de Φ sur une sous-variété $p(\Phi)$ de D (exposé 5 , théorème 2) ; or Φ , qui est une sous-variété fermée de la variété complète $D \times V$, est complète ; $p(\Phi)$ est donc fermé, d'où $p(\Phi) = D$; le lemme 3 résulte immédiatement de là.

LEMME 4.- *Toute fonction numérique* u *partout définie sur une variété complète* V *est constante.*

On peut considérer u comme un morphisme de V dans la droite projective D ; comme V est complète, $u(V)$ est une partie fermée irréductible de D qui ne contient pas le point ∞ et se réduit par suite à un point.

LEMME 5.- *Soient* $\mathfrak{P}(V)$ *l'espace projectif associé à un espace vectoriel* V *de dimension finie et* W *une sous-variété fermée de dimension* $d > 0$ *de* $\mathfrak{P}(V)$. *Si* H *est un hyperplan de* $\mathfrak{P}(V)$, $W \cap H$ *est non vide, et toute composante irréductible de cet ensemble est de dimension* $\geq d - 1$.

Soit φ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathfrak{P}(V)$. Si λ , μ sont des formes linéaires sur V , $\mu \neq 0$, il y a une fonction numérique λ/μ sur $\mathfrak{P}(V)$ définie en tout point $\varphi(x)$ tel que $\mu(x) \neq 0$ et y prenant la valeur $\lambda(x)(\mu(x))^{-1}$. Prenons pour μ une forme linéaire $\neq 0$ nulle sur $\varphi^{-1}(H)$. Ecartons le cas trivial où $W \subset H$; comme W ne se réduit pas à un point, il y a une forme linéaire λ sur V telle que λ/μ (qui est définie en au moins un point de W) induise une fonction non constante sur W ; il y a un point de W où cette fonction n'est pas définie (lemme 4) , d'où $W \cap H \neq \emptyset$. Soit x_o tel que $\varphi(x_o) \in W \cap H$, et soit ν une forme linéaire sur V telle que $\nu(x_o) \neq 0$; soit W_o l'ensemble des points de W en lesquels μ/ν est définie. Alors $W_o \cap H$ est l'image réciproque de 0 par le morphisme de W_o dans K induit par μ/ν ; les composantes irréductibles de cet ensemble sont donc de dimensions $\geqslant d-1$.

2.- Les groupes de Borel qui contiennent un tore.

Soit G un groupe algébrique affine et soit Q un tore contenu dans G. Soit B_o un groupe de Borel de G ; les groupes de Borel de G sont donc les stabilisateurs des points de G/B_o ; ceux qui contiennent Q sont les stabilisateurs des points de G/B_o invariants par Q.

PROPOSITION 1.- Les points de G/B_o invariants par Q forment un ensemble fermé E. Soit Z le centralisateur de Q ; si E_1 est une composante irréductible de E, les points de E_1 sont transformés transitivement entre eux par les opérations de Z ; leurs stabilisateurs dans Z sont les groupes de Borel de Z ; si C est l'un de ces groupes, on a $\dim. E_1 = \dim. Z/C$. Si T est un tore maximal contenant Q, E_1 contient un point dont le stabilisateur contient T.

Il est évident que E est fermé et que les opérations de Z permutent entre eux les points de E. Comme Z est connexe (exposé 6 , théorème 6 a)) , les opérations de Z permutent entre eux les points de E_1 (corollaire au lemme 1). Soit f l'application canonique $G \to G/B_o$; $U = f^{-1}(E_1)$ est alors une sous-variété fermée de G (exposé 9 , lemme 3). Si $u \in E$, on a $Q \subset uB_ou^{-1}$, d'où $u^{-1}Qu \subset B_o$. Soit B_o^u le groupe des éléments unipotents de B_o ; B_o/B_o^u est alors un tore ; si h est l'application canonique de B_o sur B_o/B_o^u, $(u , x) \to h(u^{-1}xu)$ est un morphisme de $U \times Q$ dans B_o/B_o^u ; lui appliquant le lemme 2 , on voit qu'il ne dépend pas de u. Il en résulte que le groupe D engendré par B_o^u et $u^{-1}Qu$ ne dépend pas de u ; les $u^{-1}Qu$ en sont des tores maximaux, et sont par suite conjugués les uns des autres dans D. Soit u_1 un point quelconque de U ; posons $Q_1 = u_1^{-1}Qu_1$. Alors, pour tout $u \in U$, il existe un élément $b(u) \in B_o^u$ tel que

$u^{-1}Qu = b(u)Q_1\ (b(u))^{-1}$; de plus, si $x \in Q$, on a $u^{-1}xu \equiv u_1^{-1}xu_1 \pmod{B_o^u}$

et par suite aussi $(ub(u))^{-1}x(ub(u)) \equiv u_1^{-1}xu_1 \pmod{B_o^u}$; comme ces deux éléments appartiennent à Q_1, ils sont égaux, d'où $ub(u) = z(u)u_1$ avec un $z(u) \in Z$. Comme $b(u)$ appartient à B_o, on a $f(ub(u)) = f(u)$, d'où $f(u) = z(u).x_1$ si $x_1 = f(u_1)$. Comme $f(U) = E_1$, on a $E_1 = Z.x_1$, ce qui montre que les opérations de Z transforment transitivement entre eux les points de E_1. Si C est un groupe de Borel de Z, les opérations de C laissent invariant un point x au moins de E_1, puisque E_1 est une variété complète et C résoluble. Les opérations de Z qui laissent x fixe sont celles de l'intersection de Z avec le stabilisateur de x dans G, qui est un groupe résoluble ; elles forment donc un sous-groupe résoluble de Z qui, contenant C, lui est identique (exposé 9, corollaire 2 au théorème 1). On en déduit par passage aux quotients un morphisme bijectif de Z/C sur E_1, d'où $\dim E_1 = \dim Z/C$. Tout tore maximal contenant Q est contenu dans Z, donc dans au moins un groupe de Borel de Z, ce qui démontre la dernière assertion.

REMARQUE.- Il faut se garder de croire que les composantes irréductibles de E sont transformées transitivement entre elles par les opérations du normalisateur de Q ; il n'en est pas ainsi, comme on le voit par des exemples simples.

DEFINITION 1.- Un tore Q de G s'appelle régulier s'il contient au moins un point régulier de G, semi-singulier s'il n'est contenu que dans un nombre fini de groupes de Borel de G, singulier s'il est contenu dans une infinité de groupes de Borel de G.

PROPOSITION 2.- Pour qu'un tore soit semi-régulier, il faut et suffit que son centralisateur soit résoluble.

Cela résulte immédiatement de la proposition 1.

COROLLAIRE.- Un tore régulier est semi-régulier.

Si un tore Q contient un élément régulier s, son centralisateur est contenu dans celui de s, qui est le centralisateur d'un tore maximal et est par suite nilpotent, donc résoluble.

PROPOSITION 3.- Si Q est un tore semi-régulier contenu dans le tore maximal T, tout groupe de Borel qui contient Q contient T.

Soit B_o un groupe de Borel. L'ensemble E des points de G/B_o

invariants par Q est fini. Comme T est commutatif, les opérations de T transforment E en lui-même, donc transforment chaque point de E en lui-même (corollaire au lemme 1).

PROPOSITION 4.- Pour qu'un tore Q soit semi-régulier (resp. régulier), il faut et suffit qu'il contienne un tore de dimension 0 ou 1 qui soit semi-régulier (resp. régulier).

La condition est évidemment suffisante. L'ensemble Q_o des points de Q dont les centralisateurs sont égaux à celui de Q contient un ensemble relativement ouvert non vide dans Q. On peut en effet supposer que le groupe G est un groupe algébrique de matrices et que les éléments de Q sont des matrices diagonales ; si $t \in Q$, soient $a_1(t), \dots, a_n(t)$ les coefficients diagonaux de la matrice t. Le centralisateur de Q se compose des matrices $(b_{ij}) \in G$ telles que $b_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que l'on n'ait pas $a_i(t) = a_j(t)$ pour tout $t \in Q$. Or il y a une partie ouverte non vide Q_o de Q telle que, si $t \in Q_o$, la condition $a_i(t) = a_j(t)$ entraîne que $a_i(t') = a_j(t')$ pour tout $t' \in Q$.

Il y a donc un groupe à un paramètre γ de Q tel que Supp γ rencontre Q_o (exposé 9, proposition 3), d'où le résultat.

Nous dirons qu'un groupe à un paramètre d'un tore de G est régulier (resp. semi-régulier, singulier) si le tore Supp γ est régulier (resp. semi-régulier, singulier).

3.- Groupes à un paramètre semi-réguliers.

Soient G un groupe algébrique affine et Ω une variété complète sur laquelle opère G. Soient T un tore maximal de G, γ un groupe à un paramètre de T et x un point de Ω ; le morphisme $\theta \longrightarrow \gamma(\theta).x$ de K^* dans Ω se prolonge en un morphisme de la droite projective dans Ω qui applique les points 0 et ∞ sur des points que nous désignerons par $\gamma(0).x$ et $\gamma(\infty).x$ respectivement. Il résulte immédiatement de la formule $\gamma(\theta\theta').x = \gamma(\theta).(\gamma(\theta').x)$ que les points $\gamma(0).x$, $\gamma(\infty).x$ sont invariants par les opérations de Supp γ. Ceci dit, supposons que $\Omega = G/B_o$ où B_o est un groupe de Borel de G. Alors le stabilisateur de $\gamma(0).x$ est un groupe de Borel contenant Supp γ. Réciproquement, si x est un point de Ω invariant par les opérations de Supp γ, on a $x = \gamma(0).x$; les groupes de Borel contenant Supp γ sont donc les stabilisateurs des points $\sigma(0).x$, où x parcourt les points de Ω ; pour que σ soit semi-régulier, il faut et suffit que l'ensemble des $\sigma(0).x$ soit fini. Pour étudier cet ensemble, nous allons utiliser une représentation linéaire de G .

PROPOSITION 5.- *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique affine G . Il existe alors une représentation rationnelle ρ de G et un point $e \neq 0$ de l'espace V de ρ tels que H soit l'ensemble des $s \in G$ tels que $\rho(s)$ transforme l'espace Ke en lui-même.*

Soit P l'algèbre des fonctions numériques partout définies sur G , et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal des fonctions de P nulles sur H . Si $s \in G$, $u \in P$, on désigne par $\sigma(s).u$ la fonction $t \to u(ts)$. Tout sous-espace de dimension finie de P est contenu dans un sous-espace de dimension finie qui est stable par les opérations $\sigma(s)$ (exposé 4). Il existe donc un sous-espace P_1 de dimension finie de P , stable par les $\sigma(s)$, qui contient un ensemble de générateurs de $\mathfrak{a}$. Soit $d = \dim(P_1 \cap \mathfrak{a})$; soient V la puissance extérieure d-ième de P_1 et, pour $s \in G$, $\rho(s)$ la puissance extérieure d-ième de la restriction de $\sigma(s)$ à P_1 ; soit e le produit extérieur des éléments d'une base de $P_1 \cap \mathfrak{a}$. Pour qu'un élément s appartienne à H , il faut et suffit que $\sigma(s)$ transforme $\mathfrak{a}$ en lui-même, ou encore transforme $P_1 \cap \mathfrak{a}$ en lui-même, donc que $\rho(s)$ transforme Ke en lui-même.

REMARQUE.- Prenant P_1 de telle manière que P_1 contienne 1 et un ensemble de générateurs de P , on voit facilement que la représentation ρ construite dans la démonstration précédente est fidèle.

COROLLAIRE.- *Soient G un groupe algébrique affine et B_o un groupe de Borel de G . Il existe une représentation rationnelle ρ de G , d'espace V et un morphisme bijectif ξ de G/B_o sur une sous-variété fermée Ω de l'espace projectif $\mathfrak{P}(V)$ associé à V qui possèdent la propriété suivante : si on désigne, pour $s \in G$, par $\rho^*(s)$ l'automorphisme de $\mathfrak{P}(V)$ défini par $\rho(s)$, on a, pour tout $x \in G/B_o$ et tout $s \in G$, $\xi(s.x) = \rho^*(s).\xi(x)$. On peut de plus supposer que Ω n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathfrak{P}(V)$.*

Appliquons en effet la proposition 4 en prenant $H = B_o$. L'espace engendré par les transformés de e par les opérations de G est stable par G ; on peut donc supposer que c'est V tout entier. Soit φ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathfrak{P}(V)$; le groupe de stabilité du point $e^* = \varphi(e)$ est B_o. Le morphisme $s \longrightarrow \rho^*(s).e^*$ définit donc par passage aux quotients un morphisme bijectif ξ de G/B_o dans $\mathfrak{P}(V)$; comme G/B_o est complet, $\Omega = \xi(G/B_o)$ est une sous-variété fermée de $\mathfrak{P}(V)$; il est clair que Ω n'est contenu dans aucun hyperplan de $\mathfrak{P}(V)$. Si $x = tB_o$, $t \in G$, on a $s.x = stB_o$,

$$\xi(s.x) = \rho^*(st).e^* = \rho^*(s).(\rho^*(t).e^*) = \rho^*(s).\ \xi(x)\ .$$

Les notations étant celles du corollaire précédent, soit de plus T un tore maximal de G. Il y a une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que l'on ait, pour $t \in T$,

$$\rho(t).e_i = \chi_i(t)e_i \qquad (1 \leq i \leq n)\ ,$$

les χ_i étant des caractères rationnels de T, qui peuvent être considérés comme des formes linéaires sur le groupe $\Gamma(T)$ des groupes à un paramètre de T. Si $\gamma \in \Gamma(T)$, on a

$$\rho(\gamma(\theta)).\ \textstyle\sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n a_i \theta^{c_i} e_i \quad (\theta \in K^*),\ \text{avec}\ c_i = \chi_i(\gamma).$$

Cette formule permet de déterminer explicitement $\gamma(0).x^*$ si x^* est un point quelconque de $\mathfrak{P}(V)$. Soit φ l'application canonique de l'ensemble des éléments $\neq 0$ de V sur $\mathfrak{P}(V)$, et soit $x^* = \varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$; posons $\varepsilon_i(\gamma, x) = 1$ si on a $a_i \neq 0$ et $\chi(\gamma) \leq \chi_j(\gamma)$ pour tout j tel que $a_j \neq 0$, $\varepsilon_i(\gamma, x) = 0$ dans le cas contraire. On a alors

$$\gamma(0).x^* = \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^n a_i\ \varepsilon_i(\gamma, x)e_i)\ .$$

On peut de même déterminer $\gamma(\infty).x^*$: on pose alors $\varepsilon'_i(\gamma, x) = 1$ si $a_i \neq 0$ et $\chi_i(\gamma) \geqslant \gamma_j(\chi)$ pour tout j tel que $a_j \neq 0$ et $\varepsilon'_i(\gamma, x) = 0$ dans le cas contraire, et on a

$$\gamma(\infty).x^* = \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^n a_i\ \varepsilon'_i(\gamma, x)e_i)\ .$$

On ne peut avoir $\gamma(0).x^* = \gamma(\infty).x^*$ que si les $\chi_i(\gamma)$ pour tous les i tels que $a_i \neq 0$ sont égaux, auquel cas on a $\gamma(\theta).x^* = x^*$. On déduit de là le résultat suivant :

PROPOSITION 6.- *Soient G un groupe algébrique affine, B_o un groupe de Borel de G et T un tore maximal de G. Si W est une sous-variété fermée de G/B_o invariante par T, et si $\dim W > 0$, W contient au moins deux points distincts invariants par T.*

Soit γ un groupe à un paramètre semi-régulier de T. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de G/B_o invariants par T, ou, ce qui revient au même (proposition 3) par Supp γ, il y a un point $x \in W$ tel que l'application $\theta \to \gamma(\theta).x$ ne soit pas constante. Les points $\gamma(0).x$ et $\gamma(\infty).x$ sont alors des points distincts de W invariants par T.

COROLLAIRE.- *Si G est un groupe algébrique affine non résoluble, tout tore maximal de G est contenu dans au moins deux groupes de Borel.*

Revenons maintenant aux notations utilisées plus haut, et cherchons à quelle condition γ est semi-régulier. Soit $\chi(\gamma)$ le plus petit des $\chi_i(\gamma)$, et soit I l'ensemble des i tels que $\chi(\gamma) = \chi_i(\gamma)$. Supposons d'abord que I ne comporte qu'un seul élément i_o. Soit Ω_o l'ensemble des $\varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$ tels que $a_{i_o} \neq 0$; c'est une partie ouverte non vide de Ω (car Ω n'est contenu dans aucun hyperplan), et on a $\gamma(0).x^* = \varphi(e_{i_o})$ pour tout $x^* \in \Omega_o$, $\gamma(0).x^* \neq \varphi(e_{i_o})$ si $x^* \in \Omega - \Omega_o$. On en conclut que $\varphi(e_{i_o})$ est alors isolé dans l'ensemble des $\gamma(0).x^*$ $(x^* \in \Omega)$, donc que γ est semi-régulier (proposition 1). Supposons au contraire que I contienne deux indices distincts i_o et i_1 ; si c est un élément quelconque de K, il y a des points x^* de Ω tels que x^* soit de la forme $\varphi(\sum_{i=1}^n a_i e_i)$ avec $a_{i_o} \neq 0$, $a_{i_1} \neq 0$, $a_{i_1} \neq c a_{i_o}$: on en conclut immédiatement que l'ensemble des $\gamma(0).x^*$, $x^* \in \Omega$, est infini, donc que γ est singulier. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 7. - *Soient G un groupe algébrique affine, B_o un groupe de Borel de G, d la dimension de G/B_o, T un tore maximal de G, γ un groupe à un paramètre de T. Il y a un point x_o et un seul de G/B_o qui possède la propriété suivante : l'ensemble U_o des $x \in G/B_o$ tels que $\gamma(0).x = x_o$ est dense dans G/B_o. L'ensemble U_o est alors ouvert ; si $d > 0$, $G/B_o - U_o$ est un ensemble non vide dont les composantes irréductibles sont de dimension* $d-1$.

La dernière assertion rédulte du lemme 5.

COROLLAIRE.- *Si G/B_o est de dimension > 1, tout tore maximal de G est contenu dans au moins trois groupes de Borel.*

Observons en effet que, si $t \in T$, t commute avec les éléments de Supp γ , d'où il résulte immédiatement que $t.(\gamma(0).x^*) = \gamma(0).(t.x)$ pour tout $x \in G/B_o$. Si $x \in U_o$, on a $\gamma(0).x = x_o$, $x_o = t.x_o$, d'où $t.x \in U_o$; chaque composante irréductible de $G/B_o - U_o$ est donc invariante par T (corollaire au lemme 1) et contient par suite au moins deux points invariants par T (proposition 6).

Les notations étant celles de la proposition 7 , désignons par $B(\gamma)$ le stabilisateur de x_o ; nous avons donc attaché intrinsèquement à tout élément semi-régulier γ de $\Gamma(T)$ un groupe de Borel $B(\gamma)$ contenant T .

DÉFINITION 2.- Soit $\Gamma_{sr}(T)$ l'ensemble des groupes à un paramétre semi-réguliers de T . Pour tout groupe de Borel B contenant T , soit $\mathfrak{C}(B)$ l'ensemble des $\gamma \in \Gamma_{sr}(T)$ tels que $B(\gamma) = B$; les ensembles non vides de la forme $\mathfrak{C}(B)$ sont appelés les chambres de $\Gamma(T)$; si $\mathfrak{C}(B) \neq \emptyset$, $\mathfrak{C}(B)$ est appelé la chambre associée à B .

Nous verrons d'ailleurs que $\mathfrak{C}(B) \neq \emptyset$ pour tout groupe de Borel B contenant T .

PROPOSITION 8.- Soit G un groupe algébrique affine non résoluble, et soit T un tore maximal de G . Il existe alors un tore singulier contenu dans T et de codimension 1 dans T .

Reprenons en effet les notations utilisées plus haut ; soit x^* un point quelconque de Ω et soit W l'adhérence de $T.x^*$. Le sous-espace X de V engendré par $\varphi^{-1}(W)$ est stable par les opérations de $\rho(T)$; il a donc une base $(e'_1 , \dots , e'_m)$ telle que les sous-espaces Ke'_i soient stables par $\rho(T)$. Supposons que W soit de dimension $\delta > 0$: on peut considérer W comme une sous-variété fermée de l'espace projectif $\mathfrak{P}(X)$ associée à X ; l'image par φ du sous-espace de X engendré par $e'_2 , \dots , e'_m$ est unhyperplan H de $\mathfrak{P}(X)$ qui ne contient pas W et qui est invariant par T . Toute composante irréductible A de $H \cap W$ est invariante par T (corollaire au lemme 1) et est de dimension $\delta - 1$ (lemme 5). Si $\delta > 1$, les points de A , qui sont en nombre infini, ne sont pas tous invariants par T , et A contient un point x^* tel que Tx^* soit de dimension > 0 mais $< \delta$. Ce raisonnement montre que G/B_o contient un point x^* tel que l'adhérence de Tx^* , que nous désignerons maintenant par W , soit de dimension 1 .

Soit S_o la composante de l'élément neutre dans le groupe des éléments de T qui laissent x^* fixe ; il y a alors un morphisme de T/S_o sur Ts^* tel que l'image réciproque de x^* par ce morphisme soit finie ; T/S_o est donc de dimension 1 . Comme T est commutatif, tous les points de Tx^* sont invariants par S_o , ce qui montre que S_o est singulier.

COROLLAIRE.- <u>Tout tore singulier contenu dans</u> T <u>est contenu dans un tore singulier contenu dans</u> T <u>et de codimension</u> 1 <u>dans</u> T .

Soient Q un tore singulier contenu dans T et Z son centralisateur : Z n'est donc pas résoluble, et T en est un tore maximal. Il y a un tore S contenu dans T , de codimension 1 dans T et qui est singulier relativement au groupe Z . Le centralisateur de S dans Z est le même que celui de SQ , puisque Q est dans le centre de Z ; il n'est pas résoluble, d'où $SQ \neq T$; comme S est de codimension 1 et SQ connexe, il s'en suit que $Q \subset S$. Par ailleurs le centralisateur de S dans G contient son centralisateur dans Z et n'est par suite pas résoluble, ce qui montre que S est un tore singulier dans G .

Observons maintenant que le groupe de Weyl W de T opère de manière naturelle dans $\Gamma(T)$; si s est une opération du normalisateur N de T et $\gamma \in \Gamma(T)$, l'application $\theta \longrightarrow s\,\gamma(\theta)s^{-1}$ est encore un groupe à un paramètre de T , que nous désignerons par $s.\gamma$; il est clair que $\gamma \longrightarrow s.\gamma$ est un automorphisme du groupe $\Gamma(T)$ qui ne dépend que de la classe w de s modulo le centralisateur de T ; aussi poserons nous $w.\gamma = s.\gamma$. L'application qui à tout $w \in W$ fait correspondre l'automorphisme $\gamma \longrightarrow w.\gamma$ est un homomorphisme de W dans le groupe des automorphismes de $\Gamma(T)$. Cet homomorphisme est injectif. En effet, si $w.\gamma = \gamma$, et si s est un représentant de w , s commute avec tous les éléments de Supp γ ; comme la réunion des Supp γ est dense dans T (exposé 9 , proposition 3), on voit que, si $w.\gamma = \gamma$ pour tout γ , s appartient au centralisateur de T , d'où $w = I$. Le groupe W opère donc aussi de manière naturelle dans le groupe dual $\Gamma^*(T)$ de $\Gamma(T)$, qui s'identifie comme nous l'avons vu au groupe des caractères rationnels de T ; si χ est un élément de ce groupe et s un représentant de w dans N , on a

$$(w.\chi)(t) = \chi(s^{-1}ts) \qquad (t \in T) .$$

En étendant le domaine des scalaires au corps $\underline{R}$ des nombres réels, on déduit de $\Gamma(T)$ et $\Gamma^*(T)$ des espaces vectoriels $\Gamma^{\underline{R}}(T)$, $\Gamma^{*\underline{R}}(T)$ sur

$\underline{R}$ en dualité l'un avec l'autre, et W opère encore de manière fidèle dans ces espaces vectoriels. Pour simplifier les notations, nous conviendrons d'identifier les éléments de W aux opérations dans $\Gamma(T)$, $\Gamma^*(T)$, $\Gamma^{\underline{R}}(T)$, $\Gamma^{*\underline{R}}(T)$ qui leur sont associées.

Ceci étant, si γ est un groupe à un paramètre de T, et si w est une opération du groupe de Weyl, représentée par un élément s du normalisateur de T, les groupes de Borel qui contiennent Supp $w.\gamma$ sont évidemment les sBs^{-1}, où B parcourt l'ensemble des groupes de Borel qui contiennent Supp γ ; w transforme donc en lui-même l'ensemble des éléments semi-réguliers. De plus, on a, pour $\theta \in K^*$, $(w.\gamma)(\theta) = s\,\gamma(\theta)s^{-1}$, d'où, pour $x \in G/B_0$,

$$((w.\gamma)(0)).x = s.(\gamma(0).(s^{-1}.x)) .$$

Supposons que γ soit semi-régulier et que $\gamma(0).x = x_0$ pour tout x d'une partie ouverte non vide U de G/B_0 ; on a alors $((w.\gamma)(0)).x = s.x_0$ pour tout $x \in s.U_0$, et par suite

$$B(w.\gamma) = sB(\gamma)s^{-1} .$$

Comme on sait que les groupes de Borel contenant T sont permutés entre eux de manière simplement transitive par les opérations du normalisateur de T, on en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 9.- *Pour tout groupe de Borel* B *contenant le tore maximal* T, *il y a une chambre* $\mathfrak{C}(B)$ *de* $\Gamma(T)$ *associée à* B ; *les opérations du groupe de Weyl dans* $\Gamma(T)$ *permutent les chambres entre elles de manière simplement transitive.*

PROPOSITION 10.- *Soit* $\mathfrak{C}$ *une chambre de* $\Gamma(T)$; *il existe un certain nombre de formes linéaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *sur* $\Gamma(T)$ *telles que* $\mathfrak{C}$ *soit l'ensemble des* $\gamma \in \Gamma(T)$ *tels que* $\lambda_i(\gamma) > 0$ $(1 \leq i \leq m)$.

En effet, on a vu qu'il existe des formes linéaires $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sur $\Gamma(T)$ et un indice i_0 tels que $\mathfrak{C}$ soit l'ensemble des γ tels que $\chi_{i_0}(\gamma) < \chi_i(\gamma)$ pour tout $i \neq i_0$.