Séminaire BOURBAKI Mars 2006
58e année, 2005-2006, nº 958, p. 137 à 176

ESPACES ANALYTIQUES p-ADIQUES AU SENS DE BERKOVICH

par **Antoine DUCROS**

INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter les fondements, ainsi qu'un certain nombre d'applications, d'une théorie qu'a proposée voici quinze ans Vladimir Berkovich ([6], [7], cf. aussi [12]), et qui a constitué un nouveau point de vue sur la *géométrie analytique ultramétrique.* Commençons par expliquer succinctement en quoi consiste cette dernière, par évoquer les problèmes qui surgissent naturellement lorsqu'on l'aborde, et par décrire dans les grandes lignes différentes approches (celle de Tate, celle de Raynaud, et plus récemment donc celle de Berkovich) qui permettent de les contourner.

Une valeur absolue $|.|$ sur un corps k est dite *ultramétrique* si $|a+b| \leq \max(|a|,|b|)$ pour tout couple (a,b) d'éléments de k ; dans ce cas $|a+b| = \max(|a|,|b|)$ dès que $|a|$ et $|b|$ diffèrent. Un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique. Les boules fermées de rayon non nul sont des parties ouvertes d'un tel corps ; la topologie dont il hérite est donc totalement discontinue, et ce indépendamment de son éventuelle complétude. Si k est un corps ultramétrique, on désignera par k^o (resp. k^{oo}) le sous-ensemble de k formé des éléments de valeur absolue inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à 1. Il est immédiat que k^o est un sous-anneau de k dont k^{oo} est l'unique idéal maximal. Le quotient, souvent appelé *corps résiduel de* k, sera noté $\widetilde{k}$.

Dans toute la suite on s'intéressera la plupart du temps à des corps ultramétriques *complets.* Le prototype d'un tel objet est le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, où p est un nombre premier donné. Rappelons brièvement sa construction : pour tout rationnel r non nul, il existe un unique entier relatif $v_p(r)$ tel que r puisse s'écrire $p^{v_p(r)}a/b$ avec a et b premiers à p. On choisit[(1)] un réel ε dans l'intervalle $]0;1[$, et l'on munit $\mathbb{Q}$ de

(1) Rien de ce qui suit ne dépend de ce choix. Il est fréquent de prendre ε égal à $1/p$; cette normalisation a l'avantage d'être compatible avec l'effet de la multiplication sur la mesure de Haar de $\mathbb{Z}_p$, et de donner lieu, lorsqu'on l'adopte pour *chacun* des nombres premiers, à la « formule du produit » : si x appartient à $\mathbb{Q}^*$ le produit de toutes ses valeurs absolues (les p-adiques et la traditionnelle) est alors égal à 1.

la valeur absolue qui envoie tout élément r de $\mathbb{Q}^*$ sur $\varepsilon^{v_p(r)}$. Elle est ultramétrique, et on appelle $\mathbb{Q}_p$ le complété correspondant de $\mathbb{Q}$. Un élément de $\mathbb{Q}_p$ a une unique écriture de la forme $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i p^i$ où les a_i appartiennent à $\{0,1,\ldots,p-1\}$ et sont nuls *en dessous* d'un certain rang ; les opérations se font à l'aide de l'algorithme habituel, avec retenues. L'anneau $\mathbb{Q}_p^o$ est simplement noté $\mathbb{Z}_p$ et s'identifie à $\{\sum_{i\geq 0} a_i p^i\}$; son idéal maximal est $\{\sum_{i>0} a_i p^i\}$ et le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{F}_p$. Le groupe $|\mathbb{Q}_p^*|$ est égal à $\varepsilon^{\mathbb{Z}}$. L'anneau $\mathbb{Z}_p$ est compact par un argument séquentiel élémentaire ; il en découle que $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La valeur absolue de ce dernier s'y prolonge de manière unique, mais $\overline{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas complet, comme on peut (par exemple) le déduire du théorème de Baire ; son complété $\mathbb{C}_p$ reste par contre algébriquement clos. C'est en quelque sorte l'analogue p-adique du corps $\mathbb{C}$ auquel il est d'ailleurs abstraitement isomorphe, puisque tous deux ont même degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$, à savoir la puissance du continu. Le groupe $|\mathbb{C}_p^*|$ est égal à $\varepsilon^{\mathbb{Q}}$, et $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{F}_p$. Notons que $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact. Pour le voir, il suffit de montrer que $\mathbb{C}_p^o$ n'est pas compact. Or il est la réunion disjointe des $\pi^{-1}(\lambda)$, où λ parcourt $\overline{\mathbb{F}_p}$ et où π est la flèche quotient ; et pour tout λ appartenant à $\overline{\mathbb{F}_p}$ le sous-ensemble $\pi^{-1}(\lambda)$ de $\mathbb{C}_p^o$ est une boule unité ouverte (dont n'importe quel élément de $\pi^{-1}(\lambda)$ est un centre), d'où la conclusion.

Le rôle majeur joué en théorie des nombres et en géométrie arithmétique par les corps p-adiques a incité à développer sur ces derniers, autant que faire se pouvait, une théorie analogue à celle des espaces analytiques complexes. Partons plus généralement d'un corps ultramétrique complet k. Les notions classiques de fonction développable en série entière ou de rayon de convergence gardent un sens sur k et s'y comportent bien, voire d'une certaine manière mieux que sur $\mathbb{C}$: en effet une série à valeurs dans k converge *si et seulement si son terme général tend vers zéro*. On peut dès lors donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\sum a_I \mathbf{T}^I$ de $k[[\mathbf{T}]]$, où $\mathbf{T}$ désigne une famille finie d'indéterminées, converge sur le polydisque unité *fermé* $\mathbf{D}$ de dimension correspondante : il faut et il suffit que $|a_I|$ tende vers zéro lorsque la longueur $|I|$ du multi-indice I tend vers l'infini. Cette remarque explique le rôle central que jouent en géométrie analytique ultramétrique, et ce quel que soit le point de vue adopté, les lieux de zéros de fonctions analytiques sur un polydisque fermé ; un espace isomorphe à un tel lieu sera qualifié d'*affinoïde*.

Malgré ces débuts plutôt favorables, le bât blesse très rapidement en raison de la totale discontinuité de k. Ainsi sa boule unité fermée étant ouverte, la fonction indicatrice correspondante est localement constante, et *a fortiori* localement développable en série entière sur k ; or il est clair qu'elle ne saurait, en aucun sens raisonnable, être considérée comme globalement analytique.

L'approche de Tate : la géométrie rigide ([62], cf. aussi [16]). — Sur un espace analytique complexe, on considère une propriété comme étant de nature locale lorsqu'il suffit de la tester sur un recouvrement ouvert. La transposition telle quelle de cette définition au cadre ultramétrique conduit, comme on vient de le signaler, à des aberrations ; l'idée de Tate a consisté à la modifier, en se restreignant à une classe particulière de recouvrements ouverts qu'il qualifie d'*admissibles.* Le cadre théorique utilisé pour ce faire est celui des *topologies de Grothendieck*, qui reposent précisément sur l'axiomatisation de la notion de recouvrement. Sans entrer dans les détails techniques, indiquons qu'un recouvrement est admissible lorsque, moralement, il y a suffisamment de chevauchement entre les ouverts qui le constituent pour que les conditions de coïncidence sur les intersections soient significativement contraignantes ; l'écriture de k comme réunion disjointe de k^o et de son complémentaire est l'exemple typique à exclure.

Les objets de la théorie de Tate, appelés *espaces analytiques rigides sur le corps k*, sont ainsi des espaces topologiques totalement discontinus sur lesquels on distingue certaines familles d'ouverts, dont on dit qu'elles forment un recouvrement admissible de leur réunion. On sait définir les fonctions analytiques sur ces espaces, et elles se recollent parfaitement pourvu qu'on se limite aux recouvrements admissibles. Par ailleurs tout espace analytique rigide possède un recouvrement admissible par des espaces affinoïdes[(2)] : ces derniers sont en quelque sorte les « briques élémentaires » de la géométrie rigide, celles sur lesquelles tout est modelé.

L'approche de Raynaud : les schémas formels à éclatement près ([19]–[22], [56])

Indépendamment de sa nature précise, un espace analytique rigide est d'après ce qui précède défini localement par des équations analytiques à coefficients dans k. Raynaud part quant à lui d'un système d'équations analytiques (comprenant d'éventuelles données de recollement) *à coefficients dans k^o*. On peut les réduire modulo k^{oo}, et en raison de leur convergence on obtient ainsi des *polynômes* sur le corps $\widetilde{k}$. Bien entendu, pour que cette opération présente quelque intérêt, le système de départ doit être choisi convenablement : si par exemple on multiplie toutes les équations par un élément de k^{oo}, leurs réductions deviennent nulles et on ne pourra pas espérer en tirer quoi que ce soit.

Techniquement, la notion de « système convenable d'équations analytiques à coefficients dans k^o » se traduit par *schéma formel plat et topologiquement de présentation finie sur k^o*. Un tel schéma formel possède une *fibre spéciale*, à savoir la variété algébrique sur $\widetilde{k}$ obtenue par réduction modulo k^{oo} des équations qui le définissent, et une *fibre générique* qui n'est autre que l'espace analytique rigide sur k donné par les équations en question. Tout espace analytique rigide qui est réunion d'un nombre fini

(2) Un tel espace, on l'a vu, est *défini* par un système d'équations analytiques S à coefficients dans k ; dans l'approche de Tate il *consiste* précisément en l'ensemble des solutions de S *dans une clôture algébrique $\overline{k}$ de k* quotienté par l'action de Galois.

d'espaces affinoïdes[3] est isomorphe à la fibre générique d'un schéma formel convenable, et les fibres génériques de deux schémas formels donnés sont isomorphes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'éclatements et de contractions formels ; le remplacement sur $\mathbb{Z}_p$ d'une indéterminée x par x/p est un exemple de telle transformation. C'est sur ces théorèmes que se fonde le point de vue de Raynaud ; il consiste à travailler dans la catégorie des schémas formels plats et de présentation finie sur k^o *en décrétant inversibles les éclatements formels*[4]. Les recouvrements admissibles de Tate se retrouvent naturellement dans le cadre proposé par Raynaud, où ils correspondent *grosso modo* aux recouvrements *de Zariski* des fibres spéciales.

L'approche de Berkovich. — On peut la décrire sommairement en disant qu'il « rajoute des points » aux espaces rigides classiques, et qu'il obtient de ce fait de bien meilleures propriétés topologiques. En un sens, ce changement de point de vue s'apparente à celui opéré lorsqu'on adjoint à l'ensemble des points « classiques » d'une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos un point générique par fermé irréductible de dimension strictement positive : la complication apparente initiale est compensée par la souplesse et les commodités qu'offre le nouveau cadre.

Les espaces de Berkovich présentent ainsi l'avantage d'être localement compacts et localement connexes par arcs, et les fonctions analytiques s'y recollent sans qu'il y ait besoin de se limiter à des recouvrements particuliers. Par ailleurs ils vérifient toutes les propriétés qui doivent « moralement » l'être : dans cette théorie les polydisques fermés, et plus généralement les affinoïdes, sont compacts ; les objets qui ont *intuitivement* « un bord », tels là encore les polydisques fermés, en ont *effectivement* un dans ce cadre, mais dans un sens à préciser et qui n'est pas purement topologique ; l'espace analytique $\mathscr{X}^{an}$ associé à une variété algébrique $\mathscr{X}$ est sans bord, et il est connexe (resp. séparé, resp. compact) si et seulement si $\mathscr{X}$ est connexe (resp. séparée, resp. propre). Signalons que contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, la dimension topologique de $\mathscr{X}^{an}$ est égale à la dimension de Krull de $\mathscr{X}$, et non à son double. Si $\mathscr{X}$ est propre le type d'homotopie de $\mathscr{X}^{an}$ reflète en partie les propriétés de la « réduction modulo k^{oo} » de $\mathscr{X}$; par exemple, si k est algébriquement clos et si $\mathscr{X}$ est une courbe elliptique alors $\mathscr{X}^{an}$ est contractile (resp. homotope à un cercle) si et seulement si $\mathscr{X}$ a bonne (resp. mauvaise) réduction.

Inventée à l'origine pour des motivations liées à la théorie spectrale, la théorie de Berkovich s'est révélée extrêmement féconde ; on lui doit un grand nombre d'applications dans des domaines variés. Elle a ainsi notamment permis :

- de démontrer une conjecture de Deligne sur les cycles évanescents ;

[3] Il faut en outre le supposer *quasi-séparé*.

[4] Un sens rigoureux peut être donné à cette expression à l'aide de la notion de localisation d'une catégorie par une famille de flèches.

• de démontrer une conjecture de Carayol et Drinfeld sur les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales ;

• de développer une variante p-adique de la théorie des « dessins d'enfants » ;

• de développer une théorie de l'intégration p-adique des 1-formes fermées sur de *vrais* chemins ;

• de faire de l'analyse harmonique et des systèmes dynamiques sur les corps p-adiques, et d'y formuler et démontrer des théorèmes d'équidistribution ;

• d'exhiber des analogues p-adiques de résultats connus de géométrie réelle, telles les propriétés de base des parties semi-algébriques ou la description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale.

Avant d'entamer une présentation détaillée de la théorie de Berkovich et un survol de ses applications, mentionnons l'existence de deux autres approches de la géométrie analytique ultramétrique, sur lesquelles nous ne nous étendrons malheureusement guère, *faute de connaissances et de compétences suffisantes.* La première est due à Huber (cf. [48]) ; ses espaces ont « encore plus de points » que ceux de Berkovich puisqu'il prend en compte *toutes* les valuations et pas seulement celles de hauteur 1 ; le *plus grand quotient séparé* d'un espace affinoïde au sens de Huber est ainsi l'espace de Berkovich correspondant. La seconde est en cours de développement : un ouvrage de Fumiharu Kato et Kazuhiro Fujiwara sur le sujet est en préparation(5).

Je tiens à remercier Antoine Chambert-Loir pour ses remarques, conseils et suggestions concernant une première version de ce texte.

1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1.1. Algèbres affinoïdes

Les énoncés de ce paragraphe et du suivant sont dus à Berkovich. Les démonstrations se trouvent pour l'essentiel (*dans un ordre qui n'est pas forcément celui adopté ici*) *dans les chapitres* 2 *et* 3 *de* [6] *; elles utilisent fréquemment certains résultats de* [16].

Dans ce texte, les normes d'algèbres seront sous-multiplicatives. Si une application a pour source une algèbre normée et est majorée sur sa boule unité (son but étant tel que l'adjectif « majoré » ait un sens), on la qualifiera de *bornée.*

On fixe pour tout le reste du texte un corps ultramétrique complet k (la valeur absolue peut être triviale) ; le sens des notations k^o, k^{oo} et $\widetilde{k}$ a été rappelé dans l'introduction. On va travailler avec la catégorie dont les objets sont les k-algèbres de Banach, et les flèches les applications k-linéaires bornées. Deux normes de Banach sur

(5) Indiquons à ce propos que A. Abbes rédige également en ce moment un livre de géométrie rigide *selon le point de vue de Raynaud* sur une base quelconque.

la même k-algèbre définissent donc des objets isomorphes de la catégorie en question si et seulement si elles sont équivalentes. Une surjection (bornée) entre deux k-algèbres de Banach sera dite *admissible* si la norme du but est équivalente à la norme quotient. Une *extension complète* d'un corps ultramétrique complet L désignera dans ce qui suit une extension de L *munie d'une valeur absolue ultramétrique prolongeant celle de* k et pour laquelle elle est complète.

Si $\mathscr{A}$ est une k-algèbre, on appellera *semi-norme multiplicative* sur $\mathscr{A}$ toute application multiplicative de $\mathscr{A}$ vers $\mathbb{R}_+$ qui satisfait à l'inégalité ultramétrique et étend la valeur absolue de k. Lorsque $\mathscr{A}$ est normée, une telle semi-norme est bornée si et seulement si elle est majorée *par* 1 sur la boule unité de $\mathscr{A}$.

Les briques de base en théorie de Berkovich sont comme en géométrie rigide les espaces affinoïdes, c'est-à-dire moralement les « lieux de zéros de familles de fonctions analytiques sur un polydisque fermé[6] ». Fixons un tel polydisque $\mathbf{D}$ de polyrayon $(r_1, \ldots, r_n)$, où les r_i sont des réels strictement positifs. Pour qu'une série formelle $\sum a_I \mathbf{T}^I$ converge en *tout* point de $\mathbf{D}$ à coordonnées dans *n'importe quelle* extension complète de k, il faut et il suffit que $|a_I|\mathbf{r}^\mathbf{I}$ tende vers zéro lorsque $|I|$ tend vers l'infini. L'ensemble des séries satisfaisant à cette condition est une k-algèbre, qui est de Banach lorsqu'on la munit de la norme $\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I|\mathbf{r}^\mathbf{I}$. On la note $k\left\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\right\}$ ou encore $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$. Si $\mathscr{A}$ est une k-algèbre de Banach, on écrira $\mathscr{A}\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$ pour $\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$.

Proposition 1.1. — *L'algèbre* $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$ *est noethérienne et ses idéaux sont fermés.*

Soit $\mathscr{I}$ un idéal de $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$. Le candidat naturel pour être l'anneau des fonctions analytiques sur le « lieu des zéros de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{D}$ » (et ce, indépendamment de l'objet précis que désignera cette expression) est le quotient de $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$ par $\mathscr{I}$. Comme $\mathscr{I}$ est fermé ce quotient hérite d'une structure d'algèbre de Banach.

Définition 1.2. — *Une k-algèbre de Banach $\mathscr{A}$ est dite* k-affinoïde *s'il existe un polyrayon* $\mathbf{r}$ *et un idéal $\mathscr{I}$ de* $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$ *tels que $\mathscr{A}$ soit isomorphe* (*en tant que k-algèbre de Banach*) *à* $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}/\mathscr{I}$. *Lorsqu'un tel isomorphisme existe avec un polyrayon* unité, *on dit que $\mathscr{A}$ est* strictement *k-affinoïde*[7].

Indiquons quelques propriétés des algèbres affinoïdes. Il est immédiat d'après ce qu'il précède qu'elles sont noethériennes et que leurs idéaux sont fermés. Un quotient d'une algèbre k-affinoïde est k-affinoïde ; si L est une extension complète de k et si $\mathscr{A}$

[6] Tate ne considérait que des polydisques unité, Berkovich accepte les polyrayons quelconques. Il lui arrive toutefois fréquemment de se ramener au cas du polyrayon unité antérieurement traité en théorie rigide ; il le fait grâce à des changements judicieux de corps de base consistant, pour l'essentiel, à adjoindre à k de manière générique des éléments dont les valeurs absolues sont préalablement fixées.

[7] Cette terminologie est celle de Berkovich ; les algèbres qu'il appelle strictement affinoïdes sont celles qui étaient classiquement qualifiées d'affinoïdes.

est une algèbre k-affinoïde alors le produit tensoriel complété $\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L$ est L-affinoïde ; le produit tensoriel complété de deux algèbres k-affinoïdes au-dessus d'une troisième est k-affinoïde ; ces assertions restent valables en remplaçant partout « k-affinoïde » par « strictement k-affinoïde ». De plus pour toute algèbre affinoïde $\mathscr{A}$, il existe une extension complète L de k telle que $\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L$ soit strictement L-affinoïde.

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde et L une extension complète de k telles que $\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L$ soit strictement L-affinoïde. La dimension de Krull de $\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L$ est indépendante de L ; on l'appelle la *dimension k-analytique de $\mathscr{A}$* et on la note $\dim_k \mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ est non nulle, $\dim_k \mathscr{A}$ est finie et supérieure ou égale à la dimension de Krull de $\mathscr{A}$. Si L est une extension complète quelconque de $\mathscr{A}$ alors $\dim_L \mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L = \dim_k \mathscr{A}$.

Exemple 1.3. — Soit r un réel strictement positif . L'algèbre $k\left\{rS, r^{-1}T\right\}/(ST-1)$ est k-affinoïde par sa forme même. On la note k_r, et elle peut se décrire comme l'ensemble des séries $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i$ telles que $|a_i|r^i$ tende vers zéro lorsque $|i|$ tend vers l'infini, muni de la norme qui envoie une telle série sur $\max |a_i|r^i$. Supposons que r n'est pas de torsion modulo $|k^*|$. Il est alors facile de voir que k_r est un corps (ultramétrique complet). Sa dimension de Krull est donc nulle ; par contre sa dimension k-analytique vaut 1 : en effet $k_r\widehat{\otimes}_k k_r$ est isomorphe à $k_r\{U,V\}/(UV-1)$, qui est strictement k_r-affinoïde[(8)] et de dimension de Krull égale à 1.

1.2. Espaces affinoïdes

Reprenons les notations $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{r}$ et $\mathscr{I}$ du paragraphe précédent et désignons par $\mathscr{A}$ l'algèbre quotient $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}/\mathscr{I}$. Nous allons maintenant construire l'objet qui, dans la théorie de Berkovich, joue le rôle du « lieu des zéros de $\mathscr{I}$ sur $\mathbf{D}$ ». Remarquons au préalable que si L est une extension complète de k, l'évaluation des fonctions induit une bijection entre l'ensemble des zéros de $\mathscr{I}$ à coordonnées dans L et celui des morphismes (bornés de k-algèbres) de $\mathscr{A}$ vers L ; pour cette raison on appellera *évaluation* tout morphisme de $\mathscr{A}$ vers une extension complète de k.

L'idée dont on part est très simple : on ne se limite pas aux points dont les coordonnées appartiennent à k, ni même à une extension finie de celui-ci (comme c'est le cas en géométrie rigide) ; on prend en compte les solutions du système dans *toutes les extensions complètes* de k. À toute évaluation correspondra donc un point de l'espace que l'on cherche à construire. Par ailleurs si $\mathscr{A} \to L$ est une évaluation et si M est une extension complète de L, il est raisonnable de décréter que $\mathscr{A} \to L \hookrightarrow M$ définit le même point que $\mathscr{A} \to L$: il s'agit simplement de dire qu'un point à coordonnées dans L peut être vu comme à coordonnées dans M. On est ainsi amené à considérer l'ensemble des « classes d'équivalence » d'évaluations modulo la relation engendrée

(8) Voici une interprétation « géométrique » de ce qui se passe : l'algèbre k_r est l'anneau des fonctions de la couronne d'équation $|T| = r$ sur le corps k ; lorsqu'on étend ce dernier de sorte que r soit la valeur absolue d'un scalaire la couronne en question devient isomorphe à celle d'équation $|U| = 1$.

par les identifications que l'on vient de mentionner. Cette description n'est certes pas très explicite ; il en existe une autre, plus tangible, que nous allons présenter.

Soit $\mathscr{A} \to L$ une évaluation. En la composant avec la valeur absolue de L on obtient une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}$.

Réciproquement, si x est une semi-norme multiplicative bornée sur $\mathscr{A}$, son noyau $\mathfrak{p}_x$ est un idéal premier de $\mathscr{A}$ par lequel elle passe au quotient. Elle induit ainsi une valeur absolue sur le corps des fractions de $\mathscr{A}/\mathfrak{p}_x$. Le complété correspondant est noté $\mathscr{H}(x)$ et est appelé le *corps résiduel complété de* x. C'est une extension complète de k ; la flèche naturelle $\mathscr{A} \to \mathscr{H}(x)$ est une évaluation qui est « minimale » au sein de sa classe d'équivalence.

Il n'est pas très difficile de voir que les deux procédés décrits ci-dessus mettent en bijection l'ensemble des « classes d'équivalence » d'évaluations avec celui des semi-normes multiplicatives bornées sur $\mathscr{A}$, ce qui justifie la définition qui suit.

DÉFINITION 1.4. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde. On appelle* espace k-affinoïde *associé à $\mathscr{A}$ et l'on note $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur $\mathscr{A}$, muni de la topologie induite par la topologie produit de $\mathbb{R}^{\mathscr{A}}$.*

Commentaires. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde et soit x un point de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. Si f appartient à $\mathscr{A}$ on désignera par $f(x)$ l'image de f dans le corps résiduel complété $\mathscr{H}(x)$ de x ; le réel $x(f)$ peut alors s'écrire $|f(x)|$, et c'est cette dernière notation que l'on utilisera désormais pour des raisons psychologiques évidentes. L'application de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ vers Spec $\mathscr{A}$ qui envoie x sur son noyau, c'est-à-dire encore sur l'ensemble des f telles que $f(x)$ soit nul, est *continue.*

L'une des caractéristiques les plus frappantes des espaces k-affinoïdes ainsi construits réside dans leurs bonnes propriétés topologiques, que résume le théorème ci-dessous (pour la notion de *dimension topologique* on pourra se reporter à la démonstration du lemme 3.2.5 de [6]) ; l'exemple qui le suit montre comment immerger un *pavé réel* dans un polydisque fermé.

THÉORÈME 1.5. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde. L'espace $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est compact et localement connexe par arcs. La flèche $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \to$ Spec $\mathscr{A}$ est surjective et induit une bijection $\pi_0(\mathscr{M}(\mathscr{A})) \simeq \pi_0(\operatorname{Spec} \mathscr{A})$; en particulier $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est non vide dès que $\mathscr{A}$ est non nulle. La dimension topologique de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est inférieure ou égale à la dimension k-analytique de $\mathscr{A}$, avec égalité si $\mathscr{A}$ est strictement k-affinoïde.*

Exemple 1.6. — Soit n un entier et soit $\mathbf{r}$ un n-uplet $(r_1, \ldots, r_n)$ de réels strictement positifs. L'espace $\mathscr{M}(k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\})$ est appelé le *k-polydisque fermé de polyrayon* $\mathbf{r}$ (son ouvert formé des points x tels que $|T_i(x)|$ soit *strictement* inférieur à r_i pour tout i est quant à lui le polydisque *ouvert* correspondant). Soit Δ le pavé $\prod[0; r_i]$. Pour tout $\mathbf{s}$ appartenant à Δ, l'application $\eta_{\mathbf{s}}\ :\ \sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{s}^I$ est une semi-norme multiplicative bornée sur $k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\}$, et $\mathbf{s} \mapsto \eta_{\mathbf{s}}$ définit un plongement de Δ dans

$\mathscr{M}(k\left\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\right\})$. Notons que $\eta_{(0,\dots,0)}$ est l'origine « classique » du polydisque, mais que pour tout $\mathbf{s}$ non nul $\eta_{\mathbf{s}}$ est un point « nouveau », autrement dit qui n'existait pas dans les théories antérieures.

Remarque 1.7. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde isomorphe à $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}/\mathscr{I}$ pour $\mathbf{r}$ et $\mathscr{I}$ convenables et soit X l'espace $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. L'ensemble des zéros de $\mathscr{I}$ à coordonnées dans k est un espace topologique totalement discontinu (et compact lorsque k est localement compact), en bijection naturelle avec l'ensemble $X(k)$ des points x de X tels que $\mathscr{H}(x)$ soit égal à k ; *lorsqu'on munit $X(k)$ de la topologie induite par celle de X cette bijection est un homéomorphisme.* Plus généralement notons X_0 l'ensemble des points de X dont le corps résiduel complété est une extension finie de k ; un tel point sera qualifié de *rigide*. Le sous-ensemble X_0 de X est totalement discontinu ; si la valeur absolue de k n'est pas triviale et si $\mathscr{A}$ est strictement k-affinoïde, X_0 est *dense* dans X et est homéomorphe à l'espace analytique rigide associé à $\mathscr{A}$.

Fonctorialité. — Tout morphisme $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre algèbres k-affinoïdes induit une application continue $\mathscr{M}(\mathscr{B}) \to \mathscr{M}(\mathscr{A})$; si x est un point de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ la fibre en x de $\mathscr{M}(\mathscr{B}) \to \mathscr{M}(\mathscr{A})$ est naturellement homéomorphe à $\mathscr{M}(\mathscr{B}\widehat{\otimes}_{\mathscr{A}}\mathscr{H}(x))$. Si $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une surjection admissible dont on note $\mathscr{I}$ le noyau (auquel cas $\mathscr{B}$ s'identifie à $\mathscr{A}/\mathscr{I}$) alors $\mathscr{M}(\mathscr{B}) \to \mathscr{M}(\mathscr{A})$ induit un homéomorphisme entre $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ et l'ensemble des x appartenant à $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ tels que $f(x)$ soit nul pour tout f dans $\mathscr{I}$; ledit ensemble sera appelé *le lieu des zéros de $\mathscr{I}$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{A})$*. On qualifiera d'*immersion fermée* toute application continue entre espaces affinoïdes induite par une surjection admissible. Si X est un espace k-affinoïde, il existe *par définition* une immersion fermée de X dans un k-polydisque fermé convenable.

Si L est une extension complète de k, on dispose pour toute algèbre k-affinoïde $\mathscr{A}$ d'une surjection continue canonique $\mathscr{M}(\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L) \to \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

Définition 1.8. — *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde et soit V un sous-ensemble de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. On dit que V est un* domaine affinoïde *de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ s'il existe une $\mathscr{A}$-algèbre k-affinoïde $\mathscr{A}_V$ possédant les deux propriétés suivantes*[9] *:*

i) *l'image de $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V)$ dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est égale à V ;*

ii) *tout morphisme $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ entre algèbres k-affinoïdes tel que l'image de $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ soit contenue dans V se factorise de manière unique par $\mathscr{A} \to \mathscr{A}_V$.*

Soit V un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. La $\mathscr{A}$-algèbre $\mathscr{A}_V$ est unique à unique isomorphisme près. On peut montrer qu'elle est plate, et que $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V) \to V$ est un homéomorphisme (V est donc compact). Soit W une partie de V (identifié à $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V)$) ; il est tautologique que W est un domaine affinoïde de V si et seulement si c'est un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, et le cas échéant la k-algèbre $\mathscr{A}_W$ ne dépend pas de

[9] Cette définition est due à Temkin ([65], §3) ; elle est équivalente à celle de Berkovich ([7], def. 2.2.1) d'après le corollaire 3.2 de [65]

l'espace ambiant dans lequel on considère W. Si $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est un morphisme entre algèbres k-affinoïdes, l'image réciproque de V sur $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ est un domaine affinoïde d'algèbre associée $\mathscr{B}\widehat{\otimes}_{\mathscr{A}}\mathscr{A}_V$; on en déduit que l'intersection de deux domaines affinoïdes de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est un domaine affinoïde. Si L est une extension complète de k l'image réciproque de V sur $\mathscr{M}(\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L)$ est un domaine affinoïde, d'algèbre associée $\mathscr{A}_V\widehat{\otimes}_k L$.

Soit (V_i) un recouvrement *fini* de V par des domaines affinoïdes ; le théorème d'acyclicité de Tate (cf. [16], 8.2.1/1 et [6], prop. 2.2.5) affirme entre autres que la suite

$$\mathscr{A}_V \longrightarrow \prod \mathscr{A}_{V_i} \rightrightarrows \prod \mathscr{A}_{V_i \cap V_j}$$

est exacte.

Si U et W sont deux parties *compactes* et *disjointes* de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ alors $U \cup W$ est un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ si et seulement si U et W sont des domaines affinoïdes de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, et dans cette situation $\mathscr{A}_{U\cup W}$ s'identifie à $\mathscr{A}_U \times \mathscr{A}_W$. En particulier, toute réunion de composantes connexes de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ en est un domaine affinoïde.

Exemple 1.9. — Soit $\mathscr{A}$ une algèbre k-affinoïde et soit X l'espace associé. Soient $f_1, \dots, f_n$ et g des éléments de $\mathscr{A}$ qui sont sans zéro commun sur X (autrement dit l'idéal qu'ils engendrent est $\mathscr{A}$), et soient $r_1, \dots, r_n$ des réels strictement positifs. Le sous-ensemble de X formé des points en lesquels $|f_i| \leq r_i|g_i|$ pour tout i en est un domaine affinoïde ; l'algèbre correspondante est $\mathscr{A}\left\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\right\}/(gT_1 - f_1, \dots, gT_n - f_n)$. On en déduit facilement que tout point de X a une base de voisinages qui sont des domaines affinoïdes (on parlera plus simplement de *voisinages affinoïdes*). Un domaine affinoïde de la forme décrite ci-dessus est dit *rationnel*, et par le théorème de Gerritzen-Grauert ([16], 7.3.5/3 ou [36], lemme 2.4 ou encore [65], §3) tout domaine affinoïde de X est réunion d'un nombre fini de domaines rationnels.

Remarque 1.10. — Si $\mathscr{A}$ est une algèbre k-affinoïde et si $\mathscr{I}$ est un idéal de $\mathscr{A}$, le lieu des zéros de $\mathscr{I}$ sur $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ (qui est naturellement homéomorphe à $\mathscr{M}(\mathscr{A}/\mathscr{I})$) n'est pas en général un domaine affinoïde[(10)], les phénomènes de nilpotence empêchant l'existence d'un théorème de factorisation par une $\mathscr{A}$-algèbre fixée.

Remarque 1.11. — Soit $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un morphisme entre algèbres k-affinoïdes, soit y appartenant à $\mathscr{M}(\mathscr{B})$ et soit x son image sur $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. Ces données fournissent une injection isométrique naturelle $\mathscr{H}(x) \hookrightarrow \mathscr{H}(y)$; le corps $\mathscr{H}(y)$ apparaît ainsi comme une extension complète de $\mathscr{H}(x)$, qui correspond d'ailleurs aussi au corps résiduel complété de *y vu comme appartenant à $\mathscr{M}(\mathscr{B}\widehat{\otimes}_{\mathscr{A}}\mathscr{H}(x))$*. Si $\mathscr{B}$ est un quotient de $\mathscr{A}$ ou bien l'algèbre associée à un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ alors $\mathscr{H}(x) \hookrightarrow \mathscr{H}(y)$ est un isomorphisme.

(10) C'en est un si et seulement si le lieu en question est ouvert dans $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, c'est-à-dire si et seulement s'il est réunion de composantes connexes de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre *strictement* k-affinoïde[11]. Notons $\mathscr{A}^o$ (resp. $\mathscr{A}^{oo}$) l'ensemble des éléments f de $\mathscr{A}$ tels que $|f(x)|$ soit inférieur ou égal (resp. strictement inférieur) à 1 pour tout x appartenant à $\mathscr{M}(\mathscr{A})$; on voit aussitôt que $\mathscr{A}^o$ est un sous-anneau de $\mathscr{A}$ et que $\mathscr{A}^{oo}$ est un idéal de $\mathscr{A}^o$. Le quotient $\mathscr{A}^o/\mathscr{A}^{oo}$ est une $\widetilde{k}$-algèbre que l'on notera $\widetilde{\mathscr{A}}$; elle est de type fini et de dimension de Krull égale à celle de $\mathscr{A}$. On désigne par X l'espace $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ et par $\widetilde{X}$ le spectre de $\widetilde{\mathscr{A}}$. Si x est un point de X, l'évaluation $\mathscr{A} \to \mathscr{H}(x)$ induit une flèche $\widetilde{\mathscr{A}} \to \widetilde{\mathscr{H}(x)}$ dont le noyau est un élément de $\widetilde{X}$. On a ainsi défini une application $\pi : X \to \widetilde{X}$ dite de *réduction.* Soit f appartenant à $\mathscr{A}^o$; notons $\widetilde{f}$ son image dans $\widetilde{\mathscr{A}}$. L'image réciproque par π du lieu des zéros (resp. du lieu d'inversibilité) de $\widetilde{f}$ est l'ensemble des x appartenant à X tels que $|f(x)| < 1$ (resp. $|f(x)| = 1$). On en déduit que π est anticontinue (l'image réciproque d'un ouvert est fermée, celle d'un fermé est ouverte). Elle est par ailleurs *surjective*[12] et envoie tout k-point de X sur un $\widetilde{k}$-point de $\widetilde{X}$. Si ξ est un élément de l'ensemble $\widetilde{X}_{\text{gén}}$ des points génériques des composantes irréductibles de $\widetilde{X}$ alors $\pi^{-1}(\xi)$ est un singleton ; lorsque $\mathscr{A}$ est non nulle $\{\pi^{-1}(\xi)\}_{\xi\in\widetilde{X}_{\text{gén}}}$ est le *bord de Shilov* de X, c'est-à-dire que c'est *le plus petit fermé de X sur lequel tout élément de $\mathscr{A}$ atteint son maximum en norme.* Par un changement adéquat de corps de base permettant de se ramener au cas strictement affinoïde, on peut montrer que pour toute algèbre k-affinoïde non nulle $\mathscr{A}$ l'espace $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ possède un bord de Shilov, et que celui-ci est fini.

Exemple 1.12. — Si $\mathscr{A}$ est l'algèbre $k\{T\}$ alors $\widetilde{\mathscr{A}}$ est l'algèbre de polynômes $\widetilde{k}[\widetilde{T}]$ et Spec $\widetilde{\mathscr{A}}$ est donc la droite affine sur $\widetilde{k}$. Au niveau des k-points, π est la réduction naïve $k^o \to \widetilde{k}$.

Exemple 1.13. — Lorsque $\mathscr{A}$ est une algèbre k-affinoïde non nulle dont la norme η est multiplicative, le bord de Shilov de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est clairement égal à $\{\eta\}$. C'est par exemple le cas si $\mathscr{A}$ est de la forme $k\{\mathbf{r}^{-1}\mathbf{T}\}$; le bord de Shilov de $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ est alors réduit à la semi-norme $\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I|\mathbf{r}^i$.

Exemple 1.14. — Soit α un élément de k de valeur absolue strictement inférieure à 1 et soit $\mathscr{A}$ l'algèbre strictement k-affinoïde $k\{S,T\}/(ST-\alpha)$; elle est associée au domaine affinoïde du disque unité défini par l'inégalité $|\alpha| \leq |T| \leq 1$, et elle peut également se décrire comme l'ensemble des séries $\sum_{\mathbb{Z}} a_i T^i$ vérifiant les conditions de convergence que l'on devine. L'algèbre $\widetilde{\mathscr{A}}$ s'identifie à $\widetilde{k}[\widetilde{T},\widetilde{S}]/\widetilde{T}\widetilde{S}$. Son spectre a donc deux points génériques $\xi_{\widetilde{S}}$ et $\xi_{\widetilde{T}}$, chacun correspondant au lieu des zéros de la fonction coordonnée indiquée en indice. L'unique antécédent de $\xi_{\widetilde{S}}$ (resp. $\xi_{\widetilde{T}}$) par la flèche de réduction est la semi-norme qui envoie $\sum a_i T^i$ sur $\max |a_i|$ (resp. $\max |a_i||\alpha^i|$).

[11] Temkin a développé dans [64] une théorie de la réduction plus sophistiquée que celle esquissée ici, et qui est adaptée à toutes les algèbres affinoïdes.
[12] En géométrie rigide l'image de π est l'ensemble des points *fermés* de $\widetilde{X}$.

Définition 1.15. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une algèbre* k*-affinoïde et soit* X *l'espace* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. *Soit* x *appartenant à* X. *On dira que* x *est un* point intérieur *de* X *s'il existe une immersion fermée de* X *dans un* k*-polydisque fermé telle que l'image de* x *soit située dans le polydisque* ouvert *correspondant. Le* bord *de* X *est le fermé constitué des points qui ne sont pas intérieurs.*

Proposition 1.16. — *Si* $\mathscr{A}$ *est strictement* k*-affinoïde alors un point de* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *est intérieur si et seulement si son image par la réduction est un point* fermé *de* Spec $\widetilde{\mathscr{A}}$.

En se ramenant au cas strictement k-affinoïde par extension des scalaires, on montre le corollaire qui vient.

Corollaire 1.17. — *Soit* $\mathscr{A}$ *une algèbre* k*-affinoïde. Tout point rigide de* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *est intérieur. Si la dimension* k*-analytique de* $\mathscr{A}$ *est strictement positive alors le bord de* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *est non vide ; il contient en particulier le bord de Shilov de chacune des composantes connexes de* $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ *qui n'est pas un point rigide isolé.*

Remarque 1.18. — Cette présence « tangible » du bord apparaît comme une spécificité de la théorie de Berkovich.

Remarque 1.19. — Les espaces de semi-normes d'algèbres de Banach ultramétriques et certaines de leurs propriétés topologiques ont été étudiés, indépendamment de Berkovich, par des auteurs comme Escassut, Guennebaud ou Maïnetti ([37], [54], [55], [44]).

1.3. Espaces analytiques généraux

La référence pour ce qui suit est le chapitre 1 *de* [7] *; la définition d'espace* k*-analytique qui y est donnée est plus générale que celle de* [6]. *Pour être plus précis les espaces de* [6] *correspondent aux* bons *espaces de* [7] *; ces derniers constituent une classe insuffisante dès qu'on souhaite travailler avec des fibres génériques de schémas formels.*

Il s'agit maintenant de « recoller » les espaces k-affinoïdes construits au paragraphe précédent. La procédure est relativement technique ; le problème vient du fait que contrairement à ce qui se passe en géométrie différentielle, analytique complexe ou algébrique, les objets de base sur lesquels tout est modelé ne sont pas ici ouverts mais compacts. Aussi n'allons-nous pas donner le détail de la construction de Berkovich à base d'atlas, d'inversions formelles des raffinements de ces derniers, *etc.* Nous nous contenterons d'énoncer un certain nombre de faits.

Un *espace* k*-analytique* est un espace topologique localement compact et localement connexe par arcs X, dans lequel certaines parties compactes sont distinguées : ce sont les *domaines affinoïdes* ; avec chaque domaine affinoïde V de X sont fournis une algèbre k-affinoïde $\mathscr{A}_V$ et un homéomorphisme $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V) \simeq V$. Ces données sont sujettes à des conditions de *compatibilité*, de *maximalité* et de *recouvrement.*

Conditions de compatibilité : à toute inclusion $U \subset V$ entre deux domaines affinoïdes de X est associé un morphisme $\mathscr{A}_V \to \mathscr{A}_U$ dit de *restriction* tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}(\mathscr{A}_U) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & U \arrow[d, hook] \\ \mathscr{M}(\mathscr{A}_V) \arrow[r, "\sim"] & V \end{tikzcd}$$

commute et identifie $\mathscr{M}(\mathscr{A}_U)$ à un domaine affinoïde de $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V)$ *au sens de la définition* 1.8.

Conditions de maximalité : nous n'allons pas les énoncer toutes. Indiquons simplement que si U est un domaine affinoïde de X, et si V est un domaine affinoïde de U *modulo l'identification de celui-ci avec* $\mathscr{M}(\mathscr{A}_U)$ *et au sens de la définition* 1.8, alors V est un domaine affinoïde de X.

Conditions de recouvrement : commençons par quelques définitions. Si U est un sous-ensemble de X, on dit qu'une famille (U_i) de parties de U en constitue un *G-recouvrement*[13] si tout point u de U a un voisinage *dans* U qui est de la forme $\bigcup_{\mathscr{I}} U_i$, où $\mathscr{I}$ est fini et où u appartient à $\bigcap_{\mathscr{I}} U_i$; un *domaine analytique* de X est une partie U de X qui est G-recouverte par les domaines affinoïdes de X qu'elle contient. Les conditions évoquées peuvent alors s'exprimer en disant que X lui-même est un domaine analytique, et que l'intersection de deux domaines affinoïdes de X est un domaine analytique.

Remarque 1.20. — Pour définir une structure d'espace k-analytique sur un espace topologique X, il n'est pas nécessaire de décrire *tous* les domaines affinoïdes de X ; il suffit de se donner un *atlas affinoïde* sur X ([7], def. 1.2.3 ; voir l'exemple 1.23 *infra*).

Exemple 1.21. — Un espace k-affinoïde a une structure naturelle d'espace k-analytique ; ses domaines affinoïdes pour cette structure sont exactement ceux de la définition 1.8.

Exemple 1.22. — Un domaine analytique d'un espace k-analytique X hérite d'une structure canonique d'espace k-analytique. Donnons des exemples de tels domaines :

- un ouvert de X en est un domaine analytique, en vertu du fait que tout point d'un espace k-affinoïde a une base de voisinages affinoïdes ;
- si V est une partie compacte de X qui est la réunion d'une famille finie (V_i) de domaines affinoïdes alors les V_i forment un G-recouvrement de V, qui est donc un domaine analytique de X.

[13] Le G fait référence à Grothendieck.

Exemple 1.23. — Soit E l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T]$, muni de la topologie induite par la topologie produit de $\mathbb{R}^{k[T]}$. Pour tout réel strictement positif r, notons E_r le sous-ensemble de E formé des φ telles que $|\varphi(T)|$ soit inférieure ou égal à r ; la restriction à $k[T]$ induit pour tout r un homéomorphisme $\iota_r : \mathscr{M}(k\{r^{-1}T\}) \simeq E_r$. La famille (E_r, ι_r) est un atlas affinoïde sur E ; l'espace k-analytique défini par ce biais s'appelle la *droite affine analytique sur* k et est notée $\mathbb{A}_k^{1,an}$.

Soit X un espace k-analytique ; on désignera par X_G la catégorie de ses domaines analytiques, les flèches étant simplement les inclusions. On la munit de la topologie de Grothendieck définie par les G-recouvrements ; on l'appelle la *G-topologie.* Si U est un ouvert de X alors tout recouvrement ouvert de U en est un G-recouvrement : la G-topologie est plus fine que la topologie « naturelle » de X.

Définition des morphismes. — Si X et Y sont deux espaces k-analytiques un *morphisme* f entre X et Y est la donnée :

• d'une application continue (notée encore f) entre X et Y, telle que la famille des domaines affinoïdes de X dont l'image est contenue dans un domaine affinoïde de Y constitue un G-recouvrement de X ;

• d'une famille de morphismes $\mathscr{A}_V \to \mathscr{A}_U$ indexée par les couples formés d'un domaine affinoïde U de X et d'un domaine affinoïde V de Y tels que $f(U)$ soit inclus dans V ; on demande que pour un tel (U, V) l'application $U \to V$ induite par $\mathscr{A}_V \to \mathscr{A}_U$ *via* les homéomorphismes $\mathscr{M}(\mathscr{A}_U) \simeq U$ et $\mathscr{M}(\mathscr{A}_V) \simeq V$ coïncide avec f, et que le système des $\mathscr{A}_V \to \mathscr{A}_U$ soit compatible aux restrictions.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux algèbres k-affinoïdes alors $\mathrm{Hom}(\mathscr{M}(\mathscr{A}), \mathscr{M}(\mathscr{B}))$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Hom}(\mathscr{B}, \mathscr{A})$. Si X et Y sont deux espaces k-analytiques le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Hom}(U, Y)$ sur X_G est un faisceau ; on le déduit essentiellement du théorème d'acyclicité de Tate rappelé plus haut juste avant l'exemple 1.9. Par ailleurs on vérifie sans peine que $\mathbb{A}_k^{1,an}$ est un *objet en anneaux* dans la catégorie des espaces k-analytiques. Si X est un espace k-analytique, le faisceau $\mathrm{Hom}(., \mathbb{A}_k^{1,an})$ sur X_G est ainsi un faisceau en anneaux qui est appelé le *faisceau structural* de X et est noté $\mathscr{O}_{X_G}$; on désignera par $\mathscr{O}_X$ sa restriction à la catégorie des ouverts de X. Si U est un domaine analytique de X les éléments de $\mathscr{O}_{X_G}(U)$ sont appelés *fonctions analytiques sur* U ; si U est un domaine affinoïde de X, la flèche naturelle $\mathscr{A}_U \to \mathscr{O}_{X_G}(U)$ est un isomorphisme.

Soient x un point de X et V un domaine affinoïde de X contenant x ; le corps résiduel complété de x dans V ne dépend pas de V et est noté $\mathscr{H}(x)$. Pour tout domaine analytique U de X contenant x on dispose d'un morphisme d'évaluation $f \mapsto f(x)$ de $\mathscr{O}_{X_G}(U)$ vers $\mathscr{H}(x)$. Si $Y \to X$ est un morphisme entre espaces k-analytiques, la fibre de Y en un point x de X a une structure naturelle d'espace $\mathscr{H}(x)$-analytique.

La *dimension k-analytique* d'un espace k-analytique X est la borne supérieure de l'ensemble des dimensions k-analytiques des $\mathscr{O}_{X_G}(U)$, où U parcourt la famille des domaines affinoïdes de X ; si X est paracompact sa dimension topologique est inférieure ou égale à sa dimension k-analytique, avec égalité lorsque X possède un G-recouvrement par des domaines *strictement* affinoïdes.

On sait définir le bord et l'intérieur d'un espace k-analytique, et plus généralement d'un morphisme entre deux tels espaces. Un morphisme entre deux espaces *k-affinoïdes* est sans bord si et seulement si le morphisme correspondant entre algèbres de Banach est fini ; si $Y \to X$ est une inclusion de domaine analytique, son bord en tant que morphisme coïncide avec le bord topologique de Y dans X.

Soit L une extension complète de k. On peut définir un *foncteur de changement de base* $X \mapsto X_L$ de la catégorie des espaces k-analytiques vers celle des espaces L-analytiques ; il consiste G-localement à remplacer $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ par $\mathscr{M}(\mathscr{A}\widehat{\otimes}_k L)$. Si X est un espace k-analytique, on dispose d'une application continue surjective $X_L \to X$; la dimension L-analytique de X_L est égale à la dimension k-analytique de X.

Enfin les produits fibrés existent dans la catégorie des espaces k-analytiques, l'opération G-locale correspondante consistant à faire le produit tensoriel complété de deux algèbres k-affinoïdes au-dessus d'une troisième.

DÉFINITION 1.24. — *Un* bon *espace k-analytique est un espace analytique dont tout point possède une base de voisinages affinoïdes.*

Donnons un exemple et un contre-exemple : un espace affinoïde est bon. Le lieu de validité Ω sur le polydisque unité de dimension 2 de la condition « $|T| = 1$ ou $|S| = 1$ » (où S et T sont les deux fonctions coordonnées) est un domaine analytique qui n'est pas bon : le point $\sum a_{i,j} T^i S^j \mapsto \max |a_{i,j}|$ n'a en effet pas de voisinage affinoïde[14] dans Ω.

Indiquons quelques propriétés spécifiques aux bons espaces k-analytiques ; soient X un tel espace et x l'un de ses points. L'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est noethérien et hensélien ; son corps résiduel $\kappa(x)$ s'identifie naturellement à un sous-corps dense de $\mathscr{H}(x)$ et il est hensélien (pour la restriction de la valeur absolue de $\mathscr{H}(x)$).

1.4. Deux constructions d'espaces analytiques

L'analytification d'une variété algébrique ([6], 3.4.1 et [7], 2.6). — On peut associer de manière fonctorielle à toute k-variété algébrique $\mathscr{X}$ un espace k-analytique $\mathscr{X}^{an}$. Lorsque $\mathscr{X}$ est affine d'anneau A, l'espace topologique sous-jacent à $\mathscr{X}^{an}$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives de A dans $\mathbb{R}_+$; si $\mathscr{X}$ est la droite affine on retrouve ainsi l'espace $\mathbb{A}_k^{1,an}$ introduit plus haut.

[14] On peut déduire ce résultat de la théorie de Temkin sur la réduction des germes d'espaces k-analytiques ([64], Th. 5.1).

Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique sur k. L'espace $\mathscr{X}^{an}$ est bon et sans bord. Sa dimension k-analytique, sa dimension topologique et la dimension de Krull de $\mathscr{X}$ coïncident. Le morphisme d'espaces annelés $\mathscr{X}^{an} \to \mathscr{X}$ est plat et surjectif ; il induit une bijection $\pi_0(\mathscr{X}^{an}) \simeq \pi_0(\mathscr{X})$, et identifie l'ensemble des points *rigides* de $\mathscr{X}^{an}$ à celui des points *fermés* de $\mathscr{X}$. L'espace *topologique* $\mathscr{X}^{an}$ est séparé si et seulement si $\mathscr{X}$ est séparée ; il est compact si et seulement si $\mathscr{X}$ est propre, et dans ce dernier cas les théorèmes de type GAGA s'appliquent.

La fibre générique d'un schéma formel ([8], §1). — Soit $\mathfrak{X}$ un k^o-schéma formel localement topologiquement de présentation finie. On peut là encore lui associer de manière fonctorielle un espace k-analytique $\mathfrak{X}_\eta$ appelé sa *fibre générique* ; si $\mathfrak{X}$ est le spectre formel d'une k^o-algèbre $\mathfrak{A}$ topologiquement de présentation finie, $\mathfrak{X}_\eta$ est simplement l'espace k-affinoïde $\mathscr{M}(\mathfrak{A} \otimes_{k^o} k)$; si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact $\mathfrak{X}_\eta$ est compact. Si $\mathfrak{U}$ est un ouvert de $\mathfrak{X}$ alors $\mathfrak{U}_\eta$ est un domaine analytique fermé de $\mathfrak{X}_\eta$, et tout recouvrement ouvert de $\mathfrak{U}$ induit un G-recouvrement de $\mathfrak{U}_\eta$. Il existe une flèche de réduction[(15)] de $\mathfrak{X}_\eta$ vers la fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$ de $\mathfrak{X}$ qui est anticontinue[(16)] ; son image est fermée.

Lorsque $\mathfrak{X}$ *est plat* la réduction $\mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$ est surjective, les dimensions k-analytique et topologique de $\mathfrak{X}_\eta$ coïncident avec la dimension de Krull de $\mathfrak{X}_s$, et si $\mathfrak{X}$ est de plus quasi-compact, $\mathfrak{X}_\eta$ est sans bord si et seulement si $\mathfrak{X}$ est propre ([63], cor. 4.4).

Remarque 1.25. — L'espace $\mathfrak{X}_\eta$ est bon si $\mathfrak{X}$ est propre ou affine *mais il ne l'est pas en général* : par exemple, si $\mathfrak{X}$ désigne l'ouvert complémentaire de l'origine dans le plan affine formel, $\mathfrak{X}_\eta$ est l'espace Ω introduit immédiatement après la définition 1.24.

2. LE TYPE D'HOMOTOPIE DE CERTAINS ESPACES ANALYTIQUES

2.1. Les courbes analytiques

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont extraits du chapitre 4 *de* [6].

Une *courbe k-analytique* est un espace k-analytique séparé[(17)] dont toutes les composantes connexes sont de dimension k-analytique égale à 1 ; ceci entraîne que sa

(15) La réduction d'une algèbre strictement k-affinoïde évoquée plus haut n'entre dans ce cadre que lorsque l'algèbre en question est *distinguée* ([16], 6.4.3) ; c'est toujours le cas si elle est réduite et si k est algébriquement clos.

(16) Cela signifie, rappelons-le, que l'image réciproque d'un ouvert est fermée.

(17) C'est-à-dire tel que la diagonale soit une immersion fermée. On peut montrer qu'une courbe k-analytique au sens ci-dessus est *automatiquement* paracompacte (cf. [50]).

dimension topologique est inférieure ou égale à 1[18]. Le théorème de réduction semi-stable de Bosch et Lütkebohmert ([18]) et l'étude explicite des disques de dimension 1 ([6], 1.4.4 et th. 4.2.1) permettent d'obtenir une bonne compréhension, et de l'allure locale des courbes k-analytiques, et de leur type d'homotopie. Commençons par l'allure locale ; on peut dire grossièrement qu'elle est celle d'un *arbre réel*, autrement dit d'un arbre en chaque point duquel peuvent aboutir une infinité de branches ; sa topologie est toutefois moins fine que la topologie d'arbre, un voisinage d'un point devant contenir *presque toutes* les branches y aboutissant. On démontre plus précisément la proposition suivante.

Proposition 2.1. — *Soit X une courbe k-analytique connexe et non vide. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *l'espace topologique X est contractile ;*

ii) *l'espace topologique X est simplement connexe ;*

iii) *pour tout couple (x, y) de points de X il existe un unique fermé de X homéomorphe à un intervalle réel compact d'extrémités x et y.*

De plus tout point d'une courbe k-analytique a une base de voisinages possédant les trois propriétés ci-dessus.

Soit X une courbe possédant ces trois propriétés. Chacun de ses domaines analytiques connexes et non vides les possède aussi, comme on le voit à l'aide de l'assertion *iii*). Par ailleurs il existe une compactification *topologique* canonique de X les vérifiant également. Les points de cette compactification qui n'appartiennent pas à X sont appelés les *bouts* de X.

Exemple 2.2. — La droite projective analytique $\mathbb{P}_k^{1,an}$ possède ces trois propriétés ; on va décrire à titre d'exemple l'unique chemin reliant deux k-points donnés de $\mathbb{P}_k^{1,an}$. Pour tout élément a de k le point correspondant de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ (défini par l'égalité $T = a$) sera encore noté a, et ∞ désignera le point à l'infini. Pour tout réel positif r et pour tout a appartenant à k, soit $\eta_{a,r}$ le point $\sum a_i(T-a)^i \mapsto \max |a_i| r^i$ de $\mathbb{A}_k^{1,an}$; remarquons que $\eta_{a,0}$ est simplement le k-point a, et décidons par convention que $\eta_{a,+\infty}$ n'est autre que ∞. L'unique intervalle tracé sur $\mathbb{P}_k^{1,an}$ reliant a à ∞ est alors $\{\eta_{a,r}\}_{r \in [0;+\infty]}$. Soient a et b deux éléments distincts de k et soit R le réel $|a-b|$; les points $\eta_{a,R}$ et $\eta_{b,R}$ coïncident. L'image de l'appplication de $[0; 2R]$ vers $\mathbb{P}_k^{1,an}$ qui envoie r sur $\eta_{a,r}$ s'il est inférieur ou égal à R, et sur $\eta_{b,2R-r}$ sinon, est l'unique intervalle tracé sur $\mathbb{P}_k^{1,an}$ reliant les deux k-points a et b. Notons que dans ces exemples les seuls points rigides des chemins construits sont leurs extrémités.

[18] Donnons un exemple où elle est nulle. Soit r un réel strictement positif qui n'est pas de torsion modulo $|k^*|$ et soit k_r l'algèbre k-affinoïde de l'exemple 1.3. Alors $\mathscr{M}(k_r)$ est une courbe k-analytique mais est un singleton puisque k_r est une extension complète de k.

Si x est un k-point, ou plus généralement un point rigide de $\mathbb{P}_k^{1,an}$, alors $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{x\}$ est connexe. Soient r un réel strictement positif et a un élément de k. Si r n'est pas de torsion modulo $|k^*|$ alors $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{a,r}\}$ a exactement deux composantes connexes, respectivement définies par les inégalités $|T-a| < r$ et $|T-a| > r$. Dans le cas contraire $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{a,r}\}$ a une infinité de composantes connexes. Décrivons-les en supposant, pour simplifier, que r est égal à 1, que a est égal à 0 et que k est algébriquement clos. Soit S un système de représentants de $\widetilde{k}$ dans k^o. Pour tout s dans S notons U_s l'ouvert de $\mathbb{P}_k^{1,an}$ défini par l'inégalité $|T-s| < 1$; notons U_∞ celui donné par la condition $|T| > 1$. Les composantes connexes de $\mathbb{P}_k^{1,an} - \{\eta_{0,1}\}$ sont alors les U_t, où t parcourt $S \cup \{\infty\}$.

Décrivons maintenant le type d'homotopie d'une courbe k-analytique.

Proposition 2.3. — *Soit X une courbe k-analytique. L'ensemble des points de X possédant un voisinage simplement connexe ayant au plus un bout est un ouvert de X ; son complémentaire est noté $S(X)$, est appelé le* squelette *de X et est localement un graphe fini. Si Y est une composante connexe de X ne rencontrant pas $S(X)$ elle est contractile, sinon elle admet une rétraction compacte par déformation sur $S(X) \cap Y$.*

Le squelette de l'analytification $\mathscr{X}^{an}$ d'une k-courbe algébrique $\mathscr{X}$ a un nombre fini de sommets. Lorsqu'elle est projective, il est relié comme on le verra plus bas aux propriétés de sa « réduction modulo k^{oo} ». Considérons par exemple une courbe elliptique $\mathscr{X}$ à réduction semi-stable déployée. Si $\mathscr{X}$ a bonne réduction alors $S(\mathscr{X}^{an})$ est vide et $\mathscr{X}^{an}$ est contractile ; si $\mathscr{X}$ a mauvaise réduction alors $S(\mathscr{X}^{an})$ est homéomorphe à un cercle et $S(\mathscr{X}^{an}) \subset \mathscr{X}^{an}$ est une équivalence homotopique.

Soit X une courbe k-analytique. Qualifions d'*extrémal* tout point x de X possédant la propriété suivante : *pour tout ouvert connexe U de X contenant x l'ouvert $U - \{x\}$ est encore connexe.*

Proposition 2.4. — *Soit X une courbe k-analytique normale et sans bord et soit x un point de X. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *x est extrémal ;*

ii) *$|\mathscr{H}(x)^*|/|k^*|$ est de torsion et $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ est algébrique sur $\widetilde{k}$.*

En particulier tout point rigide de X est extrémal.

2.2. Tout espace analytique à réduction raisonnable se rétracte par déformation sur un polyèdre

Les liens dont on peut pressentir l'existence entre les géométries analytique ultramétrique et linéaire par morceaux (liens dont le rôle joué par les polygones de Newton est une première manifestation) prennent une forme particulièrement tangible dans la théorie de Berkovich. On a montré plus haut comment immerger un pavé réel dans un polydisque (exemple 1.6). On va voir ci-dessous que si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel sur k^o dont la fibre spéciale a des singularités « raisonnables », sa fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ se rétracte par déformation naturellement sur l'un de ses fermés $S(\mathfrak{X})$, qui est canoniquement un espace linéaire par morceaux ; l'inclusion $S(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}_\eta$ et la rétraction $\mathfrak{X}_\eta \to S(\mathfrak{X})$ jouissent de bonnes propriétés vis-à-vis des deux structures en jeu, la structure analytique sur $\mathfrak{X}_\eta$ et la structure polyédrale sur $S(\mathfrak{X})$.

Nous allons commencer par décrire explicitement une telle rétraction, dans un cas élémentaire qui a deux vertus : il est représentatif d'un certain nombre de techniques couramment utilisées dans la théorie, et il sert d'amorce à la construction des rétractions dans le cadre le plus général.

Soit a un élément non nul de k^o et soit n un entier. Notons $\mathfrak{Y}$ le spectre formel de $k^o\{T_0, \ldots, T_n\}/(T_0T_1 \ldots T_n - a)$. Sa fibre générique $\mathfrak{Y}_\eta$ est l'espace k-affinoïde $\mathscr{M}(\mathscr{A})$, où $\mathscr{A}$ désigne l'algèbre $k\{T_0, \ldots, T_n\}/(T_0T_1 \ldots T_n - a)$. Tout élément de $\mathscr{A}$ a une unique écriture, que l'on qualifiera de *réduite*, sous la forme d'une série $\sum a_I \mathbf{T}^I$ *où chaque terme ne fait intervenir que n indéterminées parmi les T_i*. Soit Δ le compact de $]0; 1]^{n+1}$ défini comme l'ensemble des $(n+1)$-uplets $(t_0, \ldots, t_n)$ tels que le produit des t_i soit égal à $|a|$. Si $\mathbf{r}$ appartient à Δ on vérifie que l'application de $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}_+$, qui envoie un élément a d'écriture réduite $\sum a_I \mathbf{T}^I$ sur $\max |a_I| \mathbf{r}^I$, est une semi-norme multiplicative bornée que l'on notera $\omega_{\mathbf{r}}$. Désignons par $\mathbf{S}$ l'image dans $\mathfrak{Y}_\eta$ du polytope compact Δ par le plongement $\mathbf{r} \mapsto \omega_{\mathbf{r}}$; on va construire une rétraction par déformation de $\mathfrak{Y}_\eta$ vers $\mathbf{S}$.

Soit $\mathscr{G}$ l'espace $\mathscr{M}(k\{T, S\}/(TS - 1))$; il a une structure naturelle de groupe k-analytique (c'est le « groupe multiplicatif des éléments de norme 1 »). Notons $\mathbf{G}$ le noyau de la multiplication $\mathscr{G}^{n+1} \to \mathscr{G}$; c'est un groupe k-analytique qui est *non canoniquement* isomorphe à $\mathscr{G}^n$. Désignons par $\chi_0, \ldots, \chi_n$ les fonctions coordonnées de $\mathscr{G}^{n+1}$ ainsi que leurs restrictions à $\mathbf{G}$. Pour tout réel t compris entre 0 et 1 et toute extension complète L de k, soit $\mathbf{G}_{L,t}$ le sous-groupe de $\mathbf{G}_L$ défini comme le lieu de validité simultanée des inégalités $|\chi_i - 1| \leq t$. *Le bord de Shilov de $\mathbf{G}_{L,t}$ est réduit à un élément.* En effet $\mathbf{G}_{L,0}$ est simplement le groupe trivial. On remarque ensuite que $\mathbf{G}_{L,1}$ n'est autre que $\mathbf{G}_L$ lui-même qui est isomorphe à $\mathscr{G}_L^n$; or ce dernier est un espace strictement L-affinoïde dont la réduction est le schéma *intègre* $\mathbb{G}^n_{m,\widetilde{L}}$, d'où la conclusion. Enfin si t appartient à $]0, 1[$ alors $\mathbf{G}_{L,t}$ est isomorphe au L-polydisque de dimension n de centre $(1, \ldots, 1)$ et de polyrayon $(t, \ldots, t)$, et son bord de Shilov est un singleton d'après l'exemple 1.13.

Le groupe $\mathbf{G}$ agit sur $\mathfrak{Y}_\eta$ par multiplication sur les coordonnées ; on a ainsi une flèche $m : \mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta \to \mathfrak{Y}_\eta$. Soit x appartenant à $\mathfrak{Y}_\eta$. La fibre en x de la projection $\mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta \to \mathfrak{Y}_\eta$ s'identifie à $\mathbf{G}_{\mathscr{H}(x)}$; pour tout t appartenant à $[0, 1]$ l'unique élément du bord de Shilov de $\mathbf{G}_{\mathscr{H}(x),t}$ peut par ce biais être vu comme un point de $\mathbf{G} \times \mathfrak{Y}_\eta$, que l'on notera $\sigma_t(x)$.

Proposition 2.5 ([13], dém. des th. 5.2 et 5.4, étapes 1 et 2)

Soit x appartenant à $\mathfrak{Y}_\eta$. L'élément $m(\sigma_0(x))$ (resp. $m(\sigma_1(x))$) de $\mathfrak{Y}_\eta$ n'est autre que x (resp. $\omega_{(|T_0(x)|,\ldots,|T_n(x)|)}$). L'application $(t,x)\mapsto m(\sigma_t(x))$ définit une rétraction par déformation de $\mathfrak{Y}_\eta$ sur $\mathbf{S}$.

Berkovich qualifie de *pluristable non dégénéré* tout k^o-schéma formel localement de présentation finie $\mathfrak{X}$ tel que le morphisme $\mathfrak{X}\to \mathrm{Spf}\, k^o$ admette, localement pour la topologie étale sur $\mathfrak{X}$, un dévissage en des flèches ou bien étales, ou bien de la forme $\mathrm{Spf}\,\mathfrak{A}\{T_0,\ldots,T_n\}/(T_0\ldots T_n-a)\to \mathrm{Spf}\,\mathfrak{A}$ où a est un élément de $\mathfrak{A}$ *non diviseur de zéro dans* $\mathfrak{A}\otimes_{k^o} k$; la fibre générique d'un tel schéma formel est normale. Donnons trois exemples de schémas formels pluristables non dégénérés : le schéma $\mathfrak{Y}$ considéré ci-dessus ; un schéma formel lisse, et en particulier la complétion formelle le long de sa fibre spéciale d'un k^o-schéma lisse ; la complétion formelle le long de sa fibre spéciale d'une k^o-courbe semi-stable à fibre générique lisse.

Soit $\mathfrak{X}$ un k^o-schéma formel pluristable non dégénéré ; on stratifie $\mathfrak{X}_s$ de manière évidente en sous-schémas localement fermés irréductibles et normaux, que l'on appellera ses *strates normales*. Berkovich consruit, *par un procédé long et délicat utilisant entre autres la proposition* 2.5 *de manière répétée*, une rétraction par déformation τ de $\mathfrak{X}$ sur l'un de ses sous-ensembles fermés qu'il note $S(\mathfrak{X})$ et appelle le *squelette*(19) de $\mathfrak{X}$. Il munit $S(\mathfrak{X})$ d'une structure naturelle d'espace $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de dimension inférieure ou égale à celle de $\mathfrak{X}_s$ qui satisfait aux conditions suivantes ([13], th. 8.1 et [14], §4 et §5) :

• $S(\mathfrak{X})$ possède une décomposition cellulaire compatible avec la structure en question, dont l'ensemble ordonné des cellules est en bijection *décroissante* avec celui des strates normales de $\mathfrak{X}_s$ (la dimension d'une cellule est égale à la codimension de la strate correspondante) ;

• si f est une fonction analytique sur $\mathfrak{X}_\eta$ dont le lieu des zéros est d'intérieur vide alors f est inversible au voisinage de $S(\mathfrak{X})$, et $\log|f|_{|S(\mathfrak{X})}$ est $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux ;

• si V est un domaine analytique de $\mathfrak{X}_\eta$ alors $V\cap S(\mathfrak{X})$ est un sous-espace $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $S(\mathfrak{X})$;

• si D est un sous-espace $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $S(\mathfrak{X})$ alors $\tau^{-1}(D)$ est un domaine analytique de $\mathfrak{X}_\eta$.

Exemple 2.6. — En reprenant les notations du début du paragraphe, le squelette de $\mathfrak{Y}$ est exactement le fermé $\mathbf{S}$ de $\mathfrak{Y}_\eta$.

(19) Ce squelette dépend effectivement de $\mathfrak{X}$ et pas seulement de $\mathfrak{X}_\eta$. Supposons que $\mathfrak{X}$ est une courbe ; dans ce cas $S(\mathfrak{X})$ ne coïncide pas forcément avec le squelette $S(\mathfrak{X}_\eta)$ décrit plus haut mais si Z est une composante connexe de $\mathfrak{X}_\eta$ alors $S(\mathfrak{X})\cap Z$ se rétracte sur $S(\mathfrak{X}_\eta)\cap Z$ lorsque celui-ci est non vide, et est contractile sinon.

Exemple 2.7. — Si $\mathfrak{X}$ est un k^o-schéma formel connexe, lisse et non vide alors $S(\mathfrak{X})$ est un singleton et $\mathfrak{X}_\eta$ est contractile. En particulier si $\mathscr{X}$ est une k-variété algébrique intègre, propre et lisse ayant bonne réduction, $\mathscr{X}^{an}$ est contractile.

Exemple 2.8. — Si $\mathfrak{X}$ est une k^o-courbe formelle, pluristable et non dégénérée alors $\mathfrak{X}_s$ est à singularités ordinaires, et si celles-ci sont déployées $S(\mathfrak{X})$ s'identifie au graphe dual de celui de $\mathfrak{X}_s$, graphe dual que l'on décrit comme suit : à chaque composante irréductible de $\mathfrak{X}_s$ correspond un sommet, et à chaque point singulier une arête qui relie les deux sommets correspondants (resp. se recolle en un cercle sur le sommet correspondant) si ce point singulier appartient à deux composantes (resp. n'appartient qu'à une composante). Par exemple, si $\mathfrak{X}_s$ est une cubique nodale ou une chaîne polygonale de droites projectives alors $S(\mathfrak{X})$ est un cercle.

Remarque 2.9. — Le type d'homotopie de $\mathscr{X}^{an}$ a été décrit plus haut sans justification lorsque $\mathscr{X}$ est une courbe elliptique à réduction semi-stable déployée ; il peut se déduire des exemples 2.7 et 2.8.

Remarque 2.10. — Si $\varphi : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme étale entre schémas formels pluristables non dégénérés alors $\varphi_\eta^{-1}(S(\mathfrak{X}))$ est égal à $S(\mathfrak{Z})$, et la flèche $S(\mathfrak{Z}) \to S(\mathfrak{X})$ ainsi induite est $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux ; c'est même une « immersion par morceaux » ([14], cor. 4.3.2 et th. 6.1.1). Plus généralement, soit $\mathfrak{X}$ un k^o-schéma formel pluristable non dégénéré et purement de dimension n pour un certain n, soit Z un espace k-analytique topologiquement séparé de dimension inférieure ou égale à n et soit ψ un morphisme de Z vers $\mathfrak{X}_\eta$; notons $\mathbf{T}$ le fermé $\psi^{-1}(S(\mathfrak{X}))$. Il existe *une et une seule* structure $\mathbb{Q}$-linéaire par morceaux sur $\mathbf{T}$ faisant de $\psi_{|\mathbf{T}}$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire par morceaux, qui est alors une immersion par morceaux ([35], th. 3.1).

La fibre générique d'un schéma formel pluristable non dégénéré a d'après ce qui précède le type d'homotopie d'un CW-complexe, et est de ce fait localement contractile. En se ramenant *à l'aide des altérations de De Jong* ([51], th. 5.9) au cas d'une telle fibre, Berkovich a démontré le théorème suivant, qui permet d'appliquer à un espace k-analytique lisse l'arsenal usuel de la topologie algébrique, et qui joue par ailleurs un rôle crucial dans sa théorie de l'intégration p-adique :

Théorème 2.11 ([13], th. 9.1). — *Si la valeur absolue de k n'est pas triviale, tout espace k-analytique lisse est localement contractile.*

2.3. Les variétés abéliennes

On présente ici certains des résultats des paragraphes 6.3 *et* 6.5 *de* [6].

Le type d'homotopie d'un tore analytique. — Soit $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif *analytique* sur k et soit n un entier. L'application $\mathbf{r} \mapsto (\sum a_I \mathbf{T}^I \mapsto \max |a_I| \mathbf{r}^I)$ établit un homéomorphisme entre $(\mathbb{R}_+^*)^n$ et un fermé Σ de $\mathbb{G}_m^n$. Par un procédé analogue à celui que décrit la proposition 2.5, on construit une rétraction par déformation σ

de $\mathbb{G}_m^n$ sur Σ qui envoie n'importe quel point x sur l'élément de Σ correspondant au n-uplet $|\mathbf{T}(x)|$. Soit Γ un *réseau* de $\mathbb{G}_m^n$, autrement dit un sous-groupe de $(k^*)^n$ isomorphe *via* la valeur absolue à un réseau Λ de $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Le groupe Γ agit proprement et discontinûment sur $\mathbb{G}_m^n$, et le quotient *topologique* $\mathbb{G}_m^n/\Gamma$ hérite d'une structure de groupe k-analytique connexe, lisse et *propre*, c'est-à-dire compact et sans bord. L'action de Γ commute à σ et sa restriction à Σ s'identifie à l'opération de Λ sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$. On en déduit que $\mathbb{G}^n/\Gamma$ se rétracte par déformation sur Σ/Γ, et que ce dernier est homéomorphe au tore réel $(\mathbb{R}_+^*)^n/\Lambda$. En combinant ce résultat avec le théorème d'uniformisation ([17]) on obtient la proposition suivante, qui généralise ce qui a été vu pour les courbes elliptiques.

Proposition 2.12. — *Soient $\mathscr{J}$ une variété abélienne sur k et g sa dimension. Il existe une extension finie L de k et un entier d compris entre* 0 *et g, tels que pour toute extension complète M de L le groupe M-analytique $\mathscr{J}_M^{an}$ ait le type d'homotopie du tore réel $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.*

Remarque 2.13. — Le cas où d est nul est celui où $\mathscr{J}_L$ a bonne réduction ; le cas où il vaut g est celui où $\mathscr{J}_L^{an}$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{G}_{m,L}^g$ par un réseau. Si $|k^*|$ est libre de rang 1 il suffit de prendre pour L une extension telle que $\mathscr{J}_L$ soit à réduction semi-abélienne déployée ; l'entier d est alors la dimension de la partie torique de $(\mathscr{N} \times_{L^o} \widetilde{L})^o$, où $\mathscr{N}$ est le modèle de Néron de $\mathscr{J}_L$.

3. APPLICATIONS DIVERSES ET VARIÉES

3.1. Comment remédier à un « défaut » de la théorie spectrale p-adique

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach non nulle le spectre d'un élément a de $\mathscr{A}$ est une partie compacte *non vide* de $\mathbb{C}$. La démonstration de cette assertion repose de manière essentielle sur le fait qu'une fonction localement développable en série entière sur $\mathbb{C}$ l'est globalement, ce qui permet d'utiliser ensuite le théorème de Liouville ; elle ne se transpose donc pas au cas ultramétrique, et de fait la proposition correspondante dans ce cadre est fausse. Donnons un contre-exemple ; soit k un corps ultramétrique complet et soit r un réel strictement positif qui n'est pas de torsion modulo $|k^*|$. La k-algèbre de Banach k_r de l'exemple 1.3 est un corps ; en particulier $T - \lambda$ est un élément inversible de k_r pour tout λ dans k, même lorsque ce dernier est algébriquement clos : le spectre « naïf » de T est donc vide.

C'est pour pallier cette lacune que fut développée à l'origine la théorie de Berkovich et elle y parvint fort bien ([6], chap. 7). Si k est un corps ultramétrique complet, elle associe en effet à tout élément a d'une k-algèbre de Banach $\mathscr{A}$ une partie non pas de k, mais de la *droite affine analytique sur k*. On note cette partie Sp a et on l'appelle le spectre de a ; elle est compacte, non vide lorsque $\mathscr{A}$ est non nulle, et sa trace sur k est le spectre traditionnel. Dans l'exemple mentionné ci-dessus Sp T est le singleton $\{\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i| r^i\}$. Les résultats de base de la théorie spectrale complexe s'étendent ici, tel par exemple le calcul fonctionnel holomorphe : toute fonction analytique définie sur un voisinage de Sp a dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$ peut être évaluée en a.

3.2. Fécondité de la topologie étale analytique

C'est sans doute une conjecture de Carayol et Drinfeld ([24]) qui fit apparaître pour la première fois la nécessité de disposer d'une théorie de la cohomologie étale en géométrie analytique ultramétrique. Cette conjecture prédisait, *grosso modo*, qu'une partie des correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales devait se réaliser dans la cohomologie étale de certains revêtements finis galoisiens (introduits par Drinfeld) des « demi-plans de Poincaré p-adiques de dimension supérieure », pourvu que l'expression « cohomologie étale » eût un sens dans ce contexte, celui de la géométrie rigide ; et à l'époque elle n'en avait pas.

Berkovich s'est attelé à la tâche ; c'est l'objet essentiel de l'article [7]. Nous n'en dirons pratiquement rien. Indiquons simplement qu'il qualifie d'*étale* un morphisme qui satisfait à la condition jacobienne usuelle *et qui est sans bord* : une immersion ouverte est étale, celle du disque unité fermé dans la droite affine ne l'est pas. Il définit à partir de cette notion une topologie de Grothendieck puis étudie systématiquement la cohomologie correspondante ainsi que ses variantes à support, et démontre à leur sujet les résultats fondamentaux attendus : changements de base, dualité de Poincaré... Il établit également des théorèmes de comparaison entre les cohomologies étales algébrique et analytique, pour les faisceaux de torsion première à la caractéristique résiduelle[(20)].

Signalons immédiatement qu'en ce qui concerne la motivation « automorphe » mentionnée en introduction, la cohomologie étale de Berkovich a rendu les services attendus : elle a effectivement permis de donner un sens précis à la conjecture de Carayol-Drinfeld (et de la démontrer !). Le lecteur intéressé pourra se reporter aux travaux de Boyer, Harris et Taylor pour le cas p-adique ([23], [45], [46]), et à ceux de Hausberger pour celui d'égale caractéristique ([47]).

Toutefois la théorie obtint son premier gros succès à propos d'une autre conjecture, due à Deligne, sur les *cycles évanescents*. Dans le cadre *transcendant* ces objets interviennent dans l'étude du problème suivant : on se donne une famille continue d'espaces topologiques au-dessus d'un disque complexe qui est localement constante sur un voisinage épointé du centre O, et on cherche à comparer la cohomologie de la fibre en O à celle de la « fibre générale » de la famille.

Disons quelques mots au sujet des cycles évanescents *algébriques*. Soit k un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique pour laquelle il est hensélien. Soient L une

(20) Il a ensuite étendu ([9]) ces théorèmes au cas de la torsion première à la caractéristique *du corps de base*.

clôture séparable de k et G le groupe de Galois correspondant. La valeur absolue de k se prolonge d'une unique manière à L, et le corps résiduel $\widetilde{L}$ est une clôture algébrique de $\widetilde{k}$. Soit $\mathscr{X}$ un k^o-schéma de présentation finie. On note $\mathscr{X}_\eta$ sa fibre générique, $\mathscr{X}_{\overline{\eta}}$ sa fibre générique géométrique $\mathscr{X}_\eta \times_k L$, et $\mathscr{X}_{\overline{s}}$ sa fibre spéciale géométrique $\mathscr{X} \times_{k^o} \widetilde{L}$. Désignons par $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$ (resp. $\mathbf{Ab}_G(\mathscr{X}_{\overline{s},\text{ét}})$) la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}}$ (resp. des faisceaux en groupes abéliens sur $\mathscr{X}_{\overline{s},\text{ét}}$ munis d'une action continue de G compatible avec celle sur $\mathscr{X}_{\overline{s}}$). On définit un *foncteur des cycles évanescents* Ψ_η de $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$ vers $\mathbf{Ab}_G(\mathscr{X}_{\overline{s},\text{ét}})$ qui est exact à gauche. Pour tout $\mathscr{F}$ appartenant à $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$ les $\mathrm{R}^q\Psi_\eta\mathscr{F}$ seront appelés les *faisceaux de cycles évanescents associés à* $\mathscr{F}$. Ils mesurent en un sens le « degré d'irrégularité de la fibration $\mathscr{X} \to \operatorname{Spec} k^o$ », et sont par exemple nuls pour q strictement positif lorsque $\mathscr{X}$ est lisse sur k^o, et $\mathscr{F}$ localement constant et annulé par un entier inversible dans k^o ; si $\mathscr{X}$ est *propre* on dispose, pour tout $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$, d'une suite spectrale naturelle $\mathrm{H}^p(\mathscr{X}_{\overline{s},\text{ét}}, \mathrm{R}^q\Psi_\eta\mathscr{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathscr{X}_{\overline{\eta},\text{ét}}, \overline{\mathscr{F}})$, où $\overline{\mathscr{F}}$ désigne l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{X}_{\overline{\eta},\text{ét}}$.

Berkovich a démontré dans [8] les conjectures de Deligne sur la question ; elles affirmaient entre autres que lorsque k est complet les constructions ci-dessus « ne dépendent que de la complétion formelle $\widehat{\mathscr{X}}$ de $\mathscr{X}$ le long de sa fibre spéciale ». Supposons donc k complet et soit $\mathfrak{X}$ un k^o-schéma formel topologiquement de présentation finie. Berkovich définit un *foncteur des cycles évanescents* $\Psi_\eta : \mathbf{Ab}(\mathfrak{X}_{\eta,\text{ét}}) \to \mathbf{Ab}_G(\mathfrak{X}_{\overline{s},\text{ét}})$ qui est exact à gauche ; le site $\mathfrak{X}_{\eta,\text{ét}}$ est bien entendu celui qu'il a introduit et étudié dans [7], et les notations $\mathbf{Ab}$ et $\mathbf{Ab}_G$ ont le même sens que plus haut. Il montre l'existence pour tout $\mathscr{F}$ de $\mathbf{Ab}(\mathfrak{X}_{\eta,\text{ét}})$ d'une suite spectrale naturelle $\mathrm{H}^p(\mathfrak{X}_{\overline{s},\text{ét}}, \mathrm{R}^q\Psi_\eta\mathscr{F}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{X}_{\overline{\eta},\text{ét}}, \overline{\mathscr{F}})$, où $\mathfrak{X}_{\overline{\eta}}$ est l'espace déduit de $\mathfrak{X}_\eta$ par extension des scalaires au *complété* de L, et où $\overline{\mathscr{F}}$ est l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}_{\overline{\eta},\text{ét}}$.

Soit $\mathscr{X}$ un k^o-schéma de présentation finie ; si $\mathscr{F}$ est un objet de $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$ on notera $\widehat{\mathscr{F}}$ son image réciproque dans $\mathbf{Ab}(\widehat{\mathscr{X}}_{\eta,\text{ét}})$.

THÉORÈME 3.1 ([8], cor. 5.3.). — *Si $\mathscr{F}$ est un objet de $\mathbf{Ab}(\mathscr{X}_{\eta,\text{ét}})$ il existe pour tout entier q une flèche naturelle $\mathrm{R}^q\Psi_\eta\mathscr{F} \to \mathrm{R}^q\Psi_\eta\widehat{\mathscr{F}}$, et lorsque $\mathscr{F}$ est de torsion cette flèche est un isomorphisme.*

Signalons que Berkovich a étendu ses résultats à une classe plus large de schémas formels ([10]), et a par ailleurs étudié les cycles évanescents sur ses propres espaces ([11]).

Dessins d'enfants p-adiques. — Dans un tout autre ordre d'idées, Yves André a utilisé dans [1] la topologie étale sur un espace de Berkovich pour jeter les bases d'une variante p-adique de la théorie des « dessins d'enfants » ; elle comprend entre autres une description « géométrique » de $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, que nous allons maintenant présenter.

Un *revêtement étale* entre espaces analytiques (au sens de Berkovich) est un morphisme qui est *localement sur le but* somme disjointe de morphismes finis étales. Donnons deux exemples :

Exemple 3.2. — Si X est un espace analytique et si $Y \to X$ est un revêtement *topologique* alors Y hérite d'une structure naturelle d'espace analytique, pour laquelle $Y \to X$ est en particulier un revêtement étale (il est localement sur X somme disjointe *d'isomorphismes*).

Exemple 3.3. — Si l'on travaille en *inégale caractéristique*, le logarithme donné par la série usuelle définit un revêtement étale de la droite affine analytique par le disque unité ouvert de centre 1.

Soit Y un espace analytique. Un revêtement étale $Z \to Y$ est dit *tempéré* s'il est quotient d'un revêtement de la forme $T \to T_0 \to Y$, où $T \to T_0$ est un revêtement *topologique quelconque* et où $T_0 \to Y$ est *fini étale*. Supposons Y connexe ; à tout « point géométrique[(21)] » y de Y est associé un groupe topologique $\pi_1^{\mathrm{temp}}(Y, y)$ qui est appelé le *groupe fondamental tempéré de* (Y, y), qui classe les revêtements tempérés de Y, et qui n'est en général ni discret ni profini. Si par exemple le corps de base est algébriquement clos et si Y est l'analytifiée (supposée pointée en un certain y) d'une courbe elliptique $\mathscr{Y}$, alors $\pi_1^{\mathrm{temp}}(Y, y)$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^2$ si $\mathscr{Y}$ a bonne réduction et à $\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ sinon[(22)] (le facteur $\mathbb{Z}$ correspond au groupe fondamental *topologique* de Y, qui est dans ce cas homotope à un cercle).

Désignons par X la droite projective sur $\mathbb{Q}$ privée de $\{0, 1, \infty\}$. Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. On dispose d'une flèche naturelle $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Out}\ \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$ (lorsqu'on travaille à automorphisme intérieur près on peut oublier le point-base) ; par un célèbre résultat de Belyi elle est injective.

Choisissons un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ et identifions ainsi $\mathrm{Gal}\,(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ à un sous-groupe $G_{\mathbb{R}}$ de $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit x un $\mathbb{C}$-point de X. Le groupe $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, x)$ est canoniquement isomorphe au complété profini de $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}), x)$. Il en résulte l'existence d'une flèche naturelle $\mathrm{Out}\ \pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) \to \mathrm{Out}\ \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$ qui est injective.

Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de $\mathbb{Q}_p$. Plongeons $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$ et identifions ainsi $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ à un sous-groupe G_p de $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit z un $\mathbb{C}_p$-point de X. Le groupe $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}}, z)$ est canoniquement isomorphe au complété profini de $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{an}_{\mathbb{C}_p}, z)$. Il en résulte l'existence d'une flèche naturelle $\mathrm{Out}\ \pi_1^{\mathrm{temp}}(X^{an}_{\mathbb{C}_p}) \to \mathrm{Out}\ \pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$ qui est injective.

(21) Un tel point consiste en la donnée d'un vrai point x de Y et d'une extension complète algébriquement close de $\mathscr{H}(x)$.

(22) Cette distinction entre les groupes des courbes elliptiques à bonne et à mauvaise réduction joue un rôle crucial dans la démonstration d'André, qui fait intervenir l'action de Galois sur l'espace des j-invariants.

Par le biais des différents morphismes évoqués ci-dessus on considère Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Out $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$ et Out $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{an})$ comme trois sous-groupes de Out $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}})$. Un résultat classique assure que Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cap$ Out $\pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C}))$ est exactement $G_{\mathbb{R}}$; Yves André démontre ([1], th. 7.2.1) que Gal $(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cap$ Out $\pi_1^{\mathrm{temp}}(X_{\mathbb{C}_p}^{an})$ est exactement G_p.

3.3. Intégration de 1-formes p-adiques sur de vrais chemins

Soit p un nombre premier, soit $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et soit k un sous-corps complet de $\mathbb{C}_p$. Ayant notamment en vue d'éventuelles applications à la théorie de Hodge p-adique, Berkovich a développé dans [5] une théorie de l'intégration des 1-formes différentielles fermées sur les espaces k-analytiques lisses. On va la présenter succinctement en se plaçant pour simplifer sur $\mathbb{C}_p$, dont le corps résiduel sera noté $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Le logarithme p-adique. — Fixons un système compatible (p^r) de puissances *rationnelles* de p dans $\mathbb{C}_p$. Soit l le logarithme analytique usuel sur le disque unité ouvert de centre 1 et soit L un logarithme « naïf » sur $\mathbb{C}_p^*$, c'est-à-dire un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{C}_p^*, \times)$ vers $(\mathbb{C}_p, +)$ tel que $L(z)$ soit égal à $l(z)$ pour tout z vérifiant l'inégalité $|z-1| < 1$. Soit α appartenant à $\mathbb{C}_p^*$. Le groupe $\overline{\mathbb{F}_p}^*$ est de torsion première à p ; on en déduit que α possède une unique écriture de la forme $p^r\mu z$ où r est un rationnel, où μ est une racine de l'unité d'ordre premier à p et où z vérifie l'inégalité $|z-1| < 1$. L'élément $L(\alpha)$ est alors nécessairement égal à $rL(p) + l(z)$; ainsi $L(p)$ suffit à déterminer L. Réciproquement on vérifie que pour tout λ appartenant à $\mathbb{C}_p$ il existe un (unique) logarithme naïf sur $\mathbb{C}_p^*$ prenant en p la valeur λ : on le définit par la formule ci-dessus et on le note L_λ.

Remarque 3.4. — Soit $\mathbb{G}_m$ le groupe multiplicatif analytique sur $\mathbb{C}_p$ et soit Σ le fermé $\{\sum a_i t^i \mapsto \max |a_i| r^i\}_{r \in \mathbb{R}_+^*}$ de $\mathbb{G}_m$. On notera U l'ouvert $\mathbb{G}_m - \Sigma$. Il a une infinité de composantes connexes, qui sont exactement les disques ouverts dont le module du centre est égal au rayon. Donnons-nous λ dans $\mathbb{C}_p$. Le logarithme L_λ provient par construction d'une fonction analytique sur U dont la différentielle est la forme $\mathrm{d}t/t$. Celle-ci a donc une primitive analytique *sur* U ; on voit facilement que l'on ne peut espérer mieux : tout domaine analytique de $\mathbb{G}_m$ sur lequel $\mathrm{d}t/t$ a une primitive est contenu dans U.

Pour intégrer Berkovich a besoin, comme dans le cas classique, de l'existence locale de primitives des formes fermées. Cette existence est assurée au voisinage des $\mathbb{C}_p$-points : sur un espace lisse un tel point possède toujours un voisinage qui est isomorphe à un polydisque ouvert, et il n'y a plus qu'à appliquer le lemme de Poincaré. Mais elle ne l'est pas ailleurs : il résulte par exemple de la remarque 3.4 que si η appartient à Σ alors $\mathrm{d}t/t$ n'est intégrable sur aucun voisinage de η dans $\mathbb{G}_m$.

La stratégie adoptée pour remédier à ce problème est la suivante. Soit X un espace $\mathbb{C}_p$-analytique lisse. Un *gros ouvert*[23] de X est un ouvert contenant tous les points x de X tels que $\mathscr{H}(x)$ ait même groupe des valeurs et même corps résiduel que $\mathbb{C}_p$. Un gros ouvert de X contient $X(\mathbb{C}_p)$ et est donc dense ; l'ouvert U de $\mathbb{G}_m$ est gros. Appelons *anneau des fonctions analytiques naïves* sur X, et notons $\mathfrak{N}(X)$, la limite inductive des $\mathscr{O}_X(V)$ où V parcourt l'ensemble des gros ouverts de X ; les logarithmes L_λ sont par exemple des fonctions naïves sur $\mathbb{G}_m$.

C'est au sein de $\mathfrak{N}(X)$ *que vont être choisies les primitives.* — Cette pétition de principe se heurte aussitôt à une difficulté majeure : l'anneau $\mathfrak{N}(X)$ est (en dimension strictement positive...) gigantesque ; il contient par exemple « énormément » de fonctions localement constantes, un gros ouvert de X pouvant avoir une infinité de composantes connexes même lorsque X est connexe (c'est ainsi le cas de l'ouvert U de $\mathbb{G}_m$). Or pour avoir une théorie un tant soit peu raisonnable, il est évidemment nécessaire que *toute fonction à différentielle nulle soit constante sur chaque composante connexe de* X. Pour que cette dernière condition soit vérifiée il va falloir astreindre les primitives considérées à vivre dans un sous-anneau suffisamment petit $\mathscr{S}(X)$ de $\mathfrak{N}(X)$; par exemple $\mathscr{S}(\mathbb{G}_m)$ ne pourra contenir L_λ que pour *un seul* λ. C'est la construction d'un système convenable d'anneaux $(\mathscr{S}(X))$ (où X varie) qui constitue la majeure partie du travail de Berkovich.

Remarque 3.5. — Aucun choix ne s'impose *a priori* pour le logarithme de p. Il peut par conséquent être souhaitable d'en faire une indéterminée, c'est-à-dire de travailler avec l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}_p[\log p]$. Berkovich part plus généralement d'une $\mathbb{C}_p$-algèbre commutative K *quelconque*[24] dans laquelle ses intégrales seront destinées à prendre leurs valeurs et se donne un élément λ de K. On peut encore définir L_λ dans ce cadre, par la même formule que ci-dessus ; l'on obtient un élément de $(\mathscr{O}_{\mathbb{G}_m} \otimes_k K)(U)$ dont la différentielle dans $(\Omega^1_{\mathbb{G}_m} \otimes_k K)(U)$ est $\mathrm{d}t/t$.

On considère pour la suite K et λ comme fixés. Soit $\mathbf{L}$ le site dont les objets sont les espaces $\mathbb{C}_p$-analytiques *lisses*, dont les flèches sont les morphismes analytiques quelconques et dont la topologie est celle engendrée par les familles couvrantes *étales*. Soit $\mathscr{O}$ le faisceau structural de $\mathbf{L}$ et soit $\mathscr{O}^K$ le produit tensoriel $\mathscr{O} \otimes_{\mathbb{C}_p} K$. Notons $\mathfrak{N}^K$ la $\mathscr{O}^K$-algèbre (c'est-à-dire le faisceau en $\mathscr{O}^K$-algèbres sur $\mathbf{L}$) dite des « fonctions analytiques naïves à valeurs dans K », qui *par définition* associe à un espace lisse X la limite inductive des $\mathscr{O}^K(V)$, où V parcourt la famille des gros ouverts de X.

[23] On peut se contenter de penser à un gros ouvert comme à un ouvert contenant tous les $\mathbb{C}_p$-points de X ; les raisons qui ont conduit à en corser la définition sont purement techniques.

[24] Ce pourrait notamment être le corps B_{dR} ; signalons par ailleurs que K est de surcroît supposée filtrée, mais nous n'évoquerons pas cet aspect des choses ici.

Le théorème principal de Berkovich ([5], th. 1.6.1 et 1.6.2) assure l'existence d'une « plus petite » sous-$\mathscr{O}^K$-algèbre $\mathscr{S}^{K,\lambda}$ de $\mathfrak{N}^K$ possédant les propriétés suivantes[25] : *$\mathscr{S}^{K,\lambda}$ est « stable par différentiation », ce qui signifie précisément que la différentielle induit un morphisme $\mathscr{S}^{K,\lambda} \to \mathscr{S}^{K,\lambda} \otimes_{\mathscr{O}} \Omega^1$ entre faisceaux sur $\mathbf{L}$; le noyau de cette flèche est le faisceau constant K et le complexe de de Rham qu'elle induit est exact au rang* 1 (*une forme fermée sur un espace lisse X a localement des primitives sur $X_{\text{ét}}$*) ; *le logarithme L_λ appartient à $\mathscr{S}^{K,\lambda}(\mathbb{G}_m)$*. La construction de $\mathscr{S}^{K,\lambda}$ est extrêmement technique et utilise de manière cruciale les relèvements du morphisme de Frobenius ; elle est en partie inspirée par les travaux antérieurs de Coleman sur les courbes ([31]).

Remarque 3.6. — Soit X un espace $\mathbb{C}_p$-analytique. La flèche $\mathrm{H}^1(X_{\text{top}}, K) \to \mathrm{H}^1(X_{\text{ét}}, K)$ est un isomorphisme pour des raisons essentiellement formelles. Si X est contractile le groupe $\mathrm{H}^1(X_{\text{ét}}, K)$ est donc nul ; si de plus X est lisse ceci entraîne que *toute forme fermée appartenant à $(\mathscr{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega^1)(X)$ a une primitive dans $\mathscr{S}^{K,\lambda}(X)$*. La locale contractibilité des espaces lisses assure ainsi que le complexe de de Rham évoqué ci-dessus est déjà exact en rang 1 *pour la vraie topologie.*

Remarque 3.7. — Il résulte de ce qui précède et de l'exemple 2.7 que si $\mathscr{X}$ est une $\mathbb{C}_p$-variété algébrique propre et lisse ayant bonne réduction alors toute forme fermée de $(\mathscr{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega_1)(\mathscr{X}^{an})$ a une primitive dans $\mathscr{S}^{K,\lambda}(\mathscr{X}^{an})$.

Nanti du faisceau $\mathscr{S}^{K,\lambda}$, Berkovich est en mesure d'intégrer des 1-formes fermées sur des chemins exactement comme on le fait en géométrie analytique complexe, à savoir en calculant des différences de primitives. Soit X un espace $\mathbb{C}_p$-analytique lisse et soit γ une application continue de $[0;1]$ vers X telle que $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ appartiennent à $X(\mathbb{C}_p)$. À toute forme fermée ω vivant dans $(\mathscr{S}^{K,\lambda} \otimes \Omega_1)(X)$ est associé un élément de K noté $\int_\gamma \omega$ qui ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Pour toute fonction f appartenant à $\mathscr{S}^{K,\lambda}(X)$ on a bien entendu l'égalité $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$.

Donnons deux exemples. Plaçons-nous pour commencer sur $\mathbb{G}_m$ et fixons un chemin γ de 1 à p (rappelons que $\mathbb{G}_m$ est contractile ; par conséquent le résultat obtenu ne va pas dépendre du choix de γ). L'intégrale $\int_\gamma \mathrm{d}t/t$ peut se réécrire $\int_\gamma \mathrm{d}L_\lambda$ et vaut donc $L_\lambda(p) - L_\lambda(1)$, soit encore λ. Intéressons-nous maintenant au quotient $\mathbb{T}$ de $\mathbb{G}_m$ par $p^{\mathbb{Z}}$. On déduit de ce qui précède que pour n'importe quel lacet γ tracé sur $\mathbb{T}$ qui commence et aboutit à 1, l'intégrale $\int_\gamma \mathrm{d}t/t$ est égale à $\lambda\iota(\gamma)$ où $\iota(\gamma)$ désigne la classe de γ dans $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{T}, 1)$ convenablement identifié à $\mathbb{Z}$. Ceci entraîne que $\mathrm{d}t/t$ n'a pas de primitive dans $\mathscr{S}^{K,\lambda}(\mathbb{T})$ dès que λ est non nul ; elle en possède par contre une dans

[25] Les anneaux de sections globales de $\mathscr{S}^{K,\lambda}$ ne sont pas en général aisés à appréhender. Même sur la droite projective on n'en connaît pas de description explicite ; on sait toutefois que $\mathscr{S}^{K,\lambda}(\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p})$ est « très gros » : il existe ([5], lemme 8.5.2) un sous-$\mathbb{C}_p$-espace vectoriel *de dimension infinie* de $\mathfrak{N}(\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p})$ qui est inclus dans $\mathscr{S}^{K,\lambda}(\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p})$ pour tout couple (K, λ) (les fonctions qui le constituent sont donc construites sans utiliser le logarithme).

$\mathscr{S}^{K,0}(\mathbb{T})$ déduite de L_0 (qui est invariant sous la multiplication par p) par passage au quotient.

Signalons pour conclure que si X est un espace $\mathbb{C}_p$-analytique lisse, et si $\mathscr{D}$ est un système différentiel linéaire sur X qui est localement unipotent pour la topologie étale, les solutions de $\mathscr{D}$ *sur* $X_{\text{ét}}$ *et à valeurs dans* $\mathscr{S}^{K,\lambda}$ forment un système local de K-espaces vectoriels de dimension égale au rang de $\mathscr{D}$; dans ce contexte une théorie du transport parallèle (le long de vrais chemins dans certains cas, de « chemins étales » en général) a été développée par Berkovich ([5], 9.3 – 9.5 ; pour d'autres applications des espaces de Berkovich aux équations différentielles p-adiques, on pourra se reporter à la note [30] de B. Chiarellotto).

3.4. Les espaces de Berkovich : un cadre naturel pour l'analyse harmonique, l'équidistribution et les systèmes dynamiques

Ce paragraphe est consacré à l'évocation succincte de trois domaines de recherche (largement liés) qui ont fait et font encore l'objet d'une profusion de travaux dans le cadre de la géométrie complexe, mais dont le versant p-adique n'a commencé que récemment à être défriché. Il se trouve que sur ce dernier nombre des objets en jeu (fonctions harmoniques, mesures, sous-ensembles compacts particuliers...) ont une forte tendance à vivre « naturellement » sur les espaces de Berkovich, et qu'on perd beaucoup en compréhension à ne travailler qu'avec des ensembles de $\mathbb{C}_p$-points.

L'analyse harmonique. — Depuis quelques années plusieurs auteurs ont indépendamment entrepris de la développer sur les *courbes analytiques*. Citons par exemple Baker et Rumely qui, motivés par des problèmes de dynamique et d'équidistribution, en ont jeté les bases sur $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$ ([4], [2]). Ou encore Favre et Jonsson : afin d'appréhender la dynamique de certaines transformations holomorphes du germe $(\mathbb{C}^2, 0)$ ils ont construit ([38]) un *arbre des valuations* qui peut essentiellement s'interpréter comme une courbe de Berkovich. Ils ont mis au point sur cet arbre divers outils de théorie du potentiel(26) ; Favre et Rivera-Letelier en ont depuis appliqué certains à un problème d'équidistribution p-adique ([40]).

Les résultats les plus aboutis et les plus systématiques dans cette branche sont dus à Amaury Thuillier. Dans sa thèse ([66]) il introduit les analogues adéquats, dans le cadre des courbes k-analytiques lisses *quelconques* sur *n'importe quel* corps ultramétrique complet (à valeur absolue non triviale), des objets usuels de l'analyse harmonique sur les surfaces de Riemann (fonctions harmoniques et sous-harmoniques, courants, potentiels, opérateur dd^c...) et démontre dans ce contexte les théorèmes attendus. Il applique ensuite ces outils à la géométrie d'Arakelov.

(26) La théorie du potentiel sur cet arbre leur a aussi servi récemment à l'étude des singularités des fonctions pluri-sous-harmoniques sur le plan ([39]).

On va expliquer ici les bases de sa construction, en en donnant une présentation qui diffère de la sienne mais lui est équivalente. Soit X une courbe k-analytique lisse connexe telle que $S(X)$ soit non vide ; notons τ la rétraction compacte naturelle de X sur $S(X)$. Le théorème de réduction semi-stable, combiné à des arguments de descente galoisienne, permet de munir naturellement $S(X)$ d'une métrique, ou si l'on préfère d'une structure $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux. On dit qu'une fonction continue à valeurs réelles sur $S(X)$ est harmonique si elle est $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux et si sa dérivée vérifie la « loi des nœuds » usuelle ; on définit $H(X)$ comme l'ensemble des fonctions réelles sur X qui sont de la forme $h\circ\tau$, où h est harmonique sur $S(X)$; si h appartient à $H(X)$ alors h est continue et localement constante en dehors de $S(X)$.

Soit maintenant X une courbe k-analytique lisse quelconque. On note $H(X)$ l'ensemble des applications de X vers $\mathbb{R}$ telles que pour toute composante connexe Z de X, la restriction de h à Z appartienne à l'espace $H(Z)$ défini ci-dessus si $S(Z)$ est non vide, et soit constante sinon. On démontre que $U \mapsto H(U)$, où U parcourt la famille des ouverts de X, est un sous-faisceau de $\mathrm{C}^0(.,\mathbb{R})$, dit des *fonctions harmoniques.* Si U est un ouvert de X et f une fonction analytique inversible sur U alors $\log|f|$ est harmonique[(27)].

Thuillier définit ensuite les fonctions lisses comme celles qui sont continues et G-localement « harmoniques en dehors du bord », construit un opérateur dd^c qui envoie une fonction lisse sur une mesure à support discret codant l'écart à la « loi des nœuds » et qui est nulle si et seulement si la fonction de départ est harmonique... viennent ensuite les courants, les distributions, les fonctions de Green, les fonctions sous-harmoniques, les potentiels et capacités, *etc.* ; nous n'en dirons pas plus sur ces sujets et renvoyons le lecteur intéressé à sa thèse.

Indiquons toutefois comment le formalisme qu'il a développé lui permet de proposer une nouvelle formulation de la *théorie de l'intersection en géométrie d'Arakelov.* Soit $\mathscr{X}$ une courbe algébrique propre et lisse sur $\mathbb{Q}$ (pour fixer les idées). Les *diviseurs d'Arakelov* traditionnels sont des couples (D,g) où D est un diviseur sur un modèle entier convenable de $\mathscr{X}$, et g un courant d'un certain type sur $\mathscr{X}(\mathbb{C})$. L'approche de Thuillier est en un sens plus satisfaisante, dans la mesure où elle évite le choix d'un modèle entier et où elle fait jouer exactement le même rôle à toutes les places, finies ou non : « ses » diviseurs d'Arakelov sont des couples (D,g) où D est un diviseur sur $\mathscr{X}$, et où g est la donnée *pour toute place* v (avec une condition de compatibilité « adélique ») d'un courant g_v qui vit sur la courbe $\mathbb{Q}_v$-analytique $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{Q}_v}$ si v est finie, et sur la surface de Riemann $\mathscr{X}(\mathbb{C})$ si v est la place réelle.

[(27)] En général les fonctions de la forme $\log|f|$ n'engendrent pas H comme faisceau en $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Le quotient $\mathscr{Q}$ correspondant est un faisceau gratte-ciel : son support est inclus dans l'ensemble E des points x de X tels que $\widetilde{\mathscr{H}(x)}$ soit le corps des fonctions d'une courbe normale et projective $\mathscr{C}_x$ sur $\widetilde{k}$; sa fibre $\mathscr{Q}_x$ en un tel x est isomorphe à $(\mathrm{Pic}^0\ \mathscr{C}_x)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$; et l'ensemble des x appartenant à E tels que le genre de $\mathscr{C}_x$ soit strictement positif est une partie discrète de X.

Signalons pour terminer qu'une première variante ultramétrique du formalisme d'Arakelov fut mise au point, il y a une dizaine d'années, par Bloch, Gillet et Soulé ([15], [42]) ; c'est à Gubler que l'on doit l'introduction dans ce contexte de la théorie de Berkovich ([43]).

L'équidistribution. — C'est le terme générique sous lequel on englobe, en géométrie complexe, un certain nombre de résultats relatifs à des problèmes du type suivant : pour tout entier n on suppose donnée une famille finie $(x_{i,n})_i$ de points sur une variété analytique X, et l'on note μ_n la moyenne des masses de Dirac en les $x_{i,n}$; on se demande alors si la suite (μ_n) converge (faiblement) vers une certaine mesure de probabilité μ. Ces questions se sont jusqu'ici essentiellement rencontrées d'une part en dynamique, où l'on s'intéresse à la suite des images directes ou réciproques d'un point par les itérées d'une transformation donnée, d'autre part en arithmétique où l'on considère les suites de points de « petite hauteur ». Elles connaissent depuis quelque temps un véritable essor sur les corps p-adiques avec les travaux de Baker, Chambert-Loir, Favre, Rivera-Letelier, Rumely... ([3], [25], [40], [41]).

Donnons un exemple de « théorème d'équidistribution » complexe dont le pendant p-adique, établi par Chambert-Loir dans [25], se formule naturellement dans le cadre des espaces de Berkovich. Soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique propre et géométriquement irréductible sur un corps de nombres K ; soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit L un fibré ample sur $\mathscr{X}$ muni d'une métrique adélique satisfaisant à certaines conditions techniques dont la « semi-positivité » (cf. [25], §2.2). Cette donnée permet de définir la *hauteur*[28] de n'importe quelle sous-variété irréductible de $\mathscr{X} \times_K \overline{K}$ et l'on notera $\mathbf{h}$ celle de $\mathscr{X} \times_K \overline{K}$. Soit (x_n) une suite de points de $\mathscr{X}(\overline{K})$. *Supposons que chaque fermé de Zariski* strict *de $\mathscr{X} \times_K \overline{K}$ ne contient qu'un nombre fini de x_n et que $h(x_n)$ tend vers $\mathbf{h}$ quand n tend vers l'infini.* Choisissons un plongement de $\overline{K}$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout n notons μ_n la moyenne (vue comme mesure sur $\mathscr{X}(\mathbb{C})$) des masses de Dirac en les conjugués de x_n sous l'action de Gal $(\overline{K}/K)$. Szpiro, Ullmo et Zhang ont démontré dans [61] que la suite (μ_n) converge faiblement vers une certaine mesure de probabilité sur $\mathscr{X}(\mathbb{C})$, qui ne dépend pas de (x_n).

Soit maintenant v une place finie de K en laquelle la métrique de L est donnée par un fibré ample $\mathscr{L}$ sur un modèle normal, propre et plat $\mathscr{Y}$ de $\mathscr{X}$ sur l'anneau des entiers correspondants[29]. Notons K_v le complété de K pour v et $\mathbb{C}_v$ celui de $\overline{K}$ pour un prolongement fixé de v. Soit $\{\eta_i\}$ l'ensemble des points génériques de $\mathscr{Y}_s$; il existe pour tout i un et un seul point ξ_i de $\mathscr{X}^{an}_{K_v}$ se spécialisant en η_i. Pour tout n désignons par $\mu_{v,n}$ l'image directe sur $\mathscr{X}^{an}_{K_v}$ de la moyenne sur $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}_v}$ des masses de Dirac en les conjugués de x_n sous l'action de Gal $(\overline{K}/K)$. Chambert-Loir a alors établi ([25],

(28) Plusieurs normalisations sont possibles ; celle qu'utilise Chambert-Loir est décrite dans l'introduction de [25].

(29) En vertu des hypothèses faites sur la métrique de L c'est le cas pour *presque toutes* les places de K.

th. 3.1) que $(\mu_{v,n})$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ_v sur $\mathscr{X}^{an}_{K_v}$, qui ne dépend pas de (x_n) et est de la forme $\sum \nu_i \delta_{\xi_i}$ où les ν_i sont explicitement déterminés en fonction de $\mathscr{L}$. *Le support de μ_v est donc disjoint de l'espace rigide $\mathscr{X}^{rig}_{K_v}$ dès que $\mathscr{X}$ n'est pas réduite à un point.*

Les systèmes dynamiques. — Soit p un nombre premier, soit $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et soit $\overline{\mathbb{F}_p}$ le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$. Depuis quelques années l'étude de la dynamique des fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbb{C}_p$ a fait l'objet de nombreuses investigations(30) ; on peut notamment citer à ce sujet les travaux fondateurs de Juan Rivera-Letelier ([59], [58], [60]). Ceux-ci ont bien mis en évidence l'intérêt qu'il y avait à considérer l'action d'une telle fraction sur la droite projective de Berkovich : même pour démontrer des théorèmes concernant uniquement $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ (tels ceux qui portent sur les ensembles de points périodiques attractifs ou répulsifs...), Rivera-Letelier étudie la dynamique de la transformation concernée sur $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$; il s'appuie de manière déterminante sur la structure d'arbre réel de ce dernier, et travaille la plupart du temps avec une « topologie d'arbre » plus fine que celle de Berkovich (et pour laquelle $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$ n'est plus compact).

Montrons, sur un exemple, en quoi les espaces de Berkovich constituent également un cadre très naturel lorsqu'il s'agit de comprendre les analogues p-adiques de notions complexes traditionnelles tels les ensembles de Julia ou certaines mesures limites. Soit R un endomorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$ dont le degré d est au moins égal à 2, et soit z un $\mathbb{C}_p$-point de $\mathbb{P}^1$ *possédant un antécédent pour R^2 distinct de lui-même* (cette dernière hypothèse n'est violée que par au plus deux points). Pour tout entier n notons μ_n la mesure $\sum e_i \delta_{z_i}$ sur $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$, où $\sum e_i[z_i]$ est l'image réciproque du diviseur $[z]$ par R^n.

Favre et Rivera-Letelier ont démontré dans [40] que la suite (μ_n/d^n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ_R sur $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p}$; le support de μ_R coïncide avec l'ensemble de Julia qu'a défini Rivera-Letelier ([57]). *Il peut être disjoint de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.* Ainsi si R s'étend en un endomorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p^o}$ (on dit dans ce cas que R a *bonne réduction*) alors μ_R est la masse de Dirac en le point η défini par la semi-norme $\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i|$; on peut également voir η comme l'unique antécédent du point générique de $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ par la réduction $\mathbb{P}^{1,an}_{\mathbb{C}_p} \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}_p}}$.

Remarque 3.8. — Citons pour conclure ce paragraphe une autre grande classe de résultats en géométrie complexe dont les déclinaisons p-adiques connues à ce jour, si elles ne nécessitent pas *stricto sensu* la théorie de Berkovich pour être *énoncées*, ont néanmoins été *démontrées* par son biais : celle qui concerne, au sens large, l'hyperbolicité de Kobayashi, les courbes entières, ou encore la théorie de Nevanlinna. Berkovich

(30) Comme $\overline{\mathbb{F}_p}$ est réunion de corps finis, tout élément de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}_p})$ est quasi-périodique sous l'action de n'importe quelle fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_p}$; ce fait est absolument essentiel pour toute la théorie, qui ne peut donc être étendue telle quelle à des corps ultramétriques complets quelconques.

lui-même a ainsi établi que sur un corps ultramétrique complet tout morphisme analytique de la droite affine vers l'analytifiée d'une courbe projective de genre au moins égal à 1 est constant ([6], th. 4.5.1) ; de substantielles avancées ont été depuis réalisées sur ces questions, notamment par William Cherry : on peut ainsi citer [27], [28], [26] ou encore son papier le plus récent, en collaboration avec Min Ru ([29]).

3.5. Analogies entre les mondes réel et p-adique

On a vu tout au long de ce qui précède les services signalés que rendent les espaces de Berkovich, dès lors qu'on souhaite transposer les objets et outils de la géométrie analytique *complexe* à l'univers p-adique ; mais ils constituent aussi un cadre particulièrement propice à l'expression de l'analogie entre celui-ci et le monde *réel*. Illustrons-le par deux résultats dus à l'auteur.

Les parties semi-algébriques. — Si $\mathscr{X}$ est une variété algébrique réelle affine et A son anneau des fonctions polynomiales, on dit qu'une partie de $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités entre éléments de A. Il est bien connu que les composantes connexes d'une telle partie sont en nombre fini et sont elles-mêmes semi-algébriques ; par ailleurs si $\varphi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme entre deux variétés algébriques réelles affines alors l'image par φ de toute partie semi-algébrique de $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ est une partie semi-algébrique de $\mathscr{Y}(\mathbb{R})$.

Soit maintenant k un corps ultramétrique complet et soit $\mathscr{X}$ une variété algébrique sur k ; notons A l'anneau des fonctions polynomiales de $\mathscr{X}$. On dit qu'une partie de l'espace de Berkovich $\mathscr{X}^{an}$ est *semi-algébrique* si elle peut être définie par une combinaison booléenne d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g appartiennent à A, où λ est un réel positif et où $\bowtie$ est l'un des quatre symboles d'inégalité. Les deux théorèmes de géométrie réelle évoqués ci-dessus se réénoncent *mutatis mutandis* dans ce cadre ([36], prop. 2.5 et th. 3.2) : une partie semi-algébrique de $\mathscr{X}^{an}$ a un nombre fini de composantes connexes qui sont elles-mêmes semi-algébriques, et si $\varphi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ est un morphisme entre k-variétés algébriques affines alors l'image par φ^{an} d'une partie semi-algébrique de $\mathscr{X}^{an}$ est une partie semi-algébrique de $\mathscr{Y}^{an}$.

Cohomologie étale et topologie transcendante. — Sur un schéma aussi bien que sur un espace de Berkovich, on notera π le morphisme canonique entre les sites étale et topologique. Soient $\mathscr{X}$ une variété algébrique réelle et q un entier. L'évaluation permet d'associer à toute classe de cohomologie appartenant à $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathrm{R}^q\pi_*\mathbb{Z}/2)$ une application de $\mathscr{X}(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{Z}/2$ (identifié à $\mathrm{H}^q(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$) ; elle est localement constante. Colliot-Thélène et Parimala ont démontré ([32]) que la flèche $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathrm{R}^q\pi_*\mathbb{Z}/2) \to (\mathbb{Z}/2)^{\pi_0(\mathscr{X}(\mathbb{R}))}$ ainsi définie est un isomorphisme pour tout q strictement supérieur à $\dim \mathscr{X}$ lorsque $\mathscr{X}$ est intègre et lisse ; dans le cas des courbes c'était un théorème déjà connu et dû à Witt. Nous allons présenter un résultat qui en constitue un analogue p-adique, dans la mesure où il décrit *via* l'évaluation ponctuelle des classes un groupe de cohomologie étale d'une courbe en termes de la *topologie* de l'espace de Berkovich associé.

Soit k un corps local, c'est-à-dire complet pour une valuation discrète et à corps résiduel fini. Soit n un entier premier à la caractéristique de $\widetilde{k}$. Soit Y une k-courbe analytique lisse ; orientons arbitrairement son squelette $S(Y)$, ce qui permet de définir le groupe $\mathrm{Harm}(S(Y), \mathbb{Z}/n)$ des *cochaînes harmoniques sur* $S(Y)$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}/n$ par la « loi des nœuds » usuelle. À l'aide de l'évaluation ponctuelle des classes de cohomologie on construit ([34], th. 4.2) un isomorphisme $\mathrm{H}^0(Y_{\mathrm{top}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathrm{Harm}(S(Y), \mathbb{Z}/n)$.

Soit maintenant $\mathscr{X}$ une k-courbe *algébrique* lisse. Il y a une application naturelle de $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ vers $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}^{an}_{\mathrm{top}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$; *elle est bijective* ([34], th. 5.2). Ainsi obtient-on, une fois $S(\mathscr{X}^{an})$ orienté, un isomorphisme(31) entre $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ et $\mathrm{Harm}(S(\mathscr{X}^{an}), \mathbb{Z}/n)$ qui fournit la description topologique attendue.

Remarque 3.9. — L'évaluation ponctuelle ne peut rien apporter d'intéressant si l'on s'en tient au cadre rigide : si x est un point rigide de $\mathscr{X}^{an}$ et si h est un élément de $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}^{an}_{\mathrm{top}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ alors $h(x)$ appartient à $\mathrm{H}^3(\mathscr{H}(x), \mu_n^{\otimes 2})$ qui est nul pour des raisons de dimension cohomologique, le corps $\mathscr{H}(x)$ étant local.

Remarque 3.10. — Ces résultats ont été depuis largement étendus dans l'article [33]. Les groupes de la forme $\mathrm{H}^0(X_{\mathrm{top}}, \mathrm{R}^q\pi_*\mathscr{F})$, où X est une courbe analytique sur un corps ultramétrique complet quelconque et $\mathscr{F}$ un faisceau étale « raisonnable », y font l'objet d'une étude systématique : comparaison avec leurs analogues algébriques, dualité de type Poincaré... On la mène en *triangulant* les courbes analytiques ([33], §4) et en utilisant de manière intensive la cohomologie étale analytique à support.

Remarque 3.11. — Mentionnons pour terminer ce paragraphe une vague impression de l'auteur, qui est vraisemblablement assez largement partagée mais qu'aucun énoncé précis n'étaye à l'heure qu'il est : celle que de solides liens existent certainement entre la théorie de Berkovich et la *géométrie tropicale* (sur ce dernier sujet, on pourra consulter l'exposé [49] de ce séminaire). Les courbes tropicales, par exemple, doivent pouvoir s'interpréter comme des squelettes de courbes analytiques convenables.

3.6. Espaces de Berkovich, effondrements de variétés riemanniennes et structures affines entières

Dans un article récent ([53]), Kontsevich et Soibelman ont peint une vaste fresque, en grande partie conjecturale, qui met en scène des objets de natures *a priori* très

(31) Lorsque $\mathscr{X}$ est projective c'est une réinterprétation, avec une démonstration en partie différente, d'un résultat de Kato ([52], cor. 2.9) qui décrit $\mathrm{H}^0(\mathscr{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ en fonction de la fibre spéciale d'un modèle entier convenable de $\mathscr{X}$.

différentes entre lesquels semblent exister des liens profonds ; nous allons en donner un aperçu.

Soit K le corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$ et soit $\mathscr{X}$ une K-variété *de Calabi-Yau*, c'est-à-dire une K-variété projective, lisse, et géométriquement connexe dont le fibré canonique est trivial ; fixons une section non nulle Ω de ce dernier. Pour tout z appartenant à $\mathbb{C}^*$ et de module suffisamment petit, la fibre $\mathscr{X}_z$ de $\mathscr{X}$ est bien définie ; c'est une variété de Calabi-Yau sur $\mathbb{C}$. Le choix d'une classe convenable dans $\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(\mathscr{X})$ permet de munir chacune des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ d'une *métrique de Calabi-Yau* g_z. On la normalise en une nouvelle métrique g_z^{norm} pour laquelle le diamètre de $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ est égal à 1. Kontsevich et Soibelman définissent la notion de *dégénérescence maximale* de $\mathscr{X}$ en terme du comportement asymptotique, lorsque z tend vers zéro, du volume de $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ relatif à la forme $\Omega_z \wedge \overline{\Omega_z}$.

Tout ce qui suit jusqu'à la fin du paragraphe est une reformulation de certaines des *conjectures* de Kontsevich et Soibelman.

On suppose à partir de maintenant que l'on est dans une situation de dégénérescence maximale. La famille d'espaces métriques $(\mathscr{X}_z(\mathbb{C}), g_z^{\mathrm{norm}})$ a lorsque z tend vers zéro une limite *au sens de Gromov-Hausdorff* que l'on note $B(\mathscr{X})$, qui est de dimension topologique égale à n et dont un ouvert dense $B(\mathscr{X})_{\mathrm{lisse}}$ possède une structure affine entière naturelle ; ce qu'on appelle ici *structure affine entière* est la donnée d'un atlas avec changements de cartes dans $\mathbb{R} \rtimes \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z})$. Notons que la dimension topologique des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ est égale à $2n$, et qu'elle est donc divisée par 2 à la limite : on assiste à un « effondrement » des $\mathscr{X}_z(\mathbb{C})$ sur $B(\mathscr{X})$.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et soit x appartenant à $\mathscr{X}(\overline{K})$. Il vit dans une extension finie L de K, nécessairement engendrée par une racine n-ième de la fonction coordonnée de K pour un certain entier n. On peut identifier L au corps des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}$, de sorte que l'inclusion de K dans L corresponde au morphisme $z \mapsto z^n$ de $(\mathbb{C}, 0)$ vers $(\mathbb{C}, 0)$. Le produit fibré $\mathscr{X}_L$ donne ainsi naissance à une famille de variétés algébriques complexes paramétrée par un voisinage épointé de l'origine et dont la fibre en z est $\mathscr{X}_{z^n}$ pour tout z ; le point x qui provient d'un morphisme de Spec L vers $\mathscr{X}$ définit donc de manière naturelle, pour z suffisamment petit en module, un point x_z de $\mathscr{X}_{z^n}(\mathbb{C})$. Lorsque z tend vers zéro x_z « tend » vers un point de $B(\mathscr{X})$ qui ne dépend pas du choix de L et est noté $b(x)$.

Plongeons par complétion K dans le corps $\mathbb{C}((\tau))$ des séries de Laurent. Pour tout x appartenant à $\mathscr{X}(\overline{K})$, on notera x^{an} le point rigide correspondant de $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((\tau))}$. Il existe un modèle pluristable non dégénéré de $\mathscr{X}_{\mathbb{C}((\tau))}$ sur $\mathbb{C}[[\tau]]$, et un homéomorphisme ι entre le squelette correspondant $\mathbf{S}$ et $B(\mathscr{X})$ vérifiant les assertions suivantes :

i) $\mathbf{S}$ possède un ouvert dense $\mathbf{S}_{\text{lisse}}$ muni d'une structure affine entière qui est compatible avec la structure $\mathbb{Z}$-linéaire par morceaux de $\mathbf{S}$, et qui est telle que ι induise un isomorphisme affine entier $\mathbf{S}_{\text{lisse}} \simeq B(\mathscr{X})_{\text{lisse}}$;

ii) pour tout x appartenant à $\mathscr{X}(\overline{K})$ on a l'égalité $\iota(\tau(x^{an})) = b(x)$, où τ est la rétraction de $\mathscr{X}^{an}_{\mathbb{C}((\tau))}$ vers $\mathbf{S}$.

Remarque 3.12. — Outre l'énoncé de ces conjectures, l'article de Kontsevich et Soibelman comprend la démonstration, longue et très subtile, d'un théorème ([53], Th. 5) que l'on peut résumer en substance comme suit : *il fournit, partant d'une structure de variété affine entière à* 24 *singularités d'un certain type sur la sphère* S^2*, une façon de construire une surface* $K3$ *sur* $\mathbb{C}((\tau))$ *dont le squelette* (*relatif à un modèle convenable*) *hérite naturellement de cette structure.*

RÉFÉRENCES

[1] Y. André – « On a geometric description of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a p-adic avatar of $\widehat{GT}$ », *Duke Math. J.* **119** (2003), no. 1, p. 1–39.

[2] M. Baker & R. Rumely – « Analysis and dynamics on the Berkovich projective line », prépublication.

[3] ______, « Equidistribution of small points, rational dynamics, and potential theory », prépublication.

[4] ______, « Harmonic Analysis on Metrized graphs », prépublication.

[5] V. G. Berkovich – « Integration of one-forms on p-adic analytic spaces », prépublication.

[6] ______, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[7] ______, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.

[8] ______, « Vanishing cycles for formal schemes », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.

[9] ______, « On the comparison theorem for étale cohomology of non-Archimedean analytic spaces », *Israel J. Math.* **92** (1995), no. 1-3, p. 45–59.

[10] ______, « Vanishing cycles for formal schemes. II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[11] ______, « Vanishing cycles for non-Archimedean analytic spaces », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 4, p. 1187–1209.

[12] ______, « p-adic analytic spaces », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, vol. II (extra vol.), 1998, p. 141–151 (electronic).

[13] ———, « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible I », *Invent. Math.* **137** (1999), no. 1, p. 1–84.

[14] ———, « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible II », in *Geometric aspects of Dwork theory*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 293–370 (vols. I, II).

[15] S. Bloch, H. Gillet & C. Soulé – « Non-Archimedean Arakelov theory », *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 3, p. 427–485.

[16] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[17] S. Bosch & W. Lütkebohmert – « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. II », *Invent. Math.* **78** (1984), no. 2, p. 257–297.

[18] ———, « Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I », *Math. Ann.* **270** (1985), no. 3, p. 349–379.

[19] ———, « Formal and rigid geometry I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), no. 2, p. 291–317.

[20] ———, « Formal and rigid geometry II. Flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 403–429.

[21] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – « Formal and rigid geometry III. The relative maximum principle », *Math. Ann.* **302** (1995), no. 1, p. 1–29.

[22] ———, « Formal and rigid geometry IV. The reduced fibre theorem », *Invent. Math.* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.

[23] P. Boyer – « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 3, p. 573–629.

[24] H. Carayol – « Nonabelian Lubin-Tate theory », in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions (Ann Arbor 1988)*, Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 15–39 (vol. II).

[25] A. Chambert-Loir – « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *J. reine angew. Math.* **595** (2006), p. 215–235.

[26] W. Cherry – « Non-Archimedean big Picard theorems », prépublication sur ArXiv, `math.AG/0207081`.

[27] ———, « Non-Archimedean analytic curves in abelian varieties », *Math. Ann.* **300** (1994), no. 3, p. 393–404.

[28] ———, « A survey of Nevanlinna theory over non-Archimedean fields », *Bull. Hong Kong Math. Soc.* **1** (1997), no. 2, p. 235–249.

[29] W. Cherry & M. Ru – « Rigid analytic Picard theorems », *Amer. J. Math.* **126** (2004), no. 4, p. 873–889.

[30] B. Chiarellotto – « Espaces de Berkovich et équations différentielles p-adiques. Une note », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **103** (2000), p. 193–209.

[31] R. F. Coleman – « Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions », *Invent. Math.* **69** (1982), no. 2, p. 171–208.

[32] J.-L. Colliot-Thélène & R. Parimala – « Real components of algebraic varieties and étale cohomology », *Invent. Math.* **101** (1990), no. 1, p. 81–99.

[33] A. Ducros – « Triangulations et cohomologie étale sur une courbe analytique », article actuellement soumis.

[34] ———, « Cohomologie non ramifiée sur une courbe p-adique lisse », *Compositio Math.* **130** (2002), no. 1, p. 89–117.

[35] ———, « Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension », *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 4, p. 483–506.

[36] ———, « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique », *Manuscripta Math.* **111** (2003), no. 4, p. 513–528.

[37] A. Escassut & N. Mai Netti – « Shilov boundary for normed algebras », in *Topics in analysis and its applications*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 147, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, p. 1–10.

[38] C. Favre & M. Jonsson – *The valuative tree*, Lect. Notes in Mathematics, vol. 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[39] ———, « Valuative analysis of planar plurisubharmonic functions », *Invent. Math.* **162** (2005), no. 2, p. 271–311.

[40] C. Favre & J. Rivera-Letelier – « Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (2004), no. 4, p. 271–276.

[41] ———, « Équidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective », *Math. Ann.* **335** (2006), no. 2, p. 311–361.

[42] H. Gillet & C. Soulé – « Direct images in non-Archimedean Arakelov theory », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 2, p. 363–399.

[43] W. Gubler – « Local heights of subvarieties over non-Archimedean fields », *J. reine angew. Math.* **498** (1998), p. 61–113.

[44] B. Guennebaud – « Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques », Thèse, Université de Poitiers, 1973.

[45] M. Harris – « Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld upper half spaces; elaboration of Carayol's program », *Invent. Math.* **129** (1997), p. 75–119.

[46] M. Harris & R. Taylor – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, avec un appendice de V.G. Berkovich.

[47] T. Hausberger – « Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et conjecture de Drinfeld-Carayol », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 4, p. 1285–1371.

[48] R. Huber – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996.

[49] I. Itenberg – « Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes (d'après G. Mikhalkin) », in *Séminaire Bourbaki (2003/2004)*, Astérisque, vol. 294, Soc. Math. France, Paris, 2004, p. 335–361.

[50] A. J. de Jong – « Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces », *Compositio Math.* **97** (1995), no. 1-2, p. 89–118, Special issue in honour of Frans Oort.

[51] ———, « Families of curves and alterations », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), no. 2, p. 599–621.

[52] K. Kato – « A Hasse principle for two-dimensional global fields », *J. reine angew. Math.* **366** (1986), p. 142–183, avec un appendice de Jean-Louis Colliot-Thélène.

[53] M. Kontsevich & Y. Soibelman – « Affine structures and non-Archimedean analytic spaces », in *The unity of mathematics*, Progr. Math., vol. 244, Birkhäuser, Boston, 2006, p. 321–385.

[54] N. Maïnetti – « Sequential compactness of some analytic spaces », *J. Anal.* **8** (2000), p. 39–54.

[55] ———, « Metrizability of some analytic affine spaces », in *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math., vol. 222, Dekker, New York, 2001, p. 219–225.

[56] M. Raynaud – « Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... », in *Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris 1972)*, Mém. Soc. Math. France, vol. 39–40, Soc. Math. France, Paris, 1974, p. 319–327.

[57] J. Rivera-Letelier – « Théorie de Julia et Fatou sur la droite hyperbolique p-adique », en préparation.

[58] ———, « Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux », in *Geometric methods in dynamics II*, Astérisque, vol. 287, Soc. Math. France, Paris, 2003, p. 147–230.

[59] ———, « Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles », *Compositio Math.* **138** (2003), no. 2, p. 199–231.

[60] ———, « Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique p-adique », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), no. 3, p. 593–629.

[61] L. Szpiro, E. Ullmo & S. Zhang – « Équirépartition des petits points », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 337–347.

[62] J. Tate – « Rigid analytic spaces », *Invent. Math.* **12** (1971), p. 257–289.

[63] M. Temkin – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, p. 585–607.

[64] ———, « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.

[65] ______, « A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem », *Math. Ann.* **333** (2005), no. 2, p. 261–269.

[66] A. Thuillier – « Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov », Thèse, IRMAR, Université Rennes 1, 2005.

Antoine DUCROS

Université de Rennes I
IRMAR
UMR 6625 du CNRS
Campus de Beaulieu
F–35402 RENNES Cedex
E-mail : `ducros@math.univ-rennes1.fr`