Séminaire BOURBAKI Juin 2005
57e année, 2004-2005, no 951, p. 469 à 480

PROBLÈMES DE RECOUVREMENT ET POINTS EXCEPTIONNELS POUR LA MARCHE ALÉATOIRE ET LE MOUVEMENT BROWNIEN [d'après Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni]

par **Zhan SHI**

INTRODUCTION

La marche aléatoire (ou marche au hasard) sur Z^d est un objet fondamental de la théorie des probabilités. Elle représente le mouvement aléatoire d'une particule (dont le point de départ est, disons, l'origine) qui, à chaque unité de temps, se déplace de façon équiprobable vers l'un de ses $2d$ plus proches voisins. On suppose de plus que tous les déplacements sont indépendants.

En 1960, Erdős et Taylor [17] ont posé le problème suivant pour la marche aléatoire sur Z^2 : quel est le nombre maximal de visites que la marche aléatoire peut effectuer en un site pendant les n premières étapes ?

Plus précisément, introduisons $T_n(x)$, le nombre de visites de la marche aléatoire au point x lors des n premières étapes, et T_n^*, le maximum des variables $T_n(x)$, c'est-à-dire $T_n^* := \max_{x\in Z^2} T_n(x)$. Erdős et Taylor [17] ont prouvé que, presque sûrement,

$$\frac{1}{4\pi} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} \le \frac{1}{\pi}. \tag{1}$$

Ils ont, de plus, conjecturé le résultat suivant :

Conjecture 0.1 (Erdős et Taylor [17]). — *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Le but de cet exposé est de faire une présentation succincte et non technique des travaux de Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni ([5]–[13]) qui démontrent, entre autres, cette conjecture. Ces travaux apportent également une réponse définitive à plusieurs autres problèmes ouverts concernant la marche aléatoire et le mouvement brownien, dont les énoncés sont d'une simplicité remarquable – à l'image de la conjecture 0.1. En particulier, ils décrivent, de façon précise, la nature multi-fractale d'une nouvelle classe d'ensembles de points exceptionnels liés au recouvrement d'une partie de R^d pour le mouvement brownien.

1. POINTS FAVORIS ET POINTS ÉPAIS

1.1. Marche aléatoire

Commençons par définir rigoureusement une marche aléatoire en dimension 2 : on considère une trajectoire aléatoire $S : N \to Z^2$, issue de $S_0 = 0$, telle que les accroissements $\xi_n := S_n - S_{n-1}$ soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, dont la loi est donnée par $P(\xi_n = e) = \frac{1}{4}$, pour tout e tel que $\|e\| = 1$, où « $\|\cdot\|$ » désigne la norme euclidienne sur Z^2.

Posons, comme ci-dessus, $T_n(x) := \#\{i : 0 \leq i \leq n,\ S_i = x\}$ et $T_n^* := \max_{x \in Z^2} T_n(x)$. Voici une réponse affirmative à la conjecture 0.1 :

THÉORÈME 1.1 ([11]). — *Presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}.$$

Rappelons que, pour tout $x \in Z^2$ fixé, $T_n(x)$ est approximativement de l'ordre de $\log n$ lorsque $n \to \infty$ (voir Erdős et Taylor [17] pour un énoncé précis). Un point x tel que $T_n(x) \geq \alpha(\log n)^2$ (pour un $\alpha > 0$) est donc « beaucoup visité » par la marche aléatoire. Le théorème suivant décrit la taille de l'ensemble de ces points qui sont beaucoup visités.

THÉORÈME 1.2 ([11]). — (i) *Pour tout* $\alpha \in]0, \frac{1}{\pi}]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \#\{x \in Z^2 : T_n(x) \geq \alpha(\log n)^2\}}{\log n} = 1 - \alpha\pi, \qquad \text{p.s.} \tag{2}$$

(ii) *Presque sûrement, pour toute suite aléatoire* $(x_n)_{n\geq 0}$ *telle que* $T_n(x_n) = T_n^*$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \|x_n\|}{\log n} = \frac{1}{2}.$$

Remarquons que (2) donne la borne inférieure cruciale qui manquait dans la conjecture d'Erdős et Taylor [17].

Un point favori (à l'étape n) est un point $x \in Z^2$ tel que $T_n(x) = T_n^*$ (notion introduite par Erdős et Révész [15]). La seconde partie du théorème 1.2 nous dit donc que les points favoris sont, dans l'échelle logarithmique, plutôt près de la frontière de l'ensemble des points visités.

Il est à signaler que très peu de propriétés sont connues à ce jour pour les points favoris de la marche aléatoire. On peut consulter le livre de Révész [25] (pages 160–161) pour une liste de six questions ouvertes, dont la plupart ont été reprises de l'article d'Erdős et Révész [15]. Signalons, par exemple, l'une des questions fondamentales, à savoir la possibilité d'avoir au moins trois points favoris au fil du temps. Cette question, comme tant d'autres, reste sans réponse même en dimension 1, malgré un joli résultat partiel de Tóth [28].

1.2. Mouvement brownien

Il existe un résultat analogue à celui du théorème 1.2 pour un processus aléatoire pour lequel le temps est continu. Pour introduire ce nouveau processus aléatoire, on considère une marche aléatoire $(S_n,\, n \geq 0)$ à valeurs dans Z^d (avec $d \geq 1$ quelconque, pour l'instant), et on effectue un changement d'échelle

$$W_t^{(N)} := \left(\frac{d}{N}\right)^{1/2} S_{\lfloor Nt \rfloor}, \qquad t \geq 0.$$

Le théorème central limite assure que pour tous $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, $(W_{t_1}^{(N)}, \ldots, W_{t_k}^{(N)})$ converge en loi (lorsque N tend vers l'infini) vers $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_k})$, où $(W_t,\, t \geq 0)$ est un processus aléatoire à valeurs dans R^d tel que, pour tous $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ suit la loi de Gauss de moyenne nulle et de matrice de covariances $(t-s)\mathrm{Id}$. On peut faire en sorte que $t \mapsto W_t$ soit une fonction continue sur R_+. Le processus $(W_t,\, t \geq 0)$ porte le nom de « mouvement brownien ».

Il est souvent plus aisé d'étudier le mouvement brownien que la marche aléatoire, grâce, par exemple, à la propriété d'auto-similarité (ou, en franglais, propriété de « scaling ») du mouvement brownien. On reviendra, dans la section 5.3, sur une relation trajectorielle entre le mouvement brownien et la marche aléatoire, en plus de la convergence en loi décrite ci-dessus.

Dans cette section, on suppose $d = 2$. Soit $\overline{\theta} := \inf\{t \geq 0 : \|W_t\| = 1\}$. Considérons la mesure d'occupation

$$\mu_{\overline{\theta}}(A) := \int_0^{\overline{\theta}} \mathbf{1}_A(W_t)\, dt, \qquad \forall A \subset R^2 \text{ borélien},$$

où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A. L'analogue du théorème 1.2 pour le mouvement brownien s'énonce comme suit. On note $B(x,r)$ le disque ouvert (dans R^2) centré en x et de rayon r, et $\dim(A)$ la dimension de Hausdorff de A.

THÉORÈME 1.3 ([11]). — (i) *Pour tout $a \in]0,2]$, on a, presque sûrement,*

$$\dim\left\{x \in R^2 : \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} = a\right\} = 2 - a. \tag{3}$$

(ii) *Presque sûrement,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in R^2} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} = 2. \tag{4}$$

À titre de comparaison, rappelons que, typiquement, pour un point x sur la trajectoire de $(W(t),\, t \in [0,\overline{\theta}])$, $\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))$ se comporte à peu près comme $\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)$ lorsque ε est petit (voir Ray [22] pour un énoncé précis). Un point x dans l'ensemble considéré dans (3), qui est donc en quelque sorte « souvent visité », est appelé « point épais » (*thick point* en anglais).

La partie (ii) du théorème 1.3 fournit une réponse affirmative à une conjecture de Perkins et Taylor [21]. Perkins et Taylor ont obtenu la borne supérieure dans (4), et une borne inférieure non optimale (quatre fois plus petite que la limite conjecturée).

2. POINTS TARDIFS ET TEMPS DE RECOUVREMENT

2.1. Marche aléatoire sur un compact

Question : Combien de temps faut-il pour qu'un graphe fini soit recouvert par une marche aléatoire ?

Il s'agit d'un problème important en probabilités, en combinatoire, et en informatique. L'exemple du tore bidimensionnel $Z_n^2 := Z^2/nZ^2$ est le plus célèbre, et est précisément ce qui nous intéresse ici. Soit C_n le temps nécessaire pour que le tore Z_n^2 soit recouvert par une marche aléatoire sur Z_n^2.

Il y a une quinzaine d'années, Aldous et Lawler ont obtenu des bornes asymptotiques pour C_n : lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{2}{\pi} + o(1) \le \frac{C_n}{(n \log n)^2} \le \frac{4}{\pi} + o(1), \qquad \text{en probabilité,} \tag{5}$$

la borne supérieure étant due à Aldous [1], et la borne inférieure à Lawler [19].

Aldous [1] a de plus conjecturé que la borne supérieure est optimale, ce qui a été récemment confirmé par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1 ([13]). — *Si C_n désigne le temps de recouvrement de Z_n^2 par une marche aléatoire sur Z_n^2, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{(n \log n)^2} = \frac{4}{\pi}, \qquad \text{en probabilité.}$$

Le problème du temps de recouvrement est, en quelque sorte, le dual de la conjecture de Perkins et Taylor énoncée dans (4).

De même que pour le théorème 1.2 sur les points beaucoup visités par la marche aléatoire, il existe un résultat analogue à celui du théorème 2.1 pour la courbe du mouvement brownien (ou plutôt, pour son voisinage, la saucisse de Wiener).

La preuve du théorème 2.1 réserve une étude spéciale concernant les « points tardifs » (*late points* en anglais) qui sont les derniers à être atteints avant le complet recouvrement. La preuve décrit, en outre, le spectre multi-fractal de l'ensemble des points tardifs.

Pour plus de détails, voir [13].

2.2. Marche aléatoire sur Z^2

Passons maintenant aux problèmes de recouvrement pour la marche aléatoire sur Z^2 (et non plus sur le tore).

On peut se poser deux questions.

Question 1 : Quel est le rayon ϱ_n du plus grand disque, centré à l'origine, recouvert par les n premiers pas de la marche aléatoire sur Z^2 ?

Question 2 : Quel est le rayon R_n du plus grand disque recouvert par les n premiers pas de la marche aléatoire sur Z^2 ?

Commençons par la question 1. Les premiers résultats, dus à Révész [25], ont montré l'existence de constantes $0 < a < b < \infty$ telles que, pour tout $y > 0$,

$$e^{-by} \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) \leq \limsup_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) \leq e^{-ay}. \tag{6}$$

Révész a conjecturé l'existence d'une constante λ, sans précision sur sa valeur, telle que $P(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y)$ converge vers $e^{-\lambda y}$. Lawler [19] a prouvé (6) avec les constantes $a = 2$ et $b = 4$, et a mentionné une conjecture de Kesten qui consistait à dire que la limite vaudrait e^{-4y}. Ceci est confirmé par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2 ([13]). — *Si ϱ_n désigne le rayon du plus grand disque centré à l'origine totalement recouvert par la marche aléatoire sur Z^2 lors des n premières étapes, alors, pour tout $y > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\log^2 \varrho_n}{\log n} \geq y\right) = e^{-4y}.$$

On peut donc dire que, grosso modo, ϱ_n se comporte comme $\exp(\sqrt{\log n}\,)$.

Passons à la question 2.

Il apparaît que R_n est beaucoup plus grand que ϱ_n. En effet, on a, presque sûrement, pour tout n suffisamment grand,

$$n^{\theta_1} \leq R_n \leq n^{\theta_2}.$$

Ces deux bornes sont dues à Révész qui a démontré le résultat pour $\theta_1 := 0,02$ ([23]) et pour $\theta_2 := 0,42$ ([24]). Il était donc naturel de penser (Révész [23]) que $R_n = n^{\theta+o(1)}$ p.s., pour un certain exposant $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Ceci est confirmé par le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3 ([5]). — *Soit R_n le rayon du plus grand disque recouvert par la marche aléatoire sur Z^2 dans les n premières étapes. On a, presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log R_n}{\log n} = \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Signalons que la preuve du Théorème 2.3 a permis de répondre à la question suivante : quel est le comportement presque sûr, en limite supérieure, du temps nécessaire à la marche aléatoire pour rencontrer un point qu'elle n'a encore jamais visité ? Il s'agissait là d'un problème ouvert d'Erdős et Révész [16].

3. DIMENSIONS SUPÉRIEURES

La dimension 2 est critique pour la marche aléatoire et pour le mouvement brownien, son analogue à temps continu. C'est la raison pour laquelle l'étude de ces processus aléatoires en dimension 2 est particulièrement compliquée. Les notes de cours de Le Gall [20] restent une référence de base pour l'étude du mouvement brownien en dimension 2. Sur ce sujet, de récents progrès, parmi les plus importants en théorie des probabilités, faisant intervenir les SLE, ont été effectués depuis (voir les notes de cours de Werner [29]).

Dans cette section, on s'intéresse au cas $d \geq 3$. Soit $W = (W_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien à valeurs dans R^d, issu de $W_0 = 0$. Il est connu que W est transient, c'est-à-dire que, presque sûrement, $\|W_t\| \to \infty$, lorsque $t \to \infty$. On définit

$$\mu_\infty(A) := \int_0^\infty \mathbf{1}_A(W_t)\, dt, \qquad A \subset R^d \text{ borélien.}$$

Soit q_d le plus petit réel positif tel que $J_{(d-2)/2}(q_d) = 0$, où $J_{(d-2)/2}(\cdot)$ désigne la fonction de Bessel d'indice $(d-2)/2$.

THÉORÈME 3.1 ([9]). — *Supposons $d \geq 3$. Pour tout $a \in]0, \frac{4}{q_d^2}]$, on a, presque sûrement,*

$$\dim \left\{ x \in R^d : \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\infty(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)} = a \right\} = 2 - \frac{a q_d^2}{2}.$$

En plus, pour tout $r > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\|x\| \leq r} \frac{\mu_\infty(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)} = \frac{4}{q_d^2}, \qquad \text{p.s.} \tag{8}$$

Par conséquent,

$$\sup_{x \in R^d} \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_\infty(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log(1/\varepsilon)} = \frac{4}{q_d^2}, \qquad \text{p.s.}$$

L'identité (8) donne une réponse affirmative à une conjecture de Taylor [27].

La présence de la constante q_d, dont la valeur dépend de la fonction de Bessel $J_{(d-2)/2}(\cdot)$, est due à une relation très curieuse, découverte par Ciesielski et Taylor [2], entre le temps d'occupation de la boule unité par le mouvement brownien de dimension $d \geq 3$, et le temps d'atteinte de la sphère unité par le mouvement brownien de dimension $d - 2$.

Le mouvement brownien en dimension $d \geq 3$ possède une propriété de « localisation » : les passages de W dans $B(x, \varepsilon)$ se trouvent, pour l'essentiel, concentrés dans un très faible intervalle de temps (alors qu'en dimension 2, le mouvement brownien revient très régulièrement au voisinage de x). L'énoncé précis de cette propriété peut être trouvé dans [9]. Cette propriété facilite l'étude des points épais en dimension $d \geq 3$, et permet de se passer de la très délicate « méthode multi-échelle du second moment » évoquée dans la section 5.2.

4. POINTS FINS

Soit $(W_t,\, t \geq 0)$ un mouvement brownien à valeurs dans R^d (avec $d \geq 2$), issu de $W_0 = 0 \in R^d$. Fixons $T > 0$. Soit

$$\mu_T(A) := \int_0^T \mathbf{1}_A(W_t)\, dt, \qquad \forall A \subset R^d \text{ borélien.}$$

On peut voir que pour tout point x de la trajectoire $\{W_t,\, t \in [0,T]\}$, $\mu_T(B(x,\varepsilon))$ est au moins de l'ordre de $\varepsilon^2/\log(1/\varepsilon)$. Le résultat suivant nous confirme que cette borne est effectivement atteinte par certains points exceptionnels, et donne la dimension de Hausdorff de l'ensemble de ces points.

THÉORÈME 4.1 ([10]). — *Soit $d \geq 2$. Fixons $T > 0$. Pour tout $a \geq 1$, on a, presque sûrement,*

$$\dim \left\{ x \in R^d : \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_T(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2/\log(1/\varepsilon)} = a \right\} = 2 - \frac{2}{a}. \tag{9}$$

De plus,

$$\inf_{t \in]0,T[} \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_T(B(W_t,\varepsilon))}{\varepsilon^2/\log(1/\varepsilon)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

Un point x dans l'ensemble considéré dans (9), qui est donc très peu visité, est appelé « point fin » (*thin point* en anglais).

5. QUELQUES IDÉES DE PREUVE

Je tâcherai ici de faire un résumé, le moins technique possible, sur les idées de base des travaux de Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni. Pour plus de détails, on peut consulter les notes de cours de Dembo [4].

5.1. Difficultés essentielles

On remarque immédiatement que ces travaux répondent à des conjectures, souvent de longue date, dont les bornes supérieures et inférieures différaient par un facteur de 4 ou 2 (conjecture d'Erdős et Taylor dans (1), conjecture de Perkins et Taylor dans (4), conjecture d'Aldous dans (5), conjecture de Kesten–Révész dans (6), conjecture de Révész dans (7), conjecture de Taylor dans (8)). En réalité, certains éléments fondamentaux manquaient à la compréhension de ces problèmes.

Prenons par exemple le théorème 1.3. On choisit un réseau de points (x_j) dans $B(0,1)$, et on considère

$$Z := \sum_j \mathbf{1}_{\left\{ \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x_j,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} \geq a \right\}}.$$

Le réseau (x_j) est choisi de sorte que, pout tout x, il existe x_j suffisamment proche de x tel que le temps d'occupation autour de x est approximativement celui autour de x_j. Donc, l'événement $\{Z \geq 1\}$ correspond à peu près à la situation

$$\sup_{x\in B(0,1)} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)} \geq a.$$

D'autre part, il est possible d'estimer $E(Z)$. En utilisant la méthode du premier moment (à savoir $P(Z \geq 1) \leq E(Z)$ par l'inégalité de Markov), Perkins et Taylor [21] ont pu obtenir une borne supérieure pour $\sup_{x\in B(0,1)} \frac{\mu_{\overline{\theta}}(B(x,\varepsilon))}{\varepsilon^2 \log^2(1/\varepsilon)}$. La borne supérieure ainsi obtenue s'est avérée être optimale.

En revanche, à cause des fortes corrélations des temps d'occupation autour de chacun des points du réseau, $E(Z^2)$ est tellement grande que la méthode du second moment n'aboutit pas.

Une approche naturelle est de tronquer certaines excursions (opération qui revient à ignorer les visites trop éloignées dans le temps), ce qui réduit effectivement le moment d'ordre 2, mais conduit hélas à une réduction simultanée de la moyenne. On obtient ainsi le résultat de Perkins et Taylor [21] qui laisse un facteur 4 entre les bornes supérieure et inférieure.

Cette remarque s'applique en effet à tous les problèmes cités dans cet exposé.

La principale nouveauté, dans les travaux de Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni, a été la mise au point d'une nouvelle méthode qui assouplit la méthode du second moment, bien au-delà de ce qu'avait pu faire auparavant la méthode de troncature.

Nous allons expliquer, dans le paragraphe suivant, les grandes lignes de cette méthode, dans son application au mouvement brownien en dimension 2. Le passage du mouvement brownien à la marche aléatoire sera ensuite expliqué dans la section 5.3.

5.2. Méthode multi-échelle du second moment

On procède en deux étapes.

Étape 1. Commençons par étudier la marche aléatoire d'une particule sur un arbre régulier de hauteur N, où chaque sommet, qui n'est pas une feuille, admet b descendants immédiats.

À chaque pas, la particule se déplace de façon équiprobable vers l'un de ses $b+1$ voisins, et revient sur ses pas lorsqu'elle se trouve sur une des b^N feuilles de l'arbre. La marche aléatoire part de la feuille la plus à gauche. On considère sa trajectoire jusqu'au premier instant où elle touche la racine de l'arbre.

Une feuille x est dite « très visitée » par la marche aléatoire si le nombre de passages en x est au moins de l'ordre de N^2 (lorsque N est grand). On cherche désormais à minorer le cardinal M_N de l'ensemble (aléatoire) de ces feuilles très visitées.

On peut assez facilement estimer $E(M_N)$, mais il se trouve que la variance de M_N est si grande, que la méthode du second moment, une nouvelle fois, n'aboutit pas.

L'idée va être d'introduire un sous-ensemble de l'ensemble des feuilles très visitées dont l'espérance du cardinal sera comparable à $E(M_N)$ mais dont la variance sera considérablement plus faible que celle de M_N !

On qualifiera les éléments de ce sous-ensemble, des feuilles « n-parfaites ». Définissons-les.

Commençons par poser $h_k := \lfloor k \log k \rfloor$, pour $k = 2, 3, \ldots, \lfloor N/\log N \rfloor =: n$. Une feuille x est alors dite « n-parfaite » si, pour tout $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, le nombre des excursions effectuées par la marche aléatoire, entre l'ancêtre de x à la génération h_{k-1} et l'ancêtre de x à la génération h_k, est approximativement $k^2 \log k$.

Il se trouve que l'espérance du cardinal de l'ensemble des feuilles « n-parfaites » est proche de $E(M_N)$, et que, dans le même temps, la variance de ce cardinal est bien plus faible que celle de M_N. Pour évaluer cette variance, il s'agit d'estimer la probabilité que deux feuilles soient toutes deux « n-parfaites ». La méthode du second moment usuelle nous permet alors de dire que le nombre total des points « n-parfaits » est relativement proche de son espérance, ce qui nous amène finalement à une borne inférieure satisfaisante pour M_N.

Étape 2. Soit W un mouvement brownien en dimension 2. Introduisons le réseau des points (x_j) comme dans la section 5.1, et considérons, pour chaque point x_j du réseau, des disques concentriques $(B(x_j, \varepsilon_k))_{k \geq 1}$, centrés au point x_j, où (ε_k) est une suite qui décroît assez rapidement vers 0. On choisit en fait $\varepsilon_k := \exp(-k \log k)$, de sorte que $\log(1/\varepsilon_k)$ correspond au h_k de l'étape précédente. Soit $N_k^{x_j}$ le nombre des excursions effectuées par W entre les cercles $\partial B(x_j, \varepsilon_{k-1})$ et $\partial B(x_j, \varepsilon_k)$.

En utilisant un résultat de grandes déviations, concernant la concentration de la somme de variables aléatoires i.i.d. autour de sa moyenne, on peut estimer le temps d'occupation d'une couronne à l'aide du nombre d'excursions la traversant. Il s'ensuit que, presque sûrement, pour qu'un point x_j du réseau soit épais, il suffit que $N_k^{x_j}$ soit de l'ordre de $k^2 \log k$ pour tout k suffisamment grand.

On conclut en reliant le problème du comptage des points épais pour W avec le problème du comptage des feuilles « n-parfaites ». L'estimation du second moment du cardinal des points épais du réseau se ramène à l'examen de la probabilité que deux points du réseau soient simultanément épais. Cette question est de même nature que celle de la probabilité que deux feuilles soient simultanément « n-parfaites », considérée à l'étape 1.

5.3. Passage du mouvement brownien à la marche aléatoire

Nous avons commencé cet exposé en introduisant la marche aléatoire, qui est un objet facile à définir. Nous avons tout de même mentionné que, du point de vue technique, il est plus facile d'étudier le mouvement brownien.

À partir d'un résultat pour le mouvement brownien, on peut souvent déduire un résultat analogue pour la marche aléatoire, à l'aide d'un théorème célèbre dû à Komlós, Major et Tusnády [18], qui consiste à dire que, éventuellement sur un espace de probabilité élargi, on peut construire un mouvement brownien et une marche aléatoire tels que la différence de ces deux processus soit « très petite ». Ce théorème de couplage, qui porte le nom de KMT, permet souvent de faire le passage entre un résultat pour le mouvement brownien et son analogue pour la marche aléatoire.

Le théorème de KMT est valable en dimension 1. Grâce à un argument géométrique simple, on peut l'étendre à la dimension 2. C'est donc ce théorème classique qui est à l'origine de la justification en dimension 2. (Attention : malgré tout, il faut encore pas mal de travail, car théoriquement, deux processus relativement proches l'un de l'autre peuvent avoir des mesures d'occupation très différentes.)

En dimension $d \geq 3$, on utilise une version multi-dimensionnelle du théorème de KMT, due à Einmahl [14], pour justifier le passage entre le mouvement brownien et la marche aléatoire.

Signalons, pour terminer, qu'il est possible de reprendre la méthode présentée dans cet exposé pour démontrer la conjecture d'Erdős–Taylor, uniquement par des considérations sur la marche aléatoire elle-même et sans utiliser le mouvement brownien comme outil (voir [26]).

6. QUELQUES REMARQUES

La plupart des résultats pour la marche aléatoire présentés dans cet exposé s'appliquent en fait à une grande classe de marches aléatoires au sens général. De telles marches ne sont pas contraintes à effectuer des pas de longueur 1. Les résultats restent alors valables sous certaines conditions sur la taille des pas (voir [11]).

On peut également étendre quelques-uns des résultats sur le mouvement brownien à certains processus aléatoires dont les trajectoires ne sont pas continues. Par exemple, les résultats sur les points épais du mouvement brownien en dimension $d \geq 3$ ont été étendus pour les processus stables symétriques transients ([8]).

La méthode développée par Dembo, Peres, Rosen et Zeitouni permet de traiter d'autres problèmes de recouvrement, par exemple, celui de la dimension de Hausdorff des points épais liés à l'intersection de plusieurs mouvements browniens indépendants ([12]), ainsi que celui de la couverture des disques par plusieurs marches aléatoires indépendantes ([5]), ou encore le problème du temps de recouvrement d'une variété riemannienne compacte par le mouvement brownien ([6], [13]). Signalons aussi que la méthode s'applique à l'étude de certaines interfaces aléatoires en mécanique statistique ([3]). Par manque de temps, ces aspects n'ont pas été abordés dans cet exposé.

RÉFÉRENCES

[1] D. Aldous – *Probability approximations via the Poisson clumping heuristic*, Applied Mathematical Sciences, vol. 77, Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] Z. Ciesielski & S. J. Taylor – « First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path », *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), p. 434–450.

[3] O. Daviaud – « Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field », *Ann. Probab.* **34** (2006), no. 3, p. 962–986.

[4] A. Dembo – « Favorite points, cover times and fractals », in *Lectures on probability theory and statistics*, Lecture Notes in Math., vol. 1869, Springer, Berlin, 2005, p. 1–101.

[5] A. Dembo, Y. Peres & J. Rosen – « How large a disc is covered by a random walk in n steps ? », prépublication.

[6] ———, « Brownian motion on compact manifolds : cover time and late points », *Electron. J. Probab.* **8** (2003), no. 15, 14 pp. (electronic).

[7] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen & O. Zeitouni – « Late points for random walks in two dimensions », *Ann. Probab.* **34** (2006), no. 1, p. 219–263.

[8] ———, « Thick points for transient symmetric stable processes », *Electron. J. Probab.* **4** (1999), no. 10, 13 pp. (electronic).

[9] ———, « Thick points for spatial Brownian motion : multifractal analysis of occupation measure », *Ann. Probab.* **28** (2000), no. 1, p. 1–35.

[10] ———, « Thin points for Brownian motion », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **36** (2000), no. 6, p. 749–774.

[11] ———, « Thick points for planar Brownian motion and the Erdős-Taylor conjecture on random walk », *Acta Math.* **186** (2001), no. 2, p. 239–270.

[12] ———, « Thick points for intersections of planar sample paths », *Trans. Amer. Math. Soc.* **354** (2002), no. 12, p. 4969–5003.

[13] ———, « Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions », *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 2, p. 433–464.

[14] U. Einmahl – « Extensions of results of Komlós, Major, and Tusnády to the multivariate case », *J. Multivariate Anal.* **28** (1989), no. 1, p. 20–68.

[15] P. Erdős & P. Révész – « On the favourite points of a random walk », in *Mathematical structure– computational mathematics – mathematical modelling, 2*, Publ. House Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1984, p. 152–157.

[16] ———, « Three problems on the random walk in Z^d », *Studia Sci. Math. Hungar.* **26** (1991), p. 309–320.

[17] P. Erdős & S. J. Taylor – « Some problems on the structure of random walk paths », *Acta Math. Sci. Hungar.* **11** (1960), p. 137–162.

[18] J. Komlós, P. Major & G. Tusnády – « An approximation of partial sums of independent RV's, and the sample DF. II », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* **34** (1976), no. 1, p. 33–58.

[19] G. F. Lawler – « On the covering time of a disc by simple random walk in two dimensions », in *Seminar on Stochastic Processes, 1992 (Seattle, WA, 1992)*, Progr. Probab., vol. 33, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, p. 189–207.

[20] J.-F. Le Gall – « Some properties of planar Brownian motion », in *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XX—1990*, Lecture Notes in Math., vol. 1527, Springer, Berlin, 1992, p. 111–235.

[21] E. A. Perkins & S. J. Taylor – « Uniform measure results for the image of subsets under Brownian motion », *Probab. Theory Related Fields* **76** (1987), no. 3, p. 257–289.

[22] D. Ray – « Sojourn times and the exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion », *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), p. 436–444.

[23] P. Révész – « Clusters of a random walk on the plane », *Ann. Probab.* **21** (1993), no. 1, p. 318–328.

[24] ———, « Covering problems », *Theory Probab. Appl.* **38** (1993), p. 367–379.

[25] ———, *Random walk in random and non-random environments*, second éd., World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.

[26] J. Rosen – « A random walk proof of the Erdős-Taylor conjecture », *Period. Math. Hungar.* **50** (2005), no. 1-2, p. 223–245.

[27] S. J. Taylor – « Regularity of irregularities on a Brownian path », *Ann. Inst. Fourier* **24** (1974), p. 195–203.

[28] B. Tóth – « No more than three favorite sites for simple random walk », *Ann. Probab.* **29** (2001), no. 1, p. 484–503.

[29] W. Werner – « Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions », in *Lectures on probability theory and statistics*, Lecture Notes in Math., vol. 1840, Springer, Berlin, 2004, p. 107–195.

Zhan SHI

Université Paris VI
Laboratoire de Probabilités et
Modèles Aléatoires
CNRS UMR 7599
4 place Jussieu
F–75252 PARIS Cedex 05
E-mail : `zhan@proba.jussieu.fr`